

התרומה של למידה שיתופית לפתרון בעיות מתמטיות בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה

ד"ר צורית אליצור

ראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית הרצוג,
ומורה בחטיבה העליונה.
בעבר שימשה מדריכת מורים במשרד החינוך.
מחקריה מתמקדים בתהליכי חשיבה ובאסטרטגיות
לפתרון בעיות מתמטיות.



התרומה של למידה שיתופית לפתרון בעיות מתמטיות בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה

צורית אליצור

תקציר

העבודה הקבוצתית-שיתופית ותרומתה להתמודדות עם בעיות מתמטיות מורכבות מעסיקות את עולם המחקר בשנים האחרונות, ואף הולכת וחודרת אל תוך תוכניות הלימודים במתמטיקה כחלק ממיומנויות המאה ה-21.

המאמר שלהלן הוא תמציתו של מחקר נרחב שחקרתי, ובדק את תרומת הלמידה השיתופית לפתרון בעיות מתמטיות מורכבות בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה.

במחקר השוויתי בין שתי כיתות נפרדות של סטודנטים שלמדו קורס זהה של "אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיות". בכיתה האחת היה דגש רב על למידה שיתופית כאשר הבעיות נפתרו בקבוצות שיתופיות קטנות. בכיתה השנייה התנהל שיעור 'רגיל' בלי דגש זה, והסטודנטים פתרו את הבעיות לבד. ניתוח הממצאים בשתי הכיתות אפשר לבדוק האם נוצרו שינויים בין שתי הקבוצות, והאם הלמידה השיתופית תרמה למיומנות של הסטודנטים בפתרון בעיות מתמטיות.

עיקרי הממצאים הסתמכו על השוואה בין מבחן-קדם (pre-test) שעברו כלל הסטודנטים בתחילת הקורס, לעומת מבחן-אחר (post-test) בסיומו. המבחנים בדקו את המיומנות המתמטית של הסטודנטים ואת המיומנות הטיעונית שלהם בפתרון בעיות. הממצאים הראו כי שני הקורסים התחילו בנקודת פתיחה דומה, ובשני הקורסים חל שיפור גם במיומנות המתמטית וגם במיומנות הטיעונית. עם זאת בקורס שבו ניתן דגש על למידה שיתופית, השיפור בשני המדדים היה באופן מובהק גדול יותר.

מילות מפתח: למידה שיתופית; אסטרטגיות לפתרון בעיות; טיעון מתמטי; מיומנות פתרון בעיות.

מבוא

מיומנויות הלימוד במאה ה-21

מערכות החינוך בארץ ובעולם עוסקות ביעדים הנדרשים במאה ה-21 למערכת החינוך בכלל ובמתמטיקה בפרט. בעבודת אנליזה רחבה של מחקרים שעשו ואן לאהר ועמיתיה (van Laar et al., 2017) ובה 75 מאמרים

אקדמיים שנכתבו בין השנים 2000-2016, הופיעו 12 כישורים שחיוניים למיומנויות במאה ה-21, והן דירגו אותם על פי מידת ההסכמה הקיימת בספרות בדבר נחיצותם: ניהול מידע, חשיבה ביקורתית, יצירתיות וחדשנות, יכולת פתרון בעיות, שיתוף פעולה, תקשורת, כישורים טכניים, הכוונה עצמית, למידה לאורך החיים ועוד.

כיוון דומה מצוי בתוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לחטיבה העליונה, שאישרה ועדת המקצוע במאי 2010 (משרד החינוך, 2012), והמתווה שלה כולל בין השאר את הדגשים האלה:

- יכולת התמודדות עם שאלות סבוכות באמצעות שימוש בכלים ובשפה המתמטית.
- חשיבה מתמטית-לוגית הכוללת ביקורתיות ודיוק לצד בקרה על תהליך פתרון הבעיות.
- פיתוח מיומנויות של תקשורת מתמטית: קריאה וכתיבה של ביקורת על טיעון, הגנה על טיעון (ארגומנטציה), ותקשורת בעל-פה בעת ניהול שיח מתמטי.

נוסף על כך בשנים האחרונות יש קריאה לשילוב של עבודה קבוצתית-שיתופית כחלק מההתמודדות עם סוגיה זו של פתרון בעיות במתמטיקה (ראמ"ה 2017; OECD, 2010) מלבד מיומנויות החשיבה הנדרשות. בעבודה השיתופית יש צורך ביכולות של עבודת צוות, טיעון, ניהול ובקרה עצמית והדדית ומיומנויות שיתוף.

כיוון שכך, בשנת 2015 הוכנס רכיב השיתוף למבחני הפיזה (הנעשים לתלמידים בני 15 פעם בשלוש שנים): "מיומנות פתרון בעיות שיתופי היא היכולת של אדם לעסוק בצורה אפקטיבית בתהליך שבו שני שותפים או יותר מנסים לפתור בעיה באמצעות שיתוף החשיבה והמאמץ הנחוצים כדי למצוא פתרון, וצירוף הידע שלהם, כישוריהם ומאמציהם כדי להגיע אליו" (ראמ"ה, 2017, עמ' 2).

* המחקר נעשה בסיוע המכללה האקדמית הרצוג.

שמתבטאת ביכולת ליצור תכלול בין תחומי הדעת המגוונים הקשורים בבעיה ובפתרונה.

למידה שיתופית

למידה שיתופית (collaboration) היא שם כולל לדגמים מגוונים של שיטות הוראה-למידה שמדגישות שיתוף פעולה בין התלמידים במהלך פעילותם הלימודית (שינפלד, 2017). הלומדים פועלים יחדיו להשיג מטרה משותפת, וכאן – פתרון בעיה מתמטית מורכבת (Slavin, 2010).

ג'ונסון ועמיתיו (Johnson et al., 2000) סקרו במחקריהם עשרות מחקרים על נושא למידה שיתופית. המשתנים שנבדקו היו רמת חשיבה גבוהה, שימור ידע, משך זמן העבודה על משימה, המוטיבציה להישגים, המוטיבציה להתמדה במשימה, פיתוח כישורים חברתיים, צמצום של סטראוטיפים ודעות קדומות, הערכה עצמית ועוד. נמצא כי המסגרת הקבוצתית השיתופית יוצרת יתרון במגוון רחב מאוד של משתנים ותורמת הן להישגי הקבוצה הן להישגי היחיד. היא מעודדת את המשתתפים לפעלתנות, לפיתוח דיון ולביקורת הדדית, ומתוך כך היא מקדמת חשיבה ומעלה רעיונות חדשים, מגוונים ויצירתיים.

על הקשרים שנוצרים בין הלומדים בלמידה שיתופית כתב דילנבורג (Dillenbourg, 1999), שהיא מעודדת פעילויות קוגניטיביות ברמה גבוהה, וסיכוי רב שהם יתנהלו בתדירות גבוהה יותר. שטאל (Stahl, 2007, 2009) מצא כי הקשר בין חברי הקבוצה יוצרת תוצאה סינרגטית שהוא מכנה אותה "קוגניציה קבוצתית" והיא נוגעת ליכולת של קבוצות לעסוק בתהליכים שיכולים לייצר תוצאות שיהיו לטווח ארוך.

שוורץ ועמיתיו (Schwarz et al., 2000) עשו מחקר על ילדים שלא הצליחו לפתור משימה בנפרד, אבל השתפרו מאוד כאשר עבדו בשיתוף פעולה. במילים שלהם: "Two! wrongs may make a right [...] If they argue together!" המנגנונים שעמדו בבסיס ההבניה השיתופית של ההבנה, היו מחלוקת ואי-הסכמה, מנגנון של בקרה, מנגנון של בדיקת השערות ומנגנון של הסקת ידע חדש. נמצא כי הלמידה השיתופית מעצימה מנגנונים אלה ומביאה לידי סינרגיה קבוצתית.

במחקר שבדקו בו כיצד הלמידה השיתופית משפיעה על יצירתיות (מולד, 2019), נמצא שהעבודה בקבוצות לוותה במופעי שטף וגמישות מחשבתית חזקים יותר לעומת העבודה העצמאית. חשיפה של התלמידים לרעיונות של תלמידים אחרים סייעה להם להתגבר על קיבעון מחשבתי ולעבור מגישת פתרון אחת לגישת פתרון אחרת.

חשיבות פתרון בעיות מורכבות בלמידה מתמטיקה

במחקרים בחינוך מתמטי נמצא כי בעיסוק בפתרון בעיות במתמטיקה טמונה יכולת לקדם תלמידים הן ביישום הנהלים שנלמדו, הן ברכישת מושגים מתמטיים חדשים והן בקידום התלמידים לרמות חשיבה גבוהות יותר (למשל: Dreyfus et al., 2015).

יתר על כן, בהרצאה שנשא סטופל ולבנברג בכנס ארצי להוראת מתמטיקה בחינוך העליסודי, הם טענו שהעיסוק בתחום זה של פתרון בעיות מתמטיות עשוי להשפיע גם על יכולות הלמידה בתחומים אחרים:

אחת המטרות המרכזיות בלימודי המתמטיקה היא להקנות לתלמידים דרכי-חשיבה, העשויות לסייע להם בתחומי למידה ודעת אחרים ולפתחן לרמות גבוהות יותר. פתרון בעיות הוא אחד האמצעים החשובים לפיתוח החשיבה. [...] מציאת דרך פתרון נוספת, ע"י שימוש בכלים מאותו תחום מתמטי – ובמיוחד מתחום אחר – מסייעת לפיתוח החשיבה ומעלה אותה לרמה גבוהה יותר (סטופל ולבנברג, 2011).

בדומה הגדיר OECD את המיומנות הנדרשת לפתרון בעיות במבחני הפיזה: "היכולת של אדם לעסוק בעיבוד קוגניטיבי כדי להבין ולפתור מצבי בעיה היכן שלא קיימת שיטת פתרון מובנת מאליה" (OECD, 2010, p. 12).

בסקירה פדגוגית רחבה של דרכי הוראה שמביאות לידי למידה משמעותית (המינהל הפדגוגי, 2015) מופיע פירוט של המטרות המרכזיות ללמידה הנשענת על פתרון בעיות:

- א. להגביר את ההנעה ללמידה ולהעביר ללומדים אחריות ללמידה על כל היבטיה.
- ב. לפתח יכולות של "הכוונה עצמית בלמידה" (self-regulated learning).
- ג. לפתח יכולת גנרית של פתרון בעיות, שאפשר להשתמש בה כדי לפתור בעיות חדשות שאינן מוכרות. ביכולת זו יש קשת רחבה של מיומנויות חשיבה מסדר גבוה, ובהן חשיבה יצירתית וחשיבה ביקורתית, מיומנויות למידה שיתופיות ומיומנויות למידה בסביבה עתירת מידע.
- ד. לפתח הבנה מעמיקה של מושגים ועקרונות בתחום שהבעיה עוסקת בו באופן שיהיה אפשר לשלוף אותו בעת הצורך לפתור בעיות ולנתח מצבים חדשים.
- ה. לפתח חשיבה אנליטית לצורך ניתוח של בעיה והבנת נסיבותיה, וחשיבה אינטגרטיבית-סינתטית

במחקר המוצג כאן יש שימוש בשבעת הקריטריונים הנ"ל
בניתוח איכות הטיעונים שתועדו בפרוטוקולים של דיוני
הסטודנטים על פתרון בעיות מתמטיות מגוונות.

תיאור המחקר

מטרת המחקר: לבדוק האם יימצאו הבדלים בין הלומדים
ביחד ובין הלומדים לבד, ולבדוק את תרומת הלמידה
השיתופית למיומנות המתמטית בפתרון בעיות.

אוכלוסיית המחקר ומסגרת הלימוד: המחקר נעשה בקרב
שתי כיתות של סטודנטים להוראת מתמטיקה במכללה
להכשרת מורים, שלמדו קורס ששמו "אסטרטגיות
לפתרון בעיות מתמטיות". סך כל המשתתפים (בשתי
הכיתות) הוא 56 סטודנטים. תוכני שני הקורסים היו
זהים. בשניהם הודגשו היתרונות של שילוב פתרון בעיות
מורכבות בהוראה, אך בקורס האחד היה דגש בלמידה
שיתופית, ואילו בקורס השני לא היה דגש על למידה
שיתופית והסטודנטים פתרו את הבעיות בעצמם.

קורס 1 (למידה שיתופית): השתתפו 29 סטודנטים.
הבעיות המגוונות הודפסו על דפים שחולקו לכל
שניים-שלושה משתתפים ביחד, והם פתרו אותן בקבוצות
קטנות שיתופיות. כאשר היה צורך במחשב כל הקבוצה
השתמשה ביחד במחשב אחד.

מכיוון שמדובר בסטודנטים להוראה, הודגשו להם פעם
אחר פעם היתרונות הדידקטיים של הלמידה השיתופית,
והם נחשפו למחקרים המלמדים על יתרונות בדרך זו
ועל תפקידו המשתנה של המורה בלמידה זו. בד בבד
הם האזינו לדיאלוגים שניהלו קבוצות של תלמידי תיכון
בפתרון בעיות מתמטיות (דיאלוגים מפרויקט אחר שלי),
וניתחנו ביחד כיצד הדיאלוג השיתופי קידם את התלמידים
בפתרון בעיות.

קורס 2 (למידה פרטנית): השתתפו 27 סטודנטים
שפתרו את הבעיות בדרך פרטנית. לא היה דגש על
לימוד שיתופי ולא הודגשו יתרונותיו. עם זה כאשר בחרו
סטודנטים לפתור בצוות – הדבר כמובן לא נמנע מהם.

שאלת המחקר: האם מערך של למידה שיתופית בקבוצות
קטנות של סטודנטים יטפח את היכולת לפתרון בעיות
מתמטיות?

שיטת המחקר: עיקרו של המחקר כמותי. המתודולוגיה
נשענה על ניתוח השוואתי בין מבחן שניתן בתחילת
הקורס (pre-test) ובין מבחן שניתן בסיומו (post-test).

משוב לומדים: בסיום הקורס מילאו הסטודנטים שאלוני
משוב שהורכבו משאלות פתוחות וסגורות על הקורס ועל
התמודדותם עם הבעיות והמתודות שהוצגו בו. ציטוטים
מתוך המשובים ישולבו בפרק הדיון להלן.

נוסף על כך נמצא שהלמידה השיתופית מכינה
את הלומדים לחיים האמיתיים ולהשתלבות
בשוק העבודה המודרני בדרך הטובה ביותר
(שינפלד, 2017; Benke et al., 2021).

המסקנות שהוזכרו לעיל נמצאו נכונות גם למוקד ענייננו
במאמר זה – פתרון בעיות מורכבות במתמטיקה: בואלר
(Boaler, 1997) הראתה במחקר מקיף וארוך טווח כי
תלמידים שלמדו מתמטיקה והתמודדו עם בעיות מורכבות
בדרך של דיונים ועבודה בקבוצות קטנות, הצליחו הרבה
יותר מתלמידים שלמדו בגישה המסורתית שבה המורה
מדגים על הלוח כיצד פותרים, ולאחר מכן התלמידים
מתרגלים.

דיון המקדם חשיבה וקריטריונים להערכת דיון

ווד (Wood, 2002) הגיע לידי מסקנה כי איכות החשיבה
המתמטית של הילדים מושפעת מאיכות ההסברים
וההצדקות שהם הורגלו אליהם בכיתה. בתרבות הדיון
שהציע ווד, מצופה מתלמידים מצד אחד לתאר את
ההצעות המגוונות שלהם לפתרון בעיה ולהיות מסוגלים
להצדיק אותן, ומצד אחר להבין את הפתרונות שמציעים
חברי הקבוצה האחרים, לבקש הבהרות עליהן וגם
להסכים לבדוק אותן בדיקה אמפירית.

מינס וווס (Means & Voss, 1996) מונים קריטריונים
שלפיהם אפשר להעריך את איכות הטיעונים בדיון ואת
הקשר הלוגי בין הטענות למסקנות הנובעות מהן:

1. **הנמקה (reasoning)** – הדיון כולל הנמקה ועיגון
של הטיעונים.
2. **הכללה (inclusion)** – יכולת לראות את הקשר בין
האירועים ולמצוא חוקיות.
3. **בהירות ומפורשות (clarity and explicit)**
– יכולת לנסח את הטענות והנימוקים בבירור
ובמפורש.
4. **הפשטה (abstraction)** – יכולת לנסח הגדרה
פורמלית.
5. **רלוונטיות (relevance)** – מתן טיעונים ונימוקים
שתומכים ישר בטענה.
6. **מספיקות (sufficiency)** – האם הנימוקים מספיקים
כדי לחזק את הטענה.
7. **מטא־קוגניציה ורפלקציה (metacognition and reflectivity)**
– האם בדיון יש גם רכיב של
מטא־קוגניציה ורפלקציה של המשתתפים על תהליך
הפתרון.



כלי המחקר ושיטת איסוף הנתונים

מבחן-קדם (pre-test) / מבחן-אחר (post-test): הסטודנטים בשני הקורסים פתרו שלוש בעיות בתחילת הקורס (מבחן-קדם) ובסיומו (מבחן-אחר). בשתיים מתוך שלוש הבעיות נפתרו פתרון פרטני, ואחת אחרת נפתרה בקבוצות קטנות שיתופיות. השוואת התוצאות בשני המבחנים בין קורס 1 (שיתופי) לקורס 2 (פרטני) אפשרה לבדוק את השפעתה של הלמידה השיתופית על מידת השינויים שעלו מתוצאות שני המבחנים.

כל שלוש הבעיות הוצגו בסיפור מסגרת שנועד לטשטש את התחום המתמטי שהשאלה משתייכת אליו כדי למנוע נעילה לכיוון מסוים, ולאפשר להעלות כיווני פתרון מגוונים. בכל שלוש הבעיות הם נדרשו לדון בהשערה, בחקירה, בהכללה ובהנמקה.¹

ניתוח התשובות של התלמידים בשני המערכים נעשה בדרך כפולה: מצד אחד האם הפתרונות נכונים מבחינה מתמטית, ומצד אחר רמת הטיעונים שהועלו. על פי ניתוח זה כל פתרון קיבל ניקוד כפול: ציון מתמטי וציון טיעוני. הראשון ניתן על נכונות הפתרון מבחינה מתמטית. השני מבטא את כישורי ההנמקה, ההפשטה, יצירת הכללה, ועשיית מטא-קוגניציה ורפלקציה לכל אלה. יודגש כי הממצאים וניתוחם עברו שיפוט חיצוני כדי לבדוק את המהימנות ואת התיקוף שלהם.²

1. הציון המתמטי ניתן על הנכונות המתמטית של הפתרון ועל ביסוסו מבחינה מתמטית. הניקוד ניתן בנפרד לכל אחד ואחד מסעיפי השאלה בנפרד בדרך זו: 0 נקודות לפתרון שגוי.

1 נקודה לפתרון חלקי נכון או פתרון נכון אך ללא ביסוס מתמטי.

2 נקודות לפתרון נכון + ביסוס מתמטי נכון.

2. הציון הטיעוני ניתן על פי איכות הטיעונים שעלו ונרשמו בפתרון, ובהתאמה לשבעת הקריטריונים לעיל של מינס ווס (Means & Voss, 1996) וגלסנר (2009). יודגש כי הציון הטיעוני ניתן גם אם מבחינה מתמטית הפתרון או הטיעון היו שגויים. לדוגמה:

1. בנספח 1 מצויה דוגמה של אחת משלוש הבעיות שניתנו במבחנים אלו.

2. לצורך השגת מהימנות ותיקוף של ניתוח הדיונים והנתונים, הקידוד ומתן הציונים המתמטיים והטיעוניים עברו שיפוט של שני מעריכים חיצוניים. נוסף על כך נעשה גם שימוש במדד מהימנות מסוג Kappa Cohen כדי לבדוק את מידת ההסכמה בין המעריכים. התוצאות הראו שמידת ההתאמה הייתה 88%, וההבדלים שנמצאו נדונו בין שני המעריכים עד ליישובם

אם הסטודנט הציג הכללה אך היא לא הייתה נכונה מבחינה מתמטית, הוא קיבל את הניקוד הטיעוני להכללה אף על פי שלא קיבל את הניקוד המתמטי.

הערה חשובה שיורחב עליה בהמשך היא שלפעמים קשה לעשות הפרדה מוחלטת בין המישור המתמטי ובין המישור הטיעוני, כיוון שחלק מהקריטריונים משותפים במידה מסוימת לשני המישורים.

ממצאים - פתרון בעיות ומיומנות טיעונית תוצאות מבחן-קדם לעומת מבחן-אחר

כאמור, במבחן-קדם ובמבחן-אחר התמודדו התלמידים עם שלוש בעיות. בשתיים מהבעיות ההתמודדות הייתה אישית, ובשלישית – קבוצתית. השאלות בשני המבחנים (קדם ובתר) היו זהות, אבל הוצגו בסיפור מסגרת אחר ועם נתונים מספריים אחרים.

בתוצאות להלן הגרפים המתארים את קורס 1 (שיתופי) שנלמד בדגש שיתופי, יופיעו בצבע ירוק, ואילו הגרפים שמתארים את קורס 2 (פרטני) שנלמד בלי דגש שיתופי, יופיעו בצבע כתום.

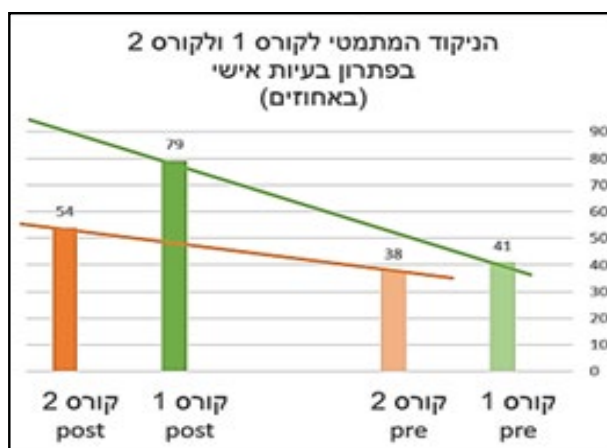
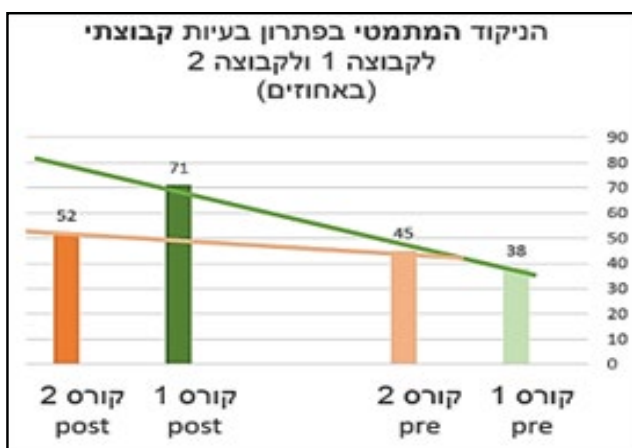
נקודת הפתיחה: במבחני הקדם שנעשו בתחילת הקורסים, ההישגים בקורס 1 (שיתופי) ובקורס 2 (פרטני) היו קרובים מאוד. בשאלות שנפתרו אישית נמצא יתרון קל לקבוצת הסטודנטים מקורס 1 (41% לעומת 38% מסך הנקודות), ואילו בשאלות שנפתרו בקבוצה נמצא יתרון דווקא לסטודנטים מקורס 2 (פרטני) (38% לעומת 45% מסך הנקודות).

בהתחשב בזה שבמבחני הקדם נמצא יתרון פעם אחת לקבוצת הסטודנטים מקורס 1 (שיתופי), ופעם שנייה לאלו מקורס 2 (פרטני), הרי שמותר לטעון כי נקודת הפתיחה של הסטודנטים בשני הקורסים היא דומה. נבחן תחילה את השיפור שחל בציון המתמטי, ולאחר מכן את השיפור בציון הטיעוני.

שיפור הציון המתמטי

הן במבחן-קדם הן במבחן-אחר קיבלו הסטודנטים שלוש שאלות. שתיים מהן נפתרו בעבודה אישית, והשלישית בעבודה קבוצתית-שיתופית. הגרפים להלן מציגים את השיפור שחל בניקוד המתמטי הן בשאלות שנפתרו פתרון אישי הן בשאלות שנפתרו פתרון קבוצתי-שיתופי.

השיפור בשאלות האישיות מוצג בגרף הימני, והשיפור בשאלות שנפתרו בקבוצות שיתופיות מוצג בגרף השמאלי.



איור 1: שיפור בציון המתמטי במבחן-קדם – השוואה בין קורס 1 (שיתופי) לקורס 2 (פרטני)

א. ככלל, בשתי הקבוצות חל שיפור בציון המתמטי בפתרון הבעיות במבחן-קדם לעומת מבחן-אחר, הן בשאלות האישיות הן בשאלות הקבוצתיות-שיתופיות.

ב. בשאלות האישיות היה במבחן-קדם ציון מתמטי גבוה יותר לקורס 1 (שיתופי) לעומת קורס 2 (פרטני). עם זה הפערים בין שני הקורסים לא היו גדולים יחסית (41% לעומת 38%). לעומת זאת במבחן-אחר הפערים בין הקורסים גדולים (79% לעומת 54%). לפי מגמה זו השיפור בקורס 1 שבו הלמידה והדגשים היו שיתופיים, גדול יותר. דבר זה ניכר גם בשיפוע הגדול יותר של הקו הירוק לעומת הקו הכתום.

ג. ממצא זה עקיב גם בפתרון הבעיות שנפתרו פתרון קבוצתי-שיתופי. כאן במבחן-קדם היה דווקא יתרון קל לקבוצה 2 על פני קבוצה 1 (45% לעומת 38%). אבל במבחן-אחר הפער בין הקורסים הוא לטובת קורס 1 (שיתופי) במידה ניכרת על פני קורס 2 (פרטני) (71% לעומת 52%), וכמובן, רמת השיפור שהתחוללה בין מבחן-אחר למבחן-קדם גבוהה במידה ניכרת בקורס 1 (שיתופי)

א. ככלל, בשתי הקבוצות חל שיפור בציון המתמטי בפתרון הבעיות במבחן-קדם לעומת מבחן-אחר, הן בשאלות האישיות הן בשאלות הקבוצתיות-שיתופיות.

ב. בשאלות האישיות היה במבחן-קדם ציון מתמטי גבוה יותר לקורס 1 (שיתופי) לעומת קורס 2 (פרטני). עם זה הפערים בין שני הקורסים לא היו גדולים יחסית (41% לעומת 38%). לעומת זאת במבחן-אחר הפערים בין הקורסים גדולים (79% לעומת 54%). לפי מגמה זו השיפור בקורס 1 שבו הלמידה והדגשים היו שיתופיים, גדול יותר. דבר זה ניכר גם בשיפוע הגדול יותר של הקו הירוק לעומת הקו הכתום.

ג. ממצא זה עקיב גם בפתרון הבעיות שנפתרו פתרון קבוצתי-שיתופי. כאן במבחן-קדם היה דווקא יתרון קל לקבוצה 2 על פני קבוצה 1 (45% לעומת 38%). אבל במבחן-אחר הפער בין הקורסים הוא לטובת קורס 1 (שיתופי) במידה ניכרת על פני קורס 2 (פרטני) (71% לעומת 52%), וכמובן, רמת השיפור שהתחוללה בין מבחן-אחר למבחן-קדם גבוהה במידה ניכרת בקורס 1 (שיתופי)

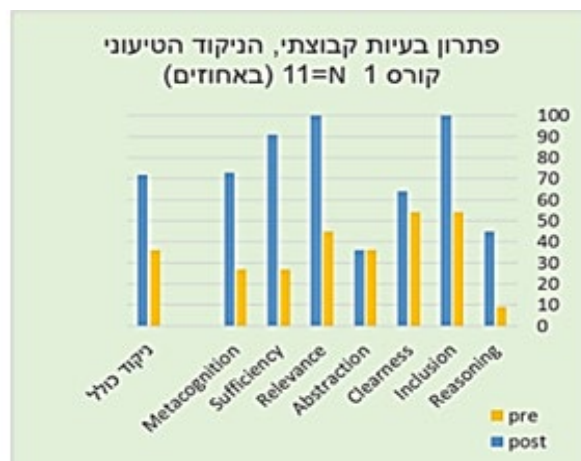
סיכום ביניים של הממצאים עד כה מעלה כי בקורס 1 שעבדו בו הסטודנטים עבודה קבוצתית-שיתופית, השיפור בציון המתמטי היה גדול במידה ניכרת מאוד לעומת השיפור בקורס 2 שבו עבדו פרטני.

בסעיף להלן יוצגו ממצאים דומים גם בשינויים שהתחוללו בציון הטיעוני בשני הקורסים.

שיפור הציון הטיעוני

כפי שהוסבר בתיאור המחקר הציון הטיעוני ניתן על פי שבעה קריטריונים טיעוניים (הנמקה, הכללה, בהירות ומפורשות, הפשטה, רלוונטיות, מספיקות ומטא-קוגניציה).

בשני הקורסים חל שיפור בניקוד בכל אחד מהקריטריונים, והציון הטיעוני במבחן-קדם גבוה מהציון הטיעוני במבחן-אחר. הגרף הימני מתאר את השיפור הטיעוני בקורס 1 (השיתופי), והגרף השמאלי מתאר את השיפור הטיעוני בקורס 2 (הפרטני).



איור 2: שיפור בציון הטיעוני במבחן-אחר בקורס 1 ובקורס 2 לפי קריטריונים של טיעון

דיון, סיכום ומסקנות

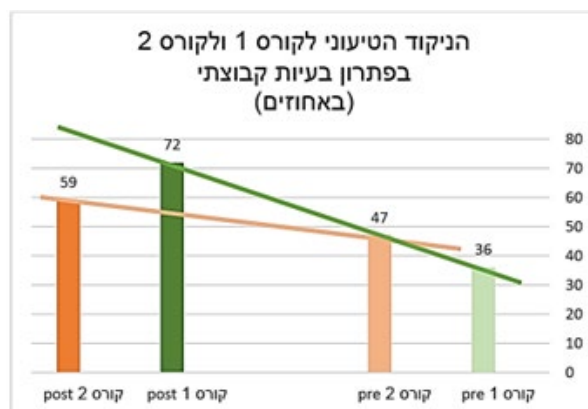
הממצא הבולט במחקר זה הוא שלמידה שיתופית תורמת למיומנות המתמטית של פתרון בעיות מתמטיות מורכבות, ומניבה שיפור מובהק הן במיומנות הטיעונית והן במיומנות המתמטית בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה.

המסקנה בדבר היתרון שיש לעבודה שיתופית בפתרון בעיות מורכבות (כפי שנאמר לעיל) מכילה מעצם הגדרתה התניה שהתהליך שמתנהל בה אכן יהיה שיתופי. במחקרים כבר נמצא שהיעילות של עבודה שיתופית היא נגזרת מהיכולת של חברי הקבוצה לשתף ביניהם פעולה מתוך העדפה של הצלחת הקבוצה על פני הצלחתם האישית (Aronson & Patnoe, 1997; Dillenbourg, 1999; Schwartz, 1995).

בשדה המחקר החינוכי התפתחה ההבנה כי תהליכי למידה רבים וחשובים מתנהלים בקהילות. הבנה זו מעלה צרכים ואתגרים חדשים הקשורים לבניית ידע שיתופי וקשרים בין לומדים בחברת המידע (פיון, 2022). המסגרת הקבוצתית-שיתופית עשויה לתרום לפתרון בעיות מתמטיות בכמה היבטים שעשויים לשפוך אור על הפער שנוצר בין שתי הקבוצות בפתרון הבעיות המתמטיות:

- א. בקרה הדדית ועזרה – הקבוצה השיתופית משמשת מקום לשאול שאלות, להתלבט ולהתייעץ, וגם מסגרת לבקרה הדדית לעמיתים ולתקן טעויות במקרה הצורך (אליצור, 2019): "כשכמה עובדים ביחד, יש יותר סיכוי לשים לב לטעויות [...] טעיתי כמה פעמים וא' תיקן אותי" (י' מקורס 1 [שיתופי]).
- ב. הנאה – במחקרה של זוהר (2013) על למידה שיתופית, היא טוענת שגילויי הנאה גורמים להשבתת הלמידה. לדבריה של זוהר, גילויי הנאה נובעים הן מעצם קבלת האחריות העצמית לתהליך הלמידה הן מהעמקת הקשרים הבין-אישיים בין חברי הקבוצה.
- ג. מעורבות – ההשתייכות הקבוצתית גרמה למעורבות ושותפות פעילה של כל אחד מחברי הקבוצה, ותרמה למאמץ להגיע לידי פתרון: "גם כשהיה לי מאתגר, הרגשתי שאני משתתפת ומנסה לקחת חלק..." (ד' מקורס 1 [שיתופי]). ממצא זה תואם למחקרם של גולדין ועמיתיו (Goldin et al., 2011), שבו הם מפרטים סוגים של מבני מעורבות ("engagement structures"), ומדגישים את התפקיד החשוב של המעורבות הרגשית בפתרון בעיות.
- ד. מוטיבציה והתמדה – ג'ונסון ועמיתיו (Johnson et al., 2000) מונים בסקירה מקיפה את יתרונות הלמידה השיתופית כפי שהיא עולה

בגרף הבא מופיע הניקוד הטיעוני בהשוואת מבחן-קדם למבחן-אחר.



איור 3: השוואת השיפור בציון הטיעוני בקורס 1 לעומת קורס 2

גם כאן השיפור בניקוד הטיעוני של קורס 1 (שיתופי) גדול מהשיפור של קורס 2 (פרטני). הפער ניכר גם בשיפוע הגדול יותר של הקו הירוק לעומת הקו הכתום.

בקורס 1 (שיתופי) השיפור בציון הטיעוני הוא מ-36% ל-72%, כלומר עלייה של 100%. **בקורס 2 (פרטני)** השיפור בציון הטיעוני הוא מ-47% ל-59%, כלומר עלייה של 26%.

סיכום הממצאים מלמד על הנקודות הבאות:

- א. שני הקורסים התחילו בנקודת פתיחה דומה, ובמבחן-קדם הציונים המתמטיים והטיעוניים קרובים (יש פעמים שבקורס 1 [שיתופי] היה ציון גבוה יותר ויש פעמים שבקורס 2 [פרטני] היה ציון גבוה יותר).
- ב. בשני הקורסים חל שיפור בתוצאות במבחן-קדם לעומת מבחן-אחר. המסקנה המתבקשת היא שעיסוק בפתרון בעיות לאורך זמן משפר את המיומנות המתמטית גם בעבודה פרטנית לחלוטין. במילים אחרות, זו תוצאה צפויה בדומה למתנהל בכל תהליך למידה מכל סוג שהוא.
- ג. השוואת התוצאות של קורס 1 (שיתופי) לעומת התוצאות בקורס 2 (פרטני) מראה בבירור רב כי השיפור בקורס 1 שהיה בו דגש בפתרון בעיות שיתופי, היה גבוה יותר בכל המדדים שנבחנו לעומת קורס 2 שבו הלמידה הייתה פרטנית בלבד. ההבדל בתוצאות בין שתי הקבוצות האלה היה בבירור לטובת הלימוד הקבוצתי-שיתופי. זה התבטא הן בשיפור המיומנות המתמטית והן בשיפור המיומנות הטיעונית.

לקדם ביחד ובו בזמן את המיומנות הטיעונית ואת המיומנות המתמטית, ולשלב פתרון של בעיות מתמטיות מורכבות עם למידה שיתופית.

מחקר דומה (Diego-Mantecon et al., 2021) שבדק את ההשפעה של למידה שיתופית על הישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה ו', מצא ממצאים התואמים את הממצאים במחקר זה. התברר כי הציונים במבחן-אחר של התלמידים שלמדו מתמטיקה בלמידה שיתופית, היו גבוהים במידה ניכרת מהציונים של התלמידים בקבוצת הביקורת שלמדו פרטני בשיטה דידקטית קונבנציונלית. מסקנת מחקר זה היא היעילות של למידה שיתופית בשיפור הישגים במתמטיקה.

ייחודיות מחקר זה היא שהוא נעשה בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה. עד היום הלמידה השיתופית אינה מיושמת בהיקף נרחב בהוראה באוניברסיטאות ובמכללות (שינפלד, 2017). למידה שיתופית עשויה לסייע ביצירת פעולות גומלין חברתיות, ולתת פתרון לתחושת הניכור ותחושת הבדידות אצל סטודנטים שלומדים למידה מרחוק (שינפלד, 2022). עם זה נראה כי מערכת החינוך ומערכת הכשרת המורים טרם הצליחו לפתח מיומנויות של למידה שיתופית, בעיקר מקוונת. מוסדות להשכלה גבוהה אומנם שמים להם למטרה לאמץ טכנולוגיות שיתופיות, אך היישום מחייב תהליכי שינוי ארגוניים ופדגוגיים בהוראה ולמידה אקדמית. על פי ממצאי מחקר זה ראוי לשלב למידה שיתופית בהכשרה להוראה, ולהרוויח רווח כפול: רווחים מלמידה שיתופית בלימודי התואר והתנסות מספקת וחיונית כדי שפרחי ההוראה ישלבו שיטה זו בעתיד בהוראה בבתי הספר.

כיוונים למחקר המשך

א. במחקר זה לא נבדק שימור התוצאות לאורך זמן של השיפור במיומנות הטיעונית והמתמטית של פתרון בעיות. במחקר המשך היה רצוי לבדוק האם השיפור נשמר.

ב. מערך זה נעשה מתוך השוואה בין שני קורסים. התוצאות מראות על מגמה שלפיה יש יתרון למערך למידה שיתופי. כדי לעגן את התוצאות, יש לעשות מחקר מקיף יותר על קבוצות רבות.

רשימת מקורות

אליצור, צ' (2019). פיתוח מיומנות מתמטית בפתרון בעיות בסביבה המטפחת למידה שיתופית [עבודת דוקטור]. האוניברסיטה העברית בירושלים.

גלסנר, א' (2009). בנייה והערכה של טיעונים בלמידה והוראה. בתוך א' גלסנר, ע' בן דוד וע' אגור, פיתוח חשיבה מסדר גבוה: סקירת ספרות (עמ' 76–121). משרד החינוך.

ממחקרים רבים. אחד היתרונות הוא המוטיבציה של הקבוצה להישגים, כמו מוטיבציה להתמדה. הדבר מחייב ליצור אקלים קבוצתי חיובי, נוח, מגן ומפרגן. היטיב לבטא זאת שוורץ (Schwartz, 1995), שהיעילות של פתרון בעיות שיתופי תלויה ביכולתם של חברי הקבוצה לשתף פעולה ולהעדיף את הצלחת הקבוצה על פני הצלחתם האישית.

ה. חשיבה משותפת וריבוי רעיונות – לפי שטאל (Stahl, 2007, 2009) פעולת גומלין בין חברי הקבוצה יוצרת תוצאה סינרגטית שהוא מכנה "קוגניציה קבוצתית": "מעדיף לעבוד בשיתופי, כי ככה משלבים בין הרעיונות, ומפתחים רעיונות של אחרים מכיוונים שונים, ולא מוגבלים לזווית ראייה אחת של כל אחד" (א' מקורס 1 [שיתופי]).

במשובים שמילאו הסטודנטים, הם חזרו וטענו פעם אחר פעם שאלמלא העבודה הקבוצתית-שיתופית ספק רב אם היה בכוחם להתמודד עם מורכבות השאלות ולפצח אותן.

הקשר בין היכולת הטיעונית ליכולת הלמידה

לטענת מינס ווס (Means & Voss, 1996), שיפור וחיזוק של מיומנויות הטיעון בקריטריונים למיניהם מעניקים יכולת טובה יותר לרכישת ידע בתחומים רבים ומגוונים. עוד יש הרואים בטיעון וביכולת לטעון בסיס ללמידה שיתופית מיטבית שתביא לידי שיפור מיומנויות לימודיות (Schwarz & Baker, 2016).

הממצאים במחקר זה אכן מאשרים את הטענה לעיל: ראשית, השיפור הגורף שהתחולל בין מבחן-קדם למבחן-אחר בכל שבעת הקריטריונים של יכולת הטיעון, מתבטא במתאם מובהק גם בשיפור של היכולת המתמטית של התלמידים; שנית, זיקה זו של יכולת הטיעון ליכולת המתמטית נמצאה נכונה גם בלי השוואה בין מבחן לרעהו, כאשר כל מבחן נידון בפני עצמו. גילוי זה היה נכון הן במבחני קדם לעצמם הן במבחני בתר לעצמם הן במבחנים האישיים הן במבחנים הקבוצתיים – בכולם נמצא מתאם מובהק בין הציון המתמטי לציון הטיעוני. ככל שתלמיד (או קבוצה) צבר יותר נקודות בציון הטיעוני, כך גם הניקוד המתמטי היה בהתאמה גבוה יותר וכן להפך. לפי ממצאים אלו איכות החשיבה המתמטית מושפעת מאיכות ההסברים וההצדקות שתלמידים מורגלים בהם בכיתה (Wood, 2002).

לסיכום: המסקנה שעולה כאן היא שקבוצה שיתופית, שבקרב חבריה שוררת הרמוניה בסיסית והיא פועלת כקבוצה משימתית, תצליח יחסית לאמץ לעצמה את מתודות החקירה ותהליכי העבודה המתמטיים. מומלץ

based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM – Mathematics Education*, 53(5), 1137–1148. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9>

Dillenbourg, P. (1999). What do you mean by collaborative learning. In P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative learning: Cognitive and computational approaches* (pp. 1–19). Elsevier.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 185–217). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_8

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning. *ZDM – Mathematics Education*, 43(4), 547–560. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0348-z>

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Stanne, M. B. (2000). Cooperative learning methods: A meta-analysis. University of Minnesota.

Means, M. L., & Voss, J. F. (1996). Who reasons well? Two studies of informal reasoning among children of different grade, ability, and knowledge levels. *Cognition and Instruction*, 14(2), 139–178. https://doi.org/10.1207/s1532690xcil402_1

OECD. (2010). *PISA 2012 field trial problem solving framework*. <https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/topics/policy-sub-issues/student-problem-solving-skills/46962005.pdf>

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8>

Schwartz, D. L. (1995). The emergence of abstract representations in dyad problem solving.

זוהר, ע' (2013). ציונים זה לא הכול: לקראת שיקומו של השיח הפדגוגי. ספרית פועלים.

מולד, א' (2019). יצירתיות מתמטית של בוגרי תיכון בעבודה לבד לעומת בעבודה בקבוצות [עבודת מוסמך]. אוניברסיטת תל אביב.

המינהל הפדגוגי. (2015). נתיבים להוראה משמעותית: מניפת מודלים יישומיים להוראה משמעותית. משרד החינוך.

משרד החינוך. (2012). התאמת מערכת החינוך למאה ה-21: הקניית אוריינות מחשב ומידע CIL בבתי הספר היסודיים. מנהל תקשוב טכנולוגיה ומערכות מידע, אגף טכנולוגיות מידע.

סטופל, מ' ולבנברג, א' (2011, 27 בדצמבר). הצגת פתרונות שונים לבעיה בהנדסת המישור, ככלי לפיתוח החשיבה ולהבלטת יופייה של המתמטיקה [הרצאה בכנס]. הכנס הארצי השנתי להוראת מתמטיקה בחינוך העל-יסודי: מגמות עכשוויות בחינוך מתמטי. https://highmath.haifa.ac.il/images/data2/kenes_2011/Abstracts/Abstracts_Booklet_18.pdf

פיון, כ' (2022). טיפוח תרבות למידה שיתופית מוכוונת ערכים פנימיים בקהילות ידע חוקרות [עבודת דוקטור]. אוניברסיטת חיפה.

ראמ"ה. (2017). תקציר תוצאות מבחן מיומנות בפתרון בעיות שיתופי פיזה (PIZA) 2015 http://meyda.education.gov.il/files/Rama/PISA_2015_CPS_summary.pdf

שינפלד, מ' (2017). למידה שיתופית בעידן הדיגיטלי. בתוך ע' מלמד וא' גולדשטיין (עורכים), הוראה ולמידה בעידן הדיגיטלי (עמ' 187–216). מכון מופ"ת.

שינפלד, מ' (2022). אתגרים בלמידה שיתופית מקוונת: מחקר הערכה מקדם הצלחה. רבי-גוונים: מחקר ושיח, 22, 157–180.

Aronson, E., & Patnoe, S. (1997). The jigsaw classroom: *Building cooperation in the classroom* (2nd ed.). Longman.

Benke, I., Heinzl, A., & Maedche, A. (2021). The relationship of collaboration technologies and cognition and affect. In T.-X. Bui (Ed.), *Proceedings of the 54th Hawaii International Conference on System Sciences* (pp. 701–711). University of Hawaii at Manoa. <http://doi.org/10.24251/HICSS.2021.086>

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Open University Press.

Diego-Mantecon, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F., & Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project-

Journal of the Learning Sciences,
4(3), 321–354. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0403_3

Schwarz, B. B., & Baker, M. J. (2016). Dialogue, argumentation and education: History, theory and practice. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316493960>

Schwarz, B. B., Neuman, Y., & Biezuner, S. (2000). Two wrongs may make a right ... if they argue together! *Cognition and Instruction*, 18(4), 461–494. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1804_2

Slavin, R. E. (2010). Instruction based on cooperative learning. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (Eds.), *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 388–404). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203839089>

Stahl, G. (2007). Meaning making in CSCL: Conditions and preconditions for cognitive processes by groups. In C. A. Chinn, G. Erkens, & S. Puntambekar (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Computer Supported Collaborative Learning (CSCL)* (Vol. 8, pp. 651–660). International Society of the Learning Sciences.

Stahl, G. (2009). *Studying virtual mathematics teams*. Springer. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0228-3>

van Laar, E., van Deursen, A. J., van Dijk, J. A., & de Haan, J. (2017). The relation between 21st-century skills and digital skills: A systematic literature review. *Computers in Human Behavior*, 72, 577–588. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.03.010>

Wood, T. (2002). What does it mean to teach mathematics differently? In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch, & M. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics education in the south pacific* (pp. 350–357). MERGA Incorporated.

נספח מספר 1 - דוגמה לבעיה שניתנה במבחן־קדם (pre-test) ובמבחן־אחר (post-test)

דוגמה לבעיה שניתנה לפתרון פרטני. בעיה זו המכונה "בעיית הלוקרים" שניתנה במבחן־קדם, נלקחה מספרו של שונפלד (Schoenfeld, 1985), ובאמצעות חיברתי את "בעיית הנורות" שניתנה במבחן־אחר. השאלות בשני המבחנים האישיים (post + pre) היו זהות, אם כי הוצגו בסיפור מסגרת אחר ועם נתונים מספריים אחרים.

בעיית הלוקרים	בעיית הנורות
בתיכון העירוני לומדים 396 תלמידים, ולכל תלמיד יש לוקר. הלוקרים ניצבים בשורה ארוכה לאורך המסדרון.  בבוקר הראשון לפתיחת שנת הלימודים מקיים המנהל מין טקס משונה שכזה: התלמיד הראשון פותח את דלתות כל הלוקרים. התלמיד השני סוגר כל לוקר שני, כלומר את הלוקר השני, הרביעי, השישי וכן הלאה. התלמיד השלישי עובר על כל הלוקרים המתחלקים בשלוש, כלומר השלישי, השישי, התשיעי וכן הלאה, אם הלוקר פתוח הוא סוגר אותו, ואם הוא סגור אז הוא פותח אותו. התלמיד הרביעי עובר על כל הלוקרים המתחלקים ב-4, וכמו השלישי מחליף את המצב שלהם – מפתוח לסגור ומסגור לפתוח. וכך גם התלמיד החמישי, השישי וכן הלאה עד שכל התלמידים יסיימו. א. שערו האם בסיום הטקס הלוקר האחרון, לוקר מס' 396 יהיה פתוח או סגור? נמקו והסבירו את טענתכם. ב. האם תוכלו להכליל איזה לוקרים יהיו פתוחים בסוף הטקס ואיזה סגורים? נמקו והסבירו את טענתכם. ג. הסבירו כיצד הגעתם אל הפתרון.	לקראת יום העצמאות קושטו רחובות העיר בשורה ארוכה של 600 נורות מאירות, מרהיבות וצבעוניות. הנורות נדלקות ונכבות בסדר הזה:  בשנייה הראשונה: נדלקות כל הנורות. בשנייה השנייה: נכבית כל נורה שנייה, כלומר הנורה השנייה, הרביעית, השישית וכן הלאה. בשנייה השלישית: כל נורה שלישית משנה את מצבה (כלומר הנורה השלישית, השישית, התשיעית וכן הלאה). אם היא דלוקה היא נכבית, ואם היא כבויה היא נדלקת. בשנייה הרביעית: כל נורה רביעית משנה את מצבה. נורה דלוקה – נכבית, ונורה כבויה – נדלקת. וכך גם בכל השניות שאחר כך במשך 10 דקות (600 שניות). א. שערו האם בסיום 10 הדקות הנורה האחרונה, נורה מס' 600, תהיה דלוקה או כבויה? נמקו והסבירו את תשובתכם. ב. האם תוכלו להכליל איזה נורות יהיו דלוקות ואיזה מכובות בתום עשר הדקות? נמקו והסבירו את טענתכם. ג. הסבירו כיצד הגעתם אל הפתרון.

בעיה זו בדומה לשאלות האחרות כוללת השערה, חקירה, הכללה, הנמקה ורפלקציה. בסעיף א' התלמידים נדרשים לשער האם לוקר מס' 396 יהיה פתוח או סגור. בסעיף ב' ישנה חקירה שמביאה לידי הכללה של הלוקרים שיישארו פתוחים או סגורים בסוף התהליך. בסעיף ג' ישנה רפלקציה על התהליך שהביא לידי פתרון.