

מדור חדשות מתמטיות

פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר



חברת סגל בטכניון משנת 1975. כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הייתה מורה למתמטיקה במשרה מלאה 12 שנה ובתוך כך נשלחה מטעם הפיקוח לאוניברסיטת קולומביה בניו יורק כדי להביא לישראל את "תוכנית קולומביה". הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים "חשבון פשוט" שעליה קיבלה הטלוויזיה החינוכית פרסים בין-לאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר. הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועמדה בראשו כ-35 שנה. מאז צאתה לגמלאות היא מתמסרת לפיתוח הבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהמשך פיתוח אתר "רמזור למורה".

לאחרונה פיתחה עבור "קמפוס 10" קורס מוק בשם "מתמטיקה - המלכה והמשרתת של ההווה האנושית" עם צוות מט"ח.

כיום היא היועצת המדעית לצוות ההקמה של מוזיאון למתמטיקה בעיר תל אביב.

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות מתווספים בכל שנה למעלה מ-125,000 פריטים המתפרסמים בכ-650 כתבי עת מתמטיים למאגר המידע הבין-לאומי המנוהל בידי האגודה האמריקאית למתמטיקה MathSciNet, AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info. רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה המגוונים. מדור החדשות בגיליון זה מתמקד בחדשה משנת 2020 על פתרון בעיה בתורת הקשרים שהעלה המתמטיקאי הנודע ג'ון קונוויי (1937–2020) בשנות השבעים של המאה העשרים.



ג'ון הורטון קונוויי (1937–2020)
John Horton Conway (2025)

על בעיית הקשר של ג'ון קונוויי האגדי ופתרונה

תורת הקשרים (knot theory) היא תחום יחסית צעיר במתמטיקה. אומנם כבר בתחילת המאה השמונה-עשרה החל גאוס לעסוק באופן מתמטי בקשרים, אבל תורת הקשרים קיבלה תנופת פיתוח של ממש רק במאה העשרים והתחום חי ותוסס וממשיך להעסיק כיום מתמטיקאים שהתברכו בראייה מרחבית, יכולת אנליטית וכושר הכללה. אחד הבולטים שבהם הוא ג'ון קונוויי.

ג'ון הורטון קונוויי (John Horton Conway), שנפטר למרבה הצער בשנת 2020 אחרי שחלה בקורונה, היה מגדולי המתמטיקאים של זמננו. הוא נודע ביצירותיו, בפוריותו ובהרצאותיו הסוחפות. קונוויי, שידע מילדות שהוא רוצה להיות מתמטיקאי, אתגר את עצמו ואת הקהילייה המתמטית חדשות לבקרים. הוא תרם מגוון עשיר ביותר של חידושים למתמטיקה בתחומים רבים. כבר בהיותו בשנות העשרה לחייו התעניין קונוויי בתורת הקשרים. כדי למנוע אי-הבנות, נבהיר מלכתחילה כי תורת הקשרים עוסקת רק בקשרים שבהם שני הקצוות של החבל שהם עשויים ממנו אינם נשארים פתוחים, אלא מחוברים זה לזה וכך הקשר מקובע. צומת (crossing) בתורת הקשרים הוא מקום שבו החבל מצטלב עם עצמו במרחב כך שההיטל של הקשר על מישור הוא קו שחותך את עצמו בנקודת הצומת.

אחת הבעיות בתורת הקשרים עוסקת בקשר מיוחד שגילה קונוויי, קשר בעל אחד-עשר צמתים (איור 1) אשר לימים קיבל את השם קשר קונוויי. הבעיה היא האם קשר קונוויי הוא משהו שנקרא 'פרוסה' (Slice), מושג חשוב בתורת הקשרים שנגיע אליו בהמשך.²

* תודתי לד"ר גדי אלכסנדרוביץ, לד"ר בועז זילברמן, לד"ר אלון עמית ולקוראים אלמוניים אחרים שסייעו לי מאוד בהערותיהם הבונות בכתובת המדור הזה.

1. מבחינה לשונית עשויה להתעורר כאן אי-הבנה. משום מה בתורת הקשרים מקובל להשתמש בשמות עצם כתארים למשל אומרים "קשר פרוסה" ולא "קשר פרוסתי". צריך לקבל את זה ולהתרגל לכך.

במשך 50 שנה בערך מתמטיקאים חזרו אל בעיית הקשר של קונוויי שוב ושוב מבלי למצוא לה פתרון. היא התפרסמה בקרב הקהילייה המתמטית עד כדי כך שהקשר מעטר את השער הדרומי במכון אייזק ניוטון למדעי המתמטיקה של אוניברסיטת קיימברידג', שבו בילה קונוויי את המחצית הראשונה של חייו המקצועיים לפני שעבר לאוניברסיטת פרינסטון שבארה"ב.

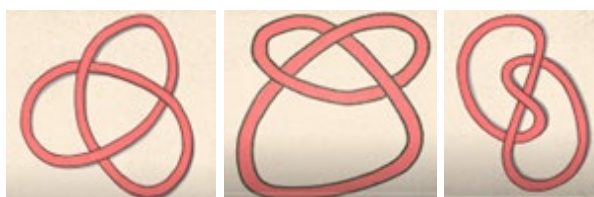
מכל מאות הקשרים הידועים שיש להם לא יותר מ-12 צמתים, מתמטיקאים הצליחו להשיב על השאלה האם הקשר הוא 'פרוסה' (מושג שנבהיר בהמשך, כאמור) לגבי כל הקשרים חוץ מאחד: קשר קונוויי. ואז בשנת 2018 סטודנטית צעירה למתמטיקה באוניברסיטת טקסס שבאוסטין, ששמה ליסה פיקרילו, שמעה על הבעיה בהרצאתה של שלי הרווי (Shelly Harvey), מתמטיקאית מאוניברסיטת רייס, בכנס מתמטי על טופולוגיה וגאומטריה בממדים נמוכים. בדבריה על האתגרים שתורת הקשרים מציבה לפני החוקרים, הזכירה המרצה את קשר קונוויי וציינה שעדיין לא ידוע אם הקשר הזה, בעל אחד-עשר הצמתים, הוא 'פרוסה'. ליסה השתוממה על כך, ואחרי הכנס, בשעות הערב כשהתפתה מעיסוקיה, ניסתה לברר לעצמה מה קשה כל כך בפתרון הבעיה. כעבור שבוע היא פיצחה את הקושי והגיעה להוכחה שהתשובה

נמצא ראוי לפרסום וראה אור בשנת 2020 (Piccirillo, 2020). הפרסום הזהים את הקהילייה המתמטית וזיכה את ליסה פיקירילו בהזמנות להציג את עבודתה בטובות שבאוניברסיטאות, ועם סיום הכשרתה – במינוי לארבע שנים בסגל האקדמי של המוסד האקדמי היוקרתי MIT. כיום ליסה פיקירילו היא פרופסור באוניברסיטת האם שלה באוסטין, טקסס. בדף הבית שלה היא ממליצה על סרטון שמסביר את הבעיה בשפה פשוטה ובליויי אנימציות רבות (Mickaël Launay (Micmaths), 2020).

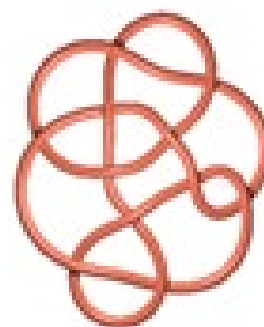
על תורת הקשרים

אנחנו קושרים את שרוכי הנעליים, את מכנסי הספורט, את הצעיף, את העניבה ואת החגורה. אנו משתמשים בקשרים להידוק של חוט תפירה, להקמת אוהל, לעגינה של סירה במזח, לאריזת חבילה, לאבטחה של מנוף, לחיבור של ערסל לעץ ועוד. אין פלא שמתמטיקאים החלו בשלב מסוים להתעניין בקשרים למיניהם, למיין אותם בשיטות מגוונות ולחקור את תכונותיהם. הם הגבילו מלכתחילה את העיסוק בתורת הקשרים המתמטית לקשרים שאין להם קצוות פתוחים, כך שאחרי הידוק הקצוות אי אפשר לחזור חזרה ולהתיר קשר. על כן כל קשר הוא לולאה סגורה, יציר חד-ממדי, שנמצא במרחב התלת-ממדי. במישור, על דף נייר, מייצגים אותו באמצעות קו או פס צר מאוד שמתפתל ועובר על עצמו מלמעלה או מלמטה עד שהוא נסגר. דוגמאות לייצוגים גרפיים כאלה מופיעות באיורים 1–7.

הייצוג הגרפי של הקשר הטריויאלי הוא מעגל (או עקום פשוט סגור אחר) בדומה לחבל ששני קצותיו מודבקים זה לזה. לכאורה זהו לא קשר של ממש, ולכן הוא נקרא גם אל-קשר (Unknot). ככלל, שני קשרים – גם אם הם נראים מלכתחילה שונים מאוד זה מזה – נחשבים לאותו קשר (ואומרים שהם שקולים) אם אפשר לעוות את האחד כך שיתלכד עם האחר באמצעות מתיחה, או הרפיה, או פיתול בדרך כלשהי של החבל מבלי לגזור או לקרוע אותו ולהדביק מחדש. כך, למשל, באיור 2 מופיעות שלוש הצגות גרפיות של קשרים שנראים שונים זה מזה אבל הם שקולים. בשלושתן מוצג אותו קשר שבשפת היום-יום נקרא קשר פשוט, ובתורת הקשרים מקובל לקרוא לו קשר התלתן (Trefoil). (מומלץ לנסות להראות ששלושת הקשרים המוצגים הם שקולים, כלומר שההצגות הגרפיות מייצגות אותו קשר.)



איור 2: שלוש הצגות גרפיות שונות זו מזו של קשר התלתן (Mickaël Launay (Micmaths), 2020)



איור 1: ייצוג גרפי של קשר קונוויי (Conway knot, 2024)



שער הכניסה למכון למתמטיקה באוניברסיטת קיימברידג' (Klarreich, 2020)



ליסה פיקירילו
Lisa Piccirillo

היא לא. קשר קונוויי הוא לא 'פרוסה' (Klarreich, 2020) ימים אחדים לאחר מכן היא סיפרה על כך בדרך אגב לקמרון גורדון (Cameron Gordon), אחד המתמטיקאים באוניברסיטה, מומחה בתורת הקשרים, והופתעה מתגובתו הנרגשת. גורדון הבהיר לה שההוכחה שלה היא פריצת דרך לפתרון של בעיה שמעסיקה את טובי המוחות בתחום כבר כיוכל שנים. בעידודו היא שלחה את ההוכחה לכתב העת היוקרתי Annals of Mathematics. כמקובל, המאמר שכתבה עבר תהליך קפדני של שיפוט שנמשך כשנתיים. בסופו של דבר הוא

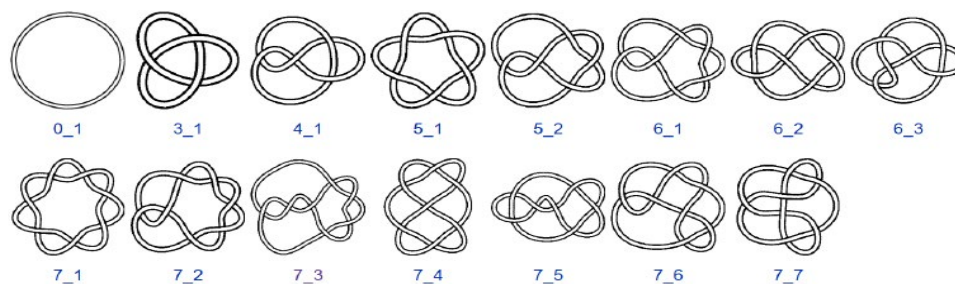
בעלי אחד-עשר צמתים. ברשימה שלו היה קשר אחד שבלט בייחודו. לימים הוא נודע בשם "קשר קונוויי" (איור 1 לעיל). במרשתת נמצאים מאגרי מידע על קשרים רבים. אחד מהם, אתר שנקרא "אטלס הקשרים" (Bar-Natan, n.d.), הוא פרי עמלו של המתמטיקאי דרור בר-נאן מאוניברסיטת טורונטו בקנדה, וממנו לקוח איור 4. מומלץ לבדוק גם את מגוון הקשרים באתר [knot zoo](#) שבו אפשר לחוץ על קשר כדי לראות אותו בתלת-ממד אינטראקטיבי (Scharein, 2020, 2022).

תורת הקשרים העוסקת כאמור בחקירת המבנה והתכונות של הקשרים למיניהם, היא תת-תחום של תורת הטופולוגיה, תחום שזכה לכינוי "גאומטריה של יריעת גומי". זוהי תורה שחוקרת את התכונות של יצירים גאומטריים שאינם משתנות בדפורמציה אלסטית כגון מתיחה או כיווץ. בטופולוגיה שני יצירים גאומטריים שאולי נראים שונים זה מזה, כגון צמיג וספל עם ידית, נחשבים לזהים אם הם מתקבלים זה מזה באמצעות עיוות רציף בלי קריעה או שבירה.³ תורת הקשרים הביאה לידי תובנות חדשות בטופולוגיה עצמה, וגם ליישומים בתחומים לא מתמטיים רבים, בהם מכניקת הקוונטים בפיזיקה וחישוב קוואנטי במדעי המחשב, מבנים מולקולריים בכימיה מודרנית והצופן הגנטי בביוLOGיה.

מה זה אומר שקשר הוא פרוסה?

עד כאן עסקנו בקשרים כיצירים חד-ממדיים הנמצאים במרחב התלת-ממדי המוכר לנו. כאמור הבעיה שליסה פיקרילו פתרה היא האם קשר קונוויי הוא 'פרוסה' (Slice). ההגדרה של קשר כפרוסה דורשת מעבר אל המרחב הארבע-ממדי שהוא הכללה מתמטית של המרחב התלת-ממדי. במרחב הארבע-ממדי יש מיון של הקשרים מהעולם התלת-ממדי לשלושה סוגים: קשרי פרוסה

2. ראו המחשה של השקילות של ספל עם ידית וצמיג בתוך Drew's Campfire, 2022. עוד על מהותה של הטופולוגיה במאמר ידידותי למדי, ראו במאמרו של הרטנט (Hartnett, 2021).



איור 4: קשרים בעלי 0, 3, 4, 5, 6 ו-7 צמתים
(https://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table)

גם קשר דמוי פרפר שעושים בשרוך של נעל הוא קשר כזה כי כשמתירים אותו (אחרי שמחברים את הקצוות ומושכים בנקודת החיבור) הוא נפתח וחוזר להיות הקשר הפשוט, קשר התלתן. את קשר התלתן שהוא בעל שלושה צמתים, אי אפשר להביא לידי התלכדות עם הקשר הטריטויאלי מבלי לפתוח אותו, ולכן הוא שונה מהקשר הטריטויאלי.



איור 3: קשר הספרה 8
(Mickaël Launay (Micmaths), 2020)

באיור 3 מוצג קשר שונה מקשר התלתן, שנקרא בגלל מראהו קשר הספרה 8. יש לו ארבעה צמתים.

אחת הדרכים הפשוטות למיון קשרים היא על פי מספר הצמתים בקשר. לא קשה לראות שקשרים בעלי צומת אחד או שניים שקולים לקשר הטריטויאלי (רמז: להתרתם מפתלים בכיוון ההפוך). הקשר הלא טריטויאלי בעל מספר הצמתים הקטן ביותר הוא קשר התלתן. יש רק קשר אחד בעל שלושה צמתים (קשר התלתן) ורק אחד בעל ארבעה צמתים (קשר הספרה 8). יש רק שני קשרים שונים זה מזה בעלי חמישה צמתים; יש שלושה קשרים שונים זה מזה בעלי שישה צמתים; ושבעה קשרים בעלי שבעה צמתים. כולם מוצגים באיור 4. המומחים בתורת הקשרים פיתחו כלים מתמטיים רבים כדי להוכיח ששני קשרים שונים זה מזה, כי התברר שזוהי סוגיה לגמרי לא פשוטה.

ככל שמספר הצמתים גדל כך עולה מספר הקשרים השונים זה מזה. מספר הקשרים בעלי שמונה צמתים מגיע ל-21. יש 48 קשרים בעלי תשעה צמתים, ויש מעל 160 קשרים בעלי עשרה צמתים. בגיל צעיר הצליח קונוויי להציג רשימה של כל 552 הקשרים

שלב 2: ההטבעה (embedding) של דיסק דו-ממדי בהיפר-כדור ארבע-ממדי

דיסק דו-ממדי שהוא גם החתך לרוחב של כדור תלת-ממדי, הוא משטח שבכל נקודה הוא קשיר, רציף וגם גזיר מכל סדר אפשרי.⁴ כאשר מטביעים דיסק דו-ממדי במרחב התלת-ממדי הוא יכול לקבל העמדה (אוריינטציה) חדשה במרחב ואפשר גם למתוח ולעוות אותו בגמישות (כפי שטבח לש בצק לפיצה ומעיף אותו באוויר), אבל כל עוד לא קורעים או גוזרים אותו הוא יישאר קשיר, רציף וגזיר בכל נקודה. כאשר דיסק דו-ממדי מוטבע במרחב הארבע-ממדי, מתווספת עוד דרגת חופש לעשות בו שינויים ובלבד שהעיוות לא יכלול קריעה או הדבקה או חיתוך עצמי של המשטח. מתוך כך עשוי להתקבל במרחב הארבע-ממדי משטח שונה לבלי הכר שהוא עדיין דו-ממדי, קשיר ורציף, אבל לא בהכרח גזיר (מסדר כלשהו) בכל נקודה. עשויות להיות בו פינות דוקרניות, קימוטים חדים ומעברים פתאומיים מאזור לאזור.⁵

3. להלן הסבר אינטואיטיבי לשלושת המושגים קשירות, רציפות וגזירות: תחום דו-ממדי הוא **קשיר** אם אפשר לכווץ באופן רציף כל לולאה סגורה בתחום לנקודה אחת, כלומר אין בתחום "חורים"; תחום דו-ממדי הוא **רציף** אם אפשר לשרטט עליו כל קו במשיכת קולמוס אחת מבלי להרים את העיפרון מהנייר. ערכי הפונקציה המתארת אותו בנקודות בסביבה של כל נקודה, שואפים לערכי הנקודה; תחום דו-ממדי הוא **גזיר** אם אין בו חודים. כל השינויים במשטח הם הדרגתיים ומתונים וכאלה הם גם השינויים של השינויים, והשינויים של השינויים של השינויים.

4. הבהרה לעניין דרגות החופש בממדים למיניהם: מכל נקודה שהיא אפס-ממדית במרחב החד-ממדי, כלומר מנקודה על פני קו כלשהו (פתוח או סגור כגון נקודה על מעגל, או על פרבולה) אפשר להתנועע רק קדימה או אחורה. בכל נקודה אי אפשר לזוז ימינה-שמאלה מבלי לחרוג מהקו. במרחב הדו-ממדי מכל נקודה על פני משטח (פתוח או סגור, כגון נקודה על פני כדור או בתוך עיגול) אפשר להתנועע לא רק קדימה-אחורה, אלא גם ימינה-שמאלה והתנועות הן בלתי תלויות זו בזו, כלומר אפשר מכל נקודה בממד האחד להתנועע בממד האחר מבלי לשנות את המיקום בממד האחד. בכל נקודה אי אפשר לנוע מעלה-מטה מבלי לחרוג מהמשטח. אם נחשוב למשל על נמלה שמתנועעת על פני תפוח – אין לה כל יכולת להתעופף לגובה או לחזור פנימה. במרחב התלת-ממדי, כלומר בתוך כדור או בחלל הפתוח המוכר לנו, יש חופש תנועה בשלושה כיוונים בלתי תלויים: קדימה-אחורה, ימינה-שמאלה או מעלה-מטה. כדי לחרוג מהחלל התלת-ממדי צריך לנוע בכיוון רביעי שאינו תלוי בשלושת אלה. במרחב הארבע-ממדי מתאפשרת תנועה בלתי תלויה בכיוון נוסף – רביעי. את זה כמובן קשה לנו, אלה החיים בעולם תלת-ממדי, להעלות על דעתנו, בדומה לכך שנמלה שעולמה הוא דו-ממדי ומתקשה להעלות על דעתה שיש משהו מעליה או מתחתיה. הפיזיקאים מגייסים לטובת הדמיון את הזמן כממד רביעי בלתי תלוי בשלושת הממדים הנזכרים.

חלקים (אחד מהם הוא הקשר הטריטוריאלי), קשרי פרוסה שאינם חלקים אבל הם טופולוגיים (כזה הוא קשר קונוויי) וקשרים שהם לא פרוסה חלקה ולא פרוסה טופולוגית. בסעיף זה נתחיל בהצגת ההגדרה המתמטית הפורמלית של המושגים האלה ומייד לאחר מכן נסביר ונבהיר את הדברים. בסעיף הבא נעבור אל הרעיון המרכזי בהוכחה של ליסה פיקירילו (אחרי ההגדרה שלהלן אפשר לדלג על ההבהרה ולעבור אל הסעיף הבא).

ובכן, על קשר מתמטי אומרים שהוא **פרוסה**, חלקה או טופולוגית, אם ורק אם הוא השפה (boundary) של דיסק דו-ממדי המוטבע (embedded) בתוך כדור ארבע-ממדי באופן חלק או טופולוגי, בהתאמה (Slice knot, 2024).

ננסה להבהיר את ההגדרה הזאת בשלושה שלבים ולעמוד על ההבחנה בין קשר שהוא **פרוסה חלקה** לקשר שהוא **פרוסה טופולוגית**:

שלב 1: מהו כדור ארבע-ממדי?

כידוע, במרחב הדו-ממדי, היינו במישור, העיגול (disk) הוא אוסף כל הנקודות ורק הנקודות שהמרחק של כל אחת מהן מנקודה קבועה במרחב זה, הנקראת המרכז, קטן או שווה לגודל קבוע R הנקרא רדיוס. את העיגול שהוא יציר דו-ממדי, תוחם קו סגור – המעגל (circle) שהוא יציר חד-ממדי. (בנקודות על המעגל מתקיים שוויון ל- R של המרחק שלהן מהמרכז.) את הנקודה במרחב הדו-ממדי מייצג זוג סדור של מספרים ממשיים. יש לה שתי קואורדינטות.

במרחב התלת-ממדי הכדור (ball) הוא אוסף כל הנקודות ורק הנקודות שהמרחק של כל אחת מהן מנקודה קבועה במרחב זה (המרכז) קטן או שווה לגודל קבוע R (הרדיוס). את הכדור שהוא יציר תלת-ממדי, תוחם משטח סגור דו-ממדי – פני הכדור (sphere). (בנקודות על פני הכדור מתקיים שוויון ל- R של המרחק שלהן מהמרכז.) את הנקודה במרחב התלת-ממדי מייצגת שלישייה סדורה של מספרים ממשיים. יש לה שלוש קואורדינטות.

בדומה, במרחב הארבע-ממדי ה"היפר-כדור" (4-ball) מוגדר כאוסף של כל הנקודות ורק הנקודות שהמרחק של כל אחת מהן מנקודה קבועה במרחב זה (המרכז) קטן או שווה לגודל קבוע R (הרדיוס). פני ההיפר-כדור הם משטח סגור תלת-ממדי. (בנקודות על פני ההיפר-כדור מתקיים שוויון ל- R של המרחק שלהן מהמרכז.) את הנקודה במרחב הארבע-ממדי מייצגת רביעייה סדורה של מספרים ממשיים. יש לה ארבע קואורדינטות. קשה מאוד לדמין את ההיפר-כדור או לייצג אותו באיור דו-ממדי



איור 5: הטבעה בעולם התלת-ממדי של מעגל מהעולם הדו-ממדי (Amit Alon, 2025)

אותו (שהוא חד-ממדי). לעומת זאת בעולם התלת-ממדי את אותה נקודה בתוך אותו עיגול אפשר להרים או להוריד מהמישור אל המרחב וכך להוציא אותה אל מחוץ לגבולות המעגל מבלי לפגוע בשלמותו. בדומה אם לוקחים מעגל מהעולם הדו-ממדי ומטביעים אותו בעולם התלת-ממדי, יכולים להתקבל ממנו קשרים כגון זה המופיע באיור 5. קשרים הם כאמור אובייקטים חד-ממדיים במרחב התלת-ממדי שבו אי אפשר להתיר אותם מבלי לגזור ולהדביק מחדש. אבל אם רואים בהם אובייקטים במרחב הארבע-ממדי, אפשר אולי "להתיר" אחדים מהם מבלי להצטרך לגזירה והדבקה מחדש. כאשר מטביעים דיסק דו-ממדי בהיפר-כדור במרחב הארבע-ממדי יכול להתקבל דיסק שטוח שאפשר להקיף אותו בלולאה מעגלית כלומר באל-קשר, ועשוי גם להתקבל דיסק מעוות למדי שאי אפשר להקיף אותו באל-קשר, אבל בכל זאת אולי אפשר להקיף אותו בקשר אחר, לא טריוויאלי, או בקשר שבו שזורים קשרי לולאה אחדים או אף בקשרים סבוכים הרבה יותר. קשר שהוא פרוסה, חלקה או טופולוגית, הוא במובן מסוים "בר התרה" בממד הרביעי. "בר התרה" במובן הזה: אפשר לראות בהטבעה סוג של "טרנספורמציה קסם" שנעשית במעבר אל העולם הארבע-ממדי. היא לוקחת דיסק דו-ממדי עם קו הגבול שלו ומעוותת אותו עיוות "פרוע" (אבל בלי לקרוע או להדביק חלקים זה לזה) עד שקו הגבול הופך לקשר. אנחנו לא יכולים לראות איך העיוות הזה מתרחש מכיוון שזה קורה בזכות דרגת החופש הנוספת שיש בממד הרביעי, אבל אנחנו יכולים לראות את התוצאה: את הקשר שהוא קו-לולאה בעולם התלת-ממדי, ובהיותו הגבול של דיסק לאחר שהוטבע בהיפר-כדור במרחב הארבע-ממדי, הוא נמצא בתוך פרוסה תלת-ממדית (חלקה או טופולוגית) של ההיפר-כדור.

בדרך מתמטית מתארים את הדברים כמובן בעזרת פונקציות רבות משתנים שחייבות להיות רציפות, אבל הן לא בהכרח גזירות מכל סדר בכל נקודה.

מקור המונח פרוסה הוא שבדומה להיותו של הדיסק הדו-ממדי חתך של כדור תלת-ממדי, ההטבעה שלו

מבחינה מתמטית הטבעה של דיסק דו-ממדי במרחב הארבע-ממדי נעשית באמצעות פונקצייה הפיכה שמתאימה אחת לאחת כל נקודה בעלת שתי קואורדינטות על הדיסק הדו-ממדי לנקודה אחת ויחידה, בעלת ארבע קואורדינטות במרחב הארבע-ממדי. התמונה המתקבלת במרחב הארבע-ממדי היא הומיאומורפית⁶ למקור הדו-ממדי. התמונה היא דיסק רציף, אבל לא בהכרח גזיר (פעם אחת או יותר) בכל נקודה. כלומר הדיסק המוטבע הוא משטח בלי חורים או קרעים, שאינו חותך את עצמו, אבל כאמור הוא עלול להיות "לא חלק", אלא מעוות, בעל מהמורות, חודים וקימוטים למיניהם. אם הדיסק המוטבע במרחב הארבע-ממדי הוא משטח שאפשר לתאר אותו באמצעות פונקצייה רציפה וגזירה מכל סדר בכל נקודה, אומרים שההטבעה היא **חלקה**. אם הוא רציף אבל לא גזיר, אומרים שההטבעה היא **טופולוגית**, היא שומרת על "יחסי השכנות" בין כל שתי נקודות, אבל יוצרת משטח בעל שיפועים שהם עצמם משתנים באופן לא רציף.

שלב 3: קשרים כאובייקטים (חד-ממדיים) במרחב הארבע-ממדי

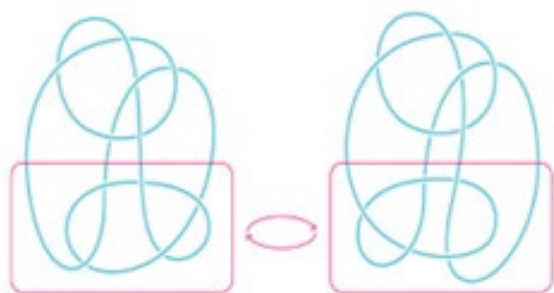
הקשר הטריטוריאלי הוא הקשר היחיד שמקיף דיסק דו-ממדי במרחב התלת-ממדי. ההטבעה הכי פשוטה של דיסק דו-ממדי במרחב הארבע-ממדי היא באמצעות פונקציית הזהות השומרת על הדיסק בלי כל עיוות ושינוי. זוהי הטבעה חלקה כמובן, ועל כן לפי ההגדרה המופיעה לעיל בתחילת סעיף זה, הקשר הטריטוריאלי הוא קשר פרוסה חלק. לגבי כל אחד מהקשרים האחרים, כגון אלה המוצגים באיור 4, אם במרחב הארבע-ממדי קשר שפה (boundary) של דיסק דו-ממדי המוטבע בהטבעה **חלקה** בהיפר-כדור, אומרים עליו שהוא **פרוסה חלקה**. אם במרחב הארבע-ממדי הוא משמש שפה של דיסק דו-ממדי המוטבע בהטבעה **טופולוגית** בהיפר-כדור, אומרים עליו שהוא **פרוסה טופולוגית**, ואם כשהוא מוטבע במרחב הארבע-ממדי הוא לא משמש שם שפה של דיסק דו-ממדי כלשהו, אז הוא לא פרוסה.⁷

לסיכום, נחשוב על מעגל במישור ונקודה בתוך העיגול. אם התנועה מוגבלת למישור הדו-ממדי (ימינה-שמאלה או קדימה-אחורה), אי אפשר להוציא את הנקודה (שהיא אפס-ממדית) מהעיגול מבלי לחזור מבעד למעגל התוחם

אפשר לחשוב על נקודה במרחב התלת-ממדי שמבקרים בה במועדים מסוימים ומתוך כך מקבלים תיאור ארבע-ממדי שלה. המתמטיקאים לא מבחינים הבחנה איכותית בין ממד למשנהו.

5. להרחבה על הומיאומורפיזם ראו **כאן** (בעברית) או **כאן** (באנגלית).

6. כאמור, בתורת הקשרים מקובל להשתמש בשמות עצם כתארים. לא קל לקבל את זה ולהתרגל לכך.



איור 6: קשר קונוויי (משמאל) וקשר קינושיטה-טרסקה (מימין).
האחד מתקבל מהאחר באמצעות חיתוך, היפוך והדבקה מחדש של
החלק הממוסגר (Klarreich, 2020)

מהו הרעיון המרכזי בהוכחה של ליסה פיקירילו?

ההוכחה של ליסה פיקירילו נשענת על תכונה הנקראת העקבה של קשר (Trace of knot). העקבה של קשר היא "טביעת הרגל" שהעקומה של הקשר משאירה כאשר מטביעים את הקשר בהיפר-כדור הארבע-ממדי. קשה לדמיין צורה פיזית של העקבה של קשר. העקבה היא "צורה" שיש לה תיאור מתמטי והיא מסבירה איך הקשר מוטבע ומתארגן במרחב הארבע-ממדי. לשני קשרים שונים זה מזה יכולה להיות אותה עקבה, וידוע שבמקרה כזה יש לשניהם אותו מעמד כפרוסה – שניהם פרוסה חלקה, או ששניהם אינם פרוסה חלקה.

כיוון שכך ליסה פיקירילו מצאה לנכון לנקוט בצעדים הבאים: תחילה לזהות את העקבה של קשר קונוויי, אחרי כן לבנות קשר אחר שיש לו אותה עקבה ולבסוף למצוא דרך לבדוק אם הקשר האחר הוא פרוסה חלקה, דבר שישליך מיידית את התשובה גם על קשר קונוויי "הסרבן". בנייה של קשר בעל עקבה נתונה כשלעצמה אתגר לא קטן, אבל לכך בדיוק פיתחה ליסה פיקירילו מומחיות בעת לימודיה. בשבוע שלאחר הכנס ששמעה בו לראשונה על בעיית הקשר של קונוויי, היא השתעשעה בשרטוט ידני ובמניפולציה של העקבה של קשר קונוויי בחיפושה אחר קשר אחר שיש לו אותה עקבה וניסתה לבדוק באמצעות כלים ידועים אם הקשר האחר הוא פרוסה חלקה או לא. בסופו של דבר היא הצליחה לבנות קשר מתוחכם שכזה (איור 7). היא הפעילה עליו אלגוריתם מוכר שנקרא "שמורת-s של ראסמוסן" (Rasmussen's s-invariant) שהראה שהקשר החדש שבנתה הוא לא פרוסה חלקה. מכאן הדרך הייתה קצרה למסקנה שגם קשר קונוויי לא יכול להיות פרוסה חלקה. כך הצליחה ליסה פיקירילו לעשות דבר שרבים לפניו ניסו לעשות בלא הצלחה במשך כחמישים שנה. בדיעבד מתמטיקאים רבים שואלים את עצמם איך לא חשבו על זה קודם...

במרחב הארבע-ממדי היא חתך תלת-ממדי של כדור ארבע-ממדי. החתך הזה הוא מעין פרוסה והביטוי מושאל מהביטוי פרוסת לחם שמתקבלת לאחר שחותכים בסכין כיכר לחם. לכן על קשר שתוחם דיסק דו-ממדי המוטבע בכדור ארבע-ממדי אומרים שהקשר הוא פרוסה – חלקה או טופולוגית.

תעלומת מעמד הפרוסה של קשר קונוויי

בתחילת שנות השמונים של המאה העשרים התברר שאומנם במרחב הארבע-ממדי כל קשר שהוא פרוסה חלקה הוא גם פרוסה טופולוגית, אבל הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון, לא כל קשר שהוא פרוסה טופולוגית הוא פרוסה חלקה. במילים אחרות, יש קשרים שהם פרוסה טופולוגית, אך אינם פרוסה חלקה. זה מפני שבניגוד לממדים הנמוכים יותר, בהטבעה בממד הרביעי אי אפשר "לגהץ" כל משטח טופולוגי כך שהוא יהפוך למשטח "חלק".

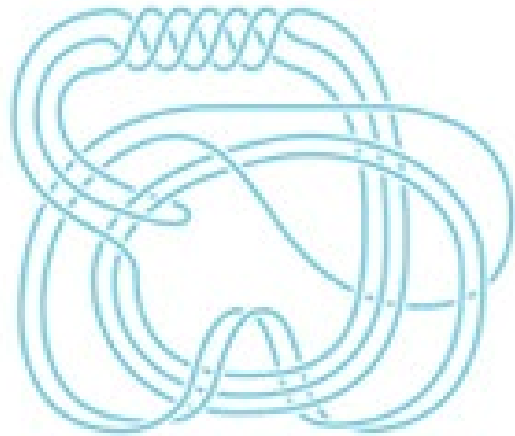
בנוגע לכל הקשרים בעלי שנים-עשר צמתים או פחות, חוץ מקשר קונוויי, הצליחו מתמטיקאים לבדוק אם הם פרוסה טופולוגית או אפילו חלקה. כך למשל קשר התלתן (איור 2) הוא לא פרוסה טופולוגית ולכן כמובן לא פרוסה חלקה. קשר הספרה 8 (איור 3) הוא פרוסה טופולוגית וגם פרוסה חלקה. לגבי קשר קונוויי התברר שהוא פרוסה טופולוגית, אך המתמטיקאים לא הצליחו להגיע להכרעה בשאלה האם הוא פרוסה חלקה. הם חשדו שלא, כי ככל הנראה חסרה לו תכונה חשובה הנקראת "תכונת הסרט" (Ribbon)⁸ שיש בדרך כלל לקשרים שהם פרוסה חלקה. אולם יחד עם זה נמצא קשר דומה מאוד לקשר קונוויי שהוא כן פרוסה חלקה. הוא מתקבל מקשר קונוויי באמצעות חיתוך, שיקוף והדבקה מחדש של מקטע מסוים, כמוסבר באיור 6. את הקשר הזה מצאו שני מתמטיקאים יפניים (Shin'ichi Kinoshita and Hidetaka Terasaka), אבל הם לא הצליחו להבחין בכך שעל אף היותו דומה מאוד לקשר קונוויי ובעל תכונות משותפות רבות עימו, דווקא בעניין היותם פרוסה חלקה שני הקשרים שונים לגמרי זה מזה.

קשר קונוויי תעתע במתמטיקאים למעלה מחמישים שנה בהיותו "עמיד" בפני כל מבחן שמכריע בשאלת היותו של קשר כלשהו שהוא פרוסה טופולוגית, גם פרוסה חלקה. כך נשאר קשר קונוויי בגדר תעלומה שנים רבות, עד שליסה פיקירילו הוכיחה שהוא לא פרוסה חלקה.

7. כפי שכבר הזכרנו בתורת הקשרים מקובל להשתמש בשמות עצם כתארים. פרטים נוספים על קשרים שהם סרטים אפשר למצוא כאן.

רשימת מקורות

- Alon, A. (2017). *What do we intuitively mean by embedding a manifold into a higher-dimensional space?* <https://www.quora.com/What-do-we-intuitively-mean-by-embedding-a-manifold-into-a-higher-dimensional-space-Can-you-give-some-examples>
- Bar-Natan, D. (n.d.). *The Knot Atlas*. <https://katlas.org/> Homepage: <https://www.math.toronto.edu/~drorbn/>
- Conway knot. (2024, November 4). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Conway_knot&oldid=1255387611
- Drew's Campfire. (2022, August 3). *Intro to topology – Turning a mug into a doughnut* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=IXAwhW4gP_c
- Hartnett, K. (2021, September 28). In topology, when are two shapes the same? *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/in-topology-when-are-two-shapes-the-same-20210928/>
- John Horton Conway. (2025, January 22). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Horton_Conway&oldid=1271093266
- Klarreich, E. (2020, May 21). Graduate student solves decades-old conway knot problem. *Quanta Magazine*. <https://www.quantamagazine.org/graduate-student-solves-decades-old-conway-knot-problem-20200519/>
- Livingston, C., & Moore, A. H. (n.d.). *KnotInfo: Table of knot invariants*. Retrieved March 3, 2025, from <https://knotinfo.math.indiana.edu>
- Mickaël Launay (Micmaths) (2020, October 17). *Une énigme de 50 ans résolue: le nœud de Conway n'est pas bordant* – *Micmaths* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=gz-MN3s-jcQ>
- Piccirillo, L. (2020). The Conway knot is not slice. *Annals of Mathematics*, 191(2), 581–591. <https://doi.org/10.4007/annals.2020.191.2.5>
- Scharein, R. G. (2020). *A knot zoo*. Retrieved March 31, 2025, from <https://knotplot.com/zoo>
- Scharein, R. G. (2022). *KnotPlot*. Retrieved March 31, 2025, from <https://knotplot.com/index.html>
- Slice knot. (2024, January 16). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Slice_knot&oldid=1196255338



איור 7: הקשר של ליסה פיקירילו. יש לו אותה עקבה שיש לקשר קונוויי (Klarreich, 2020)