

הבנות שגויות של סימני היחס בקרב פרחי הוראה לקדם יסודי ולכיתות א' וב'

ד"ר דינה חסידוב

בעלת תואר דוקטור Ph.D. בחינוך מתמטי. עוסקת שנים רבות בחינוך מתמטי ובמחקר. צברה ניסיון בישראל ובפעילות בין-לאומית. חוקרת תהליכי חשיבה בלמידת מתמטיקה בגילים מגוונים. ד"ר חסידוב יוזמת וחוקרת תחומים חדשים מעניינים ומאתגרים. מחקריה מתפרסמים בכתבי עת ובספרים יוקרתיים ומאפשרים שותפויות בין-לאומיות בין חוקרים. חברת סגל בחוג למתמטיקה, תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך בחולון.



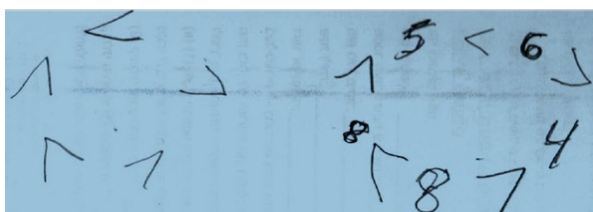
ד"ר בת שבע אילני

עוסקת בייעוץ מתמטי, פיתוח חומרי למידה ופרסום מאמרים וספרים בנושאים מתמטיים מגוונים. עובדת עם המכללה האקדמית חמדת והאוניברסיטה העברית בירושלים. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, ייעוץ ועריכה של חומרים וספרים המיועדים לגנים, לבתי ספר, להכשרת מורים למתמטיקה בנושאים מגוונים. בין הספרים: פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך - תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; שימור ושינוי - תובנות אלגבריות בעולם המספרים.



הבנות שגויות של סימני היחס בקרב פרחי הוראה לקדם ייסודי ולכיתות א' וב'

דינה חסידוב ובת שבע אילני



איור 1

דוגמה זו מראה על צורך חשוב לבחון כיצד מורים לעתיד ואנשי חינוך בגיל הרך מבינים את משמעותם של הסימנים המתמטיים, טרם שילובם בהוראה. הבנתם של מורים את הסימנים כיחסים מתמטיים כמותיים ומספריים, ולא כייצוגים חזותיים בלבד, היא תנאי מקדים להוראה מדויקת ולפיתוח חשיבה מתמטית תקינה בקרב תלמידים צעירים.

סקירת ספרות

השפה המתמטית שונה מן השפה הטבעית, היא מורכבת מסימבולים, מושגים, הגדרות ומשפטים שצריכים ללמוד במכוון והיא לא מתפתחת בטבעיות כמו שפת האם. בעת רכישת השפה המתמטית הילד לומד להכיר את המספרים בהיותם אובייקטים בעלי תכונות, להבחין בין הדומה והשונה ביניהם, ולראות בהם סמלים שבאמצעותם אפשר לחשב חישובים ולעשות פעולות מגוונות (מרגולין ואילני, 2007; Ilany & Margolin, 2010). היברט (Hiebert, 1988) מדגיש את החשיבות שיש לקשר בין קיום תהליכים קוגניטיביים מתקדמים להבנת סמלים מתמטיים כתובים. גישתו של היברט (Hiebert, 1988) מסתמכת בין השאר גם על תאוריות של פסיכולוגיה של המתמטיקה.

המגמה העולמית כיום היא להציג לילדים מתמטיקה בדרך "פורמלית" כבר בגיל צעיר. בעיקרו של דבר, ילדים עוסקים במתמטיקה יום-יומית כבר מהלידה (Charalambous et al., 2009).

העיסוק במתמטיקה בגיל הרך מסייע בפיתוח החשיבה והיכולת הקוגניטיבית של הילד, בפיתוח חשיבה בכלל ובחשיבה מתמטית בפרט (Baroody, 2000). במחקרים נמצא כי הכמות והאיכות של העיסוק במתמטיקה בגן יכולות לנבא את הצלחת הילד במתמטיקה בבית הספר היסודי (תירוש ואחרים, 2024; Clements & Sarama, 2006, 2015; Hassidov & Ilany, 2022).

תקציר

במאמר מופיע חלק ממחקר שנעשה בקרב 158 פרחי הוראה (קדם-ייסודי וכיתות א' וב'), גננות ומורות לכיתות א' וב'. מטרת המחקר היו לבדוק כיצד משתמשים פרחי הוראה (וכן גננות ומורות) בסימני היחס ($=$, $<$, $>$) בשלושה היבטים: כמותי, מספרי וגרפי. במחקר נעשה שילוב בין מתודה כמותית ובין מתודה איכותנית.

מהמחקר עולה כי הנבדקים משתמשים בסימני יחס מתמטיים בדרכים מגוונות ולא תמיד נכונות, לעיתים בנושא כמות, לעיתים בנושא צורה או גודל של התמונות ולעיתים בנושא גרפי. הנבדקים לא דנו במשמעות המתמטית של סימני היחס. ראוי ללמוד ממחקר זה שהנבדקים לא מבינים כראוי את המשמעות ואת דרך השימוש בסימבולים המתמטיים.

מילות מפתח: הבנות שגויות בקרב פרחי הוראה; מתמטיקה לגיל רך; סימני יחס; סימבולים מתמטיים.

מבוא

בפעילויות חינוכיות רבות בגיל הרך נמצאות משימות שבהן ילדים מתבקשים להציב סימנים מתמטיים, כגון $<$, $>$, $=$ בין אובייקטים שאינם מספריים – כדוגמת ציורים, דמויות או פריטים מוחשיים.

לעיתים תרגולים מסוג זה גורמים לילדים לשייך את משמעות הסימנים גם למספרים בדרך שגויה. כך, למשל, ילד בכיתה א' כתב: $4 > 6$ בנימוק כי "הגודל והעובי של ארבעה גדולים יותר מזה של שש". אמירה זו מראה על פרשנות חזותית ולא פרשנות כמותית של אובייקטים מתמטיים.

בעת תצפית שנעשתה באחד מגני הילדים, נתנה הגננת לילדים משימה. היא הציגה לילדים מספרים מגוונים במידות משתנות. לדוגמה: הספרה 8 קטנה ועבה, וספרה 8 נוספת הייתה כתובה בקו דק 8 ובגופן גדול. הילדים התבקשו לסדר את המספרים בין סימנים מתמטיים שהוצבו במעגל. הילדים הציבו את המספרים לא רק על פי הכמות שמייצג המספר, אלא לעיתים סידרו את המספרים על פי גודלם הגרפי (ראו איור 1). הגננת טענה כי לדעתה התשובה שהתקבלה הייתה נכונה וסיפרה כי היא נוהגת להשתמש במשימה זו שנים רבות.

(Bialystok, 1992). חשיבה סימבולית היא יכולת מתפתחת, והיא אחד מביטויי התפתחות החשיבה (Thomas et al., 1999). התפתחות חשיבה סימבולית מאופיינת בשינויים החלים במבנה של הייצוג המנטלי. ילדים צעירים מאמינים כי הייצוג הסימבולי משקף את אופיו של האובייקט שהוא מייצג אותו (Bialystok, 1992). ילדים יכולים לכתוב שמות של עצמים גדולים באמצעות אותיות גדולות ולייצג קבוצות של עצמים רבים באמצעות חזרה על אותיות או מילים (Thomas et al., 1999).

נמירובסקי ומונק (Nemirovsky & Monk, 2000) טוענים שילדים צעירים אינם יכולים להבדיל בין הסמל ובין המושא שהסמל מייצג אותו. המלמדים בגיל הרך משתמשים לעיתים בידע ובניסיון שהם מביאים איתם מחיי היום-יום ולא תמיד הם נותנים את המשמעות הנכונה לסמל. פירוש לא נכון של סמל והוראתו לילדים עלולים לגרום לשימוש והבנה לא נכונים של המושגים ולכן ישנה חשיבות ללמד נכון את השימוש בסמלים החל מגיל הגן. אחד התחומים שנעשה שימוש במערכת הסמלים קשור למספרים, ומושג השוויון הוא חלק ממנו. מושג השוויון הוא מושג לא קל להבנה בכלל ואצל ילדים בפרט. מושג זה משמש גם יחס וגם אופרציה. שימוש לא נכון בסימן כלשהו עם ילדים מקשה עוד יותר על ההבנה של המושג, וגורם להם לייצר הבנה שגויה שעלולה להפריע בעתיד.

ילדים צעירים יכולים לזהות סימנים ולכתוב אותם. יכולת זו אינה מבטאת בהכרח הבנה של משמעות מתמטית של אותם סימנים. היכולת לייחס לסימנים את המשמעות שהם מייצגים אותה, היא יכולת מתפתחת. לפי תוכנית הלימודים היכולת הראשונה היא להשתמש במושגים "גדול, קטן, שווה" (ולא בסמלים) ולזהות הבדל בין עצמים. מאחר שהגננות מלמדות את הסמלים נוסף על מושגים כבר בגן הילדים, חשוב לבדוק זאת ולעשות זאת נכון.

התפתחות תהליך ההסמלה של סמלי המספרים נעשית בשתי רמות הבנה אלה: הרמה הראשונה היא ההכרה כי מערכת הייצוג של המספרים היא מערכת של סמלים שתפקידה להביע משמעות מסוימת. חשוב לדעת כי משמעותם של הסמלים אינה יכולה להשתנות בשל גורמים אחרים (כגון שינוי גודל או כל ממד אחר) אלא בשינוי הסמלים עצמם. הרמה השנייה היא הכרת מערכת החוקים והכללים שבאמצעותם המספרים מיוצגים (Bialystok, 2000; Strawn, 2019).

במחקרים רבים נבדק כיצד תלמידים בגילים שונים זה מזהים את סימן השוויון. מתוך ממצאי מחקרים

כיום הגננות ומורות המלמדות מתמטיקה בגיל הרך נדרשות להיות בעלות ידע מספק בהוראת המתמטיקה הן בגני ילדים והן בכיתות א' וב'. המגמה הכלל-עולמית מדגישה כי יש לפתח את הגישה למתמטיקה כבר מהגיל הרך, ולכן חשוב שהסגל החינוכי יהיה מוכשר ומיומן בתחום זה (מאליגן, 2023).

מאמר זה מציג מחקר שבוחן את הבנת המושגים $<$, $=$, $>$ המהווים חלק מחשיבה סימבולית במתמטיקה. כדי להשוות בין כמויות מסוימות, נעשה שימוש ביחסי השוואה ובאסטרטגיות השוואה המסתמכות על מאפייני היחסים האלה, כלומר על הבנה מדויקת של משמעות הסימבולים והקשרים ביניהם (סיניצקי ואילני, 2014).

בין שני גדלים מתקיים תמיד מצב אחד ויחיד מתוך שלוש אפשרויות: (א) שוויון בין שני הגדלים; (ב) הגודל הראשון גדול מהשני; (ג) הגודל הראשון קטן מהשני.

אם נציג את המספרים הממשיים על ציר המספרים, שני מספרים יהיו שווים כאשר הנקודות המייצגות אותם יתלכדו על הציר. לעומת זאת אם מספר b גדול ממספר a , הנקודה המייצגת את b על ציר המספרים תהיה מימין לנקודה המייצגת את a . כאן אפשר לומר שהמספר a קטן מהמספר b . כדי להבין את האסטרטגיות להשוואה בין שני גדלים חשוב להזכיר את תכונות יחסי ההשוואה. שוויון הוא יחס שקילות (פרנקל, 1953, עמ' 16–22) שיש בו שלוש תכונות שמאפיינות כל יחס שקילות:

- רפלקסיביות: $a = a$ (כל גודל שווה לעצמו);
- טרנזיטיביות: $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים זה לזה);
- סימטריות: $a = b \Leftrightarrow b = a$.

היחס "גדול מ" ($<$) וגם "קטן מ" ($>$) הם קדם-סדר (pre-order) (פרנקל, 1953) המקיימים את שתי התכונות האלה:

- טרנזיטיביות (כלל המעבר): $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (ובדומה $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ – אם גודל אחד גדול מגודל אחר, והגודל האחר גדול מגודל שלישי, אזי הגודל הראשון גדול מהגודל השלישי);
- אין זוג גדלים המקיים בו בזמן את שני היחסים האלה: $a > b$ וגם $b > a$.

התפתחות חשיבה סימבולית אצל ילדים מאפשרת להם לעסוק בסימנים אלה. כאשר עוסקים בחשיבה סימבולית עוסקים ביכולת לתפוס סמל כמייצג משמעות של אובייקט כלשהו או רעיון, מבלי שיהיה ביטוי בסמל עצמו



הנושא, באופן שבו הם תופסים את הסימנים <, >, = ומשתמשים בהם?

4. מהם ההבדלים בין פרחי הוראה לכיתות א' וב' שלמדו את הנושא לעומת פרחי הוראה לכיתות א' וב' שלא למדו את הנושא, באופן שבו הם תופסים את הסימנים <, >, = ומשתמשים בהם?

מתודולוגיה

מאמר זה מציג חלק של מחקר רחב יותר שבו נבדקה התפיסה של סימנים מתמטיים (<, >, =). המחקר הרחב עוסק בארבע קטגוריות:

1. **קטגוריית המספרים** (שאלות 7, 9, 10 ו-16). (המאמר הנוכחי עוסק בקטגוריה זו, השאלות מופיעות בטבלה 9).
2. **קטגוריית "הכמות"** (שאלות 1, 2, 3 ו-17) (Ilany & Hassidov, 2018). (המאמר הנוכחי עוסק בקטגוריה זו, השאלות מופיעות בטבלה 1).
3. **קטגוריית "הכמות" והמספרים** (שאלות 11, 12, 13, 14 ו-18).
4. **קטגוריית "הנפח, השטח והכמות"** (שאלות 4, 5, 6, 8 ו-15).

במאמר זה נעסוק בקטגוריה הראשונה: **קטגוריית המספרים** ובקטגוריה השנייה: **קטגוריית "הכמות"**.

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה 158 פרחי הוראה:

1. 71 פרחי הוראה לקדם-יסודי (44.9% מאוכלוסיית המחקר).
2. 87 פרחי הוראה לכיתות א' וב' (55.1% מאוכלוסיית המחקר), מהם 31 (19.6% מאוכלוסיית המחקר) שלמדו בשנה א קורס סמסטריאלי העוסק במתמטיקה בגיל הרך. בקורס זה עסקו במושגי היחס המתמטיים <, >, =. 56 נבדקים (35.4% מאוכלוסיית המחקר) לא השתתפו בקורס זה.

במהלך המחקר השתתפו כל הנבדקים (בשנה ב או ג) בקורס שנתי העוסק בפדגוגיה, הוראה ולמידה של מתמטיקה בגיל הרך.

שיטת המחקר

שיטת המחקר שילבה בין מתודה כמותית למתודה איכותנית.

כלי המחקר

שאלון שחיברו החוקרות ויש בו 25 שאלות. מהן נציג במאמר זה ארבע שאלות מה**קטגוריית הכמותיות**. השאלות שנדון בהן במאמר זה, עוסקות בסימנים מתמטיים בין כמויות (טבלה 1)

אלה עולה כי ילדים בני 5–12 נוטים לראות בסימן השוויון סימן אופרציונלי ולא מתייחסים אליו כסימן יחס (Mark-Zigdon & Tirosh, 2008). תלמידים רואים בסימן זה פקודה לעשות אופרציה חשבונית (Falkner et al., 1999; Herscovics & Kieran, 1980; Mark-Zigdon & Tirosh, 2008; Morris, 2003; Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998).

תוכנית הלימודים הישראלית לא מגדירה שיש ללמד סימני יחס בגיל קדם-יסודי, ובכל זאת יש גננות שכן מלמדות נושא זה ועוסקות בו, וכמה מהן עושות זאת באופן שגוי.

במחקרים שנעשו בשנים האחרונות נמצא כי הגננות בגן והמורות לגיל הרך מתמודדות עם קשיים וחוסר ביטחון בעת שהן מלמדות מושגים מתמטיים לגיל הרך. ייתכן שהדבר נובע בין השאר מחוויות שליליות קודמות שלהן במתמטיקה, ובשל חוסר בידע ובתכנים מקצועיים שלא רכשו במהלך הכשרתן להוראת מתמטיקה לגיל הרך (Hassidov & Ilany, 2014, 2015; Sarama et al., 2016; Tirosh & Graeber, 1990).

התוצאה היא שלחלק מהגננות והמורות חסר ידע מתאים להוראת מתמטיקה בגנים ובכיתות א' וב'. כיום מצפים מהגננות והמורות להיות בעלות ידע שיאפשר להן ללמד מתמטיקה. דבר זה עולה בקנה אחד עם המגמה המודרנית ברחבי העולם הדוגלת בהיכרות עם מושגים מתמטיים כבר בגיל הגן. המטרה היא לבנות את הידע המתמטי של הילדים לקראת המפגש עם מתמטיקה והלימודים הפורמליים בבית הספר (בן-יהודה ואילני, 2008; Guo et al., 2011).

מליגן (Mulligan, 2016) מדגישה כי השאלה החשובה היא כיצד מחנכים יכולים להבין ולפתח ביעילות ידע מבני מתמטי עמוק בקרב ילדים בגיל צעיר.

מהאמור לעיל, **מטרות המחקר** הן להבין כיצד ובאיזו דרך פרחי הוראה לגיל הרך (גן וכיתות א' וב') תופסים, מבינים ומשתמשים בסימנים המתמטיים <, >, = (Hassidov & Ilany, 2017, 2018; Ilany & Hassidov, 2022). מתוך מטרות אלה נובעות שאלות המחקר להלן.

שאלות המחקר

1. כיצד ובאיזה אופן פרחי הוראה לקדם-יסודי תופסים את הסימנים <, >, = ומשתמשים בהם?
2. כיצד ובאיזה אופן פרחי הוראה לכיתות א' וב' תופסים את הסימנים <, >, = ומשתמשים בהם?
3. מהם ההבדלים בין פרחי הוראה לקדם-יסודי לעומת פרחי הוראה לכיתות א' וב' שלא למדו את

את הנושא בקורס אחר בשנה קודמת.

2. החוקרות ראינו 25 פרחי הוראה שנדגמו באקראי. לאחר מכן נעשה דיון בכיתה על השימוש בסימבולים מתמטיים, על משמעותם ועל מקומם בתוכנית הלימודים במתמטיקה בגן הילדים.

איסוף מידע מפרחי הוראה לגיל הרך

נאסף מידע באמצעות השאלון מ-71 פרחי ההוראה לגיל הרך שלא עסקו בנושא. לאחר מכן ראינו החוקרות 25 פרחי הוראה שנדגמו באקראי.

ממצאים

ממצאים בהיבט הכמותי

בשאלות 1, 2, 3, 17 המוצגות בטבלה 1, נבדק אילו סימנים מתמטיים אם בכלל אפשר לשים בין כמויות.

השאלות נבחרו בדרך זו: **שאלות 1 ו-2** בדקו איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין שני מלבנים שונים זה מזה. **שאלה 3** בדקה איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין ציורי פרחים. **שאלה 17** בדקה איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין ציורי משולשים. בשאלות התבקשו הנבדקים להוסיף את אחד מסימני היחס $<$, $>$, $=$ ואם לא נמצא סימן יחס מתאים, הם התבקשו לסמן X ולנמק את התשובה. באמצעות השאלון נאסף מידע כמותי ואיכותני.

בקטגוריית המספרים נבדקו שאלות 7, 9, 10 ו-16 (פירוט בטבלה 9).

הראיונות היו מובנים למחצה, ובאמצעותם נאסף מידע איכותני. מטרת הראיונות הייתה להבהיר נימוקים שכתבו הנבדקים בשאלון.

מהלך המחקר

איסוף מידע מפרחי ההוראה לכיתות א' וב'

1. נאסף מידע באמצעות השאלון מ-56 פרחי הוראה לפני שלמדו את הנושא, ומ-31 פרחי הוראה שלמדו

טבלה 1: התפלגות באחוזים של תשובות פרחי ההוראה לשאלות בהיבט כמותי

שאלות	תשובות שניתנו באחוזים							
	<		>		=		X	
	פרחי הוראה לכיתות א'-ב'	פרחי הוראה לקדם-יסודי	פרחי הוראה לכיתות א'-ב'	פרחי הוראה לקדם-יסודי	פרחי הוראה לכיתות א'-ב'	פרחי הוראה לקדם-יסודי	פרחי הוראה לכיתות א'-ב'	פרחי הוראה לקדם-יסודי
1		0 N=0	100 N=71	65.52 N=57	0 N=0	0 N=0	34.48 N=30	0 N=0
2		0 N=0	0 N=0	2.30 N=2	6 N=4	62.07 N=54	94 N=67	35.63 N=31
3		2.30 N=2	96 N=68	62.07 N=54	1 N=1	0 N=0	3 N=2	35.63 N=31
17		0 N=0	0 N=0	3.49 N=3	4 N=3	55.81 N=49	90 N=64	40.7 N=35

סימנו בשאלון את הסימן המתמטי השגוי " $>$ " לעומת 0% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי. 0% מפרחי ההוראה לכיתות א' וב' סימנו בשאלון את הסימן המתמטי השגוי " $<$ " לעומת 100% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי. הממצאים המוצגים בהמשך נוגעים לשלוש קבוצות: פרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, פרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא ופרחי ההוראה לגיל הרך.

בטבלה 1 יש תיאור של ההתפלגות באחוזים של תשובות פרחי ההוראה לכיתות א' וב' לעומת פרחי ההוראה לקדם-יסודי. מהטבלה מתקבל כי 34.48% מפרחי הוראה לכיתות א' וב' ו-0% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי ענו נכון "X". יש הבדלים מכיוון ש-30 פרחי ההוראה לכיתות א' וב' שענו נכון למדו את הנושא שנה קודמת. 65.52% מפרחי ההוראה לכיתות א' וב' (שלא למדו את הנושא)

טבלה 2: השוואת התפלגות התשובות בין שלוש קבוצות

מספר שאלה	תשובה	פרחי הוראה לקדמי-יסודי			פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא			פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא		
		N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה	N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה	N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה
1	<	71	55.5%	100.0%	55	43.0%	98.2%	2	1.6%	6.5%
	>	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%
	=	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%
	נכון	0	0.0%	0.0%	1	3.3%	1.8%	29	96.7%	93.5%
2	<	0	0.0%	0.0%	1	100.0%	1.8%	0	0.0%	0.0%
	>	4	100.0%	5.6%	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%
	=	67	55.4%	94.4%	52	43.0%	94.5%	2	1.7%	6.5%
	נכון	0	0.0%	0.0%	2	6.5%	3.6%	29	93.5%	93.5%
3	<	68	55.7%	95.8%	53	43.4%	94.6%	1	0.8%	3.2%
	>	1	33.3%	1.4%	2	66.7%	3.6%	0	0.0%	0.0%
	=	2	100.0%	2.8%	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%
	נכון	0	0.0%	0.0%	1	3.2%	1.8%	30	96.8%	96.8%
17	<	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%	0	0.0%	0.0%
	>	3	50.0%	4.2%	3	50.0%	5.6%	0	0.0%	0.0%
	=	64	58.2%	90.1%	45	40.9%	83.3%	1	0.9%	3.2%
	נכון	4	10.0%	5.6%	6	15.0%	11.1%	30	75.0%	96.8%

בטבלה 2 יש תיאור של התפלגות התשובות בין שלוש קבוצות המחקר. נמצא כי בכל אחת מארבע השאלות, התשובות הנכונות התקבלו בעיקר בקרב פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא.

טבלה 3: השוואת פרחי ההוראה שהשיבו תשובה נכונה לפרחי ההוראה שהשיבו תשובה שגויה

מספר שאלה	תשובה	פרחי הוראה לקדמי-יסודי			פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא			פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא		
		N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה	N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה	N	% מהמדגם	% מפרחי ההוראה
1	שגויה	71	55.5%	100.0%	55	43.0%	98.2%	2	1.6%	6.5%
	נכונה	0	0.0%	0.0%	1	3.3%	1.8%	29	96.7%	93.5%
2	שגויה	71	55.9%	100.0%	54	42.5%	96.4%	2	1.6%	6.5%
	נכונה	0	0.0%	0.0%	2	6.5%	3.6%	29	93.5%	93.5%
3	שגויה	71	55.9%	100.0%	55	43.3%	98.2%	1	0.8%	3.2%
	נכונה	0	0.0%	0.0%	1	3.2%	1.8%	30	96.8%	96.8%
17	שגויה	67	56.8%	94.4%	50	42.4%	89.3%	1	0.8%	3.2%
	נכונה	4	10.0%	5.6%	6	15.0%	10.7%	30	75.0%	96.8%

בטבלה 3 ו-4 נעשתה השוואה בין פרחי ההוראה שהשיבו תשובה נכונה ובין פרחי ההוראה שהשיבו תשובה שגויה. בכל אחת מהשאלות אפשר לראות על פי מבחן פירסון (Pearson Chi-Square Tests) כי אחוז המשיבים נכון בקבוצת פרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא, גבוה במובהק ($P < 0.001$) משתי הקבוצות האחרות.

טבלה 4: מבחן פירסון כי בריבוע להשוואה בין פרחי ההוראה שהשיבו תשובה נכונה לפרחי ההוראה שהשיבו תשובה שגויה

Pearson Chi-Square Tests		
שאלה 1	Chi-square	139.452
	df	2
	Sig.	.000*
שאלה 2	Chi-square	133.908
	df	2
	Sig.	.000*
שאלה 3	Chi-square	145.636
	df	2
	Sig.	.000*
שאלה 17	Chi-square	104.584
	df	2
	Sig.	.000*

טבלה 5: ניתוח באחוזים של הנימוקים לתשובות פרחי ההוראה לשאלה 1

סה"כ פרחי הוראה שענו על השאלה	סה"כ תשובות נכונות	נימוקים לתשובות נכונות			סה"כ תשובות לא נכונות	נימוקים לתשובות לא נכונות				שאלה 1	
		לא נימוק	נימוק לא נכון	נימוק נכון		לא נימוק	גודל וכמות	כמות	היבט גרפי		
56	0	0	0	0	56	7	0	48	1	N	לכיתות א'–ב' שלא למדו את הנושא
100	0	0	0	0	100	12.5	0	85.71	1.79	%	
31	29	1	1	27	2	0	0	2	0	N	לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא
100	93.54	3.23	3.23	87.08	6.46	0	0	6.46	0	%	
71	0	0	0	0	71	14	0	56	1	N	לקדמיסודי
100	0	0	0	0	100	19.8	0	78.8	1.4	%	

הוראה לכיתות א'–ב' שכן למדו את הנושא וענו תשובה נכונה. מתוך פרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא 93.54% כתבו נימוק, מהם 87.08% כתבו נימוק נכון. דוגמה לנימוק נכון לתשובה נכונה: "ציורים לא מייצגים מספרים, ובסמלים >, <, = משתמשים בהם רק אם יש כמות מספרית". עוד נימוק: "סימני X כי אי אפשר לשים את הסימנים בציור גרפי, אבל אם הופכים למספרים אז אפשר לסמן >, <, =".

בשאלה 1 נבדק איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין שני מלבנים שונים זה מזה (איור שאלה 1 בטבלה 1). בשאלה זו מצוירים 2 מלבנים בגדלים שונים זה מזה, במלבן אחד 2 סמיילים בגודל שווה ובמלבן שני 3 סמיילים באותו גודל. התשובה הנכונה היא שאי אפשר לשים סימן מתמטי בין שני האגפים.

מטבלה 5 מתקבל שכל פרחי ההוראה לקדמיסודי וכל פרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלא למדו את הנושא, לא ענו תשובה נכונה (100%) לעומת 93.54% מפרחי

בקרב פרחי ההוראה לקדם-יסודי ופרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שענו תשובה לא נכונה, הטעות הנפוצה בנימוקים הייתה בהיבט הכמותי, כלומר הם עסקו בכמות הפרצופים (78.8% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי, 6.46% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, ו-85.71% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא). לדוגמה: "במלבן הימני יש 3 סמיילים ובשני יש 2 סמיילים, מבחינה מתמטית בראשון יש יותר".

דוגמה לנימוק לא נכון לתשובה נכונה: "הציורים לא מציגים מספרים כי הם לא מדויקים".

טבלה 6: ניתוח באחוזים של הנימוקים לתשובות פרחי ההוראה לשאלה 2

פרחי ההוראה	שאלה 2	נימוקים לתשובות לא נכונות				תשובות לא נכונות סה"כ	נימוקים לתשובות נכונות			סה"כ תשובות נכונות	סה"כ פרחי ההוראה שענו על השאלה
		היבט גרפי	כמות וכמות	גודל וכמות	לא נימוק		נימוק נכון	נימוק לא נכון	לא נימוק		
לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	N	1	45	0	8	54	0	2	0	2	56
%	%	1.79	80.35	0	14.29	96.43	0	3.57	0	3.57	100
לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	N	0	2	0	0	2	27	0	2	29	31
%	%	0	6.46	0	0	6.46	87.08	0	6.46	93.54	100
לקדם-יסודי	N	2	52	7	10	71	0	0	0	0	71
%	%	2.8	73.2	9.9	14.1	100	0	0	0	0	100

א'-ב' שלמדו את הנושא, 80.35% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא).

כמו כן 9.9% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי שענו תשובה לא נכונה, דנו בנימוקיהם גם בגודל וגם בכמות, לעומת 0% מכלל פרחי ההוראה לכיתות א'-ב'.

דוגמאות לנימוקים לשאלה 2:

דוגמה לנימוק לא נכון: "סימנתי < כי המרובע מצד ימין מודגש יותר מהשני".

דוגמה לנימוק לא נכון לתשובה נכונה: "בציורים אי אפשר לדייק מי יותר גדול או אם הציורים שווים".

פרח ההוראה שסימן "=" נימק: "הסמיילים שווים בשני המלבנים, השונה הוא אורך המסגרת". פרח ההוראה אחרת, שסימנה בהתחלה X ואחר כך שינתה ל"=" כי "לא ידעתי לאיזה קריטריון להתייחס". עוד נימוק: "לא מתייחסים לגודל הקווים".

בשאלה 2 נבדק איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין שני מלבנים שונים זה מזה (איור שאלה 2 בטבלה 1). בשאלה זו מצוירים שני מלבנים בגדלים ובעוביים שונים זה מזה, ובכל אחד מהם שלושה סמיילים. התשובה הנכונה היא שאי אפשר לשים סימן מתמטי בין שני האגפים.

מטבלה 6 עולה כי 100% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי ו-96.43% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא **לא ענו תשובה נכונה**. לעומת זאת 100% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, **ענו תשובה נכונה**. 93.54% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא נימקו, מהם 87.08% כתבו נימוק נכון.

בקרב פרחי ההוראה בקדם-יסודי ופרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שענו **תשובה לא נכונה**, הטעות הנפוצה בנימוקים הייתה בהיבט הכמותי, כלומר התייחסות לכמות הפרצופים (73.2% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי, 6.46% מפרחי ההוראה לכיתות

טבלה 7: ניתוח באחוזים של הנימוקים לתשובות פרחי ההוראה לשאלה 3

פרחי הוראה	שאלה 3	נימוקים לתשובות לא נכונות				סה"כ תשובות לא נכונות	נימוקים לתשובות נכונות			סה"כ תשובות נכונות	סה"כ פרחי הוראה שענו על השאלה
		היבט גרפי	כמות וכמות	גודל	לא נימקו		נימקו נכון	נימקו לא נכון	לא נימקו		
לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	N	2	43	0	8	53	1	1	1	3	56
	%	3.57	76.77	0	14.29	94.63	1.79	1.79	1.79	5.37	100
לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	N	0	1	0	0	1	27	1	2	30	31
	%	0	3.23	0	0	3.23	87.08	3.23	6.46	96.77	100
לקדם יסודי	N	1	57	1	12	71	0	0	0	0	71
	%	1.4	80.3	1.4	16.9	100	0	0	0	0	100

בשאלה 3 נבדק איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין ציורי פרחים (איור שאלה 3 בטבלה 1). בשאלה זו מצוירים שני פרחים צמודים זה מעל זה בצד שמאל, ושלושה פרחים צמודים זה לצד זה בצד ימין. התשובה הנכונה היא שאי אפשר לשים סמן מתמטי בין שני האגפים.

מטבלה 7 מתקבל כי 100% מפרחי ההוראה לקדם יסודי ו-94.63% מפרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא **לא ענו תשובה נכונה**. לעומת זאת 96.77% מפרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, **ענו תשובה נכונה**. מתוך 90.31% פרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, 87.08% נימקו נכון.

בקרב פרחי ההוראה בקדם יסודי ופרחי ההוראה לכיתות א'-ב' שענו **תשובה לא נכונה**, הטעות הנפוצה בנימוקים הייתה בהיבט הכמות, כלומר 80.3% מפרחי ההוראה לקדם יסודי, 3.23% מפרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא, 76.77% מפרחי הוראה לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא התייחסו לפרחים בנימוקים שלהם.

דוגמה לנימוק לא נכון לתשובה נכונה: "מונים את הסימנים, ומספר הסימנים הגדול זו התשובה, בלי להתייחס לצורה"

טבלה 8: ניתוח באחוזים של הנימוקים לתשובות פרחי ההוראה לשאלה 17

פרחי הוראה	שאלה 17	נימוקים לתשובות לא נכונות				סה"כ תשובות לא נכונות	סה"כ תשובות נכונות	נימוקים לתשובות נכונות			סה"כ פרחי הוראה שענו על השאלה
		היבט גרפי	כמות וכמות	גודל	לא נימקו			נימקו נכון	נימקו לא נכון	לא נימקו	
לכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	N	11	17	5	13	48	2	0	0	7	55
	%	20	30.9	9.09	23.64	87.27	3.64	3.64	0	9.09	100
לכיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	N	0	1	0	0	1	27	1	2	30	31
	%	0	3.23	0	0	3.23	87.08	3.23	6.46	96.77	100
לקדם יסודי	N	10	36	4	17	67	0	0	1	3	71
	%	14.1	50.7	5.6	23.94	94.34	0	1.41	4.25	5.65	100



הייתה בהיבט הכמותי, כלומר התייחסו למשולשים (50.7% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי, 3.23% מפרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא, 30.9% מפרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלא למדו את הנושא).

דוגמאות לנימוקי פרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלא למדו את הנושא: "אין תשובה כי לא ידעתי איזה סימן לסמן, כי בצד ימין ובצד שמאל יש 2 משולשים אבל אין שוויון בצורה שהם מסודרים".

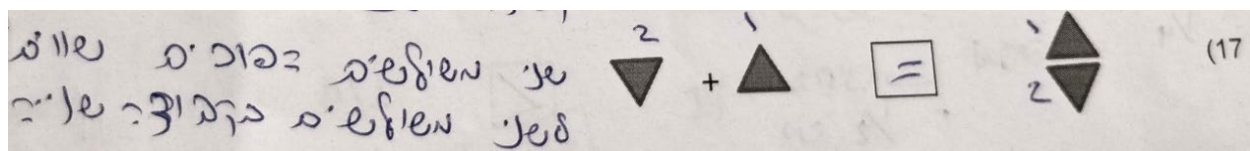
פרח ההוראה שענתה **תשובה נכונה** וכתבה **נימוק שגוי**: "אי אפשר לדעת כי אפשר להתייחס לתרגיל כמשולשים וכשלם".

פרח ההוראה שסימנה תשובה **לא נכונה** "=", נימקה זאת: "בכל צד שני משולשים". באיורים 1–4 מוצגים נימוקים של פרחי ההוראה.

שאלה 17 בדקה איזה סימן מתמטי אם בכלל אפשר לשים בין ציורי משולשים (איור שאלה 17 בטבלה 1). בשאלה זו מצוירים שני משולשים הפוכים זה מעל זה בצד ימין, ובצד שמאל מצוירים שני משולשים הפוכים זה לזה עם סימן פלוס ביניהם. התשובה הנכונה היא שאי אפשר לשים סימן מתמטי בין שני האגפים של הציור.

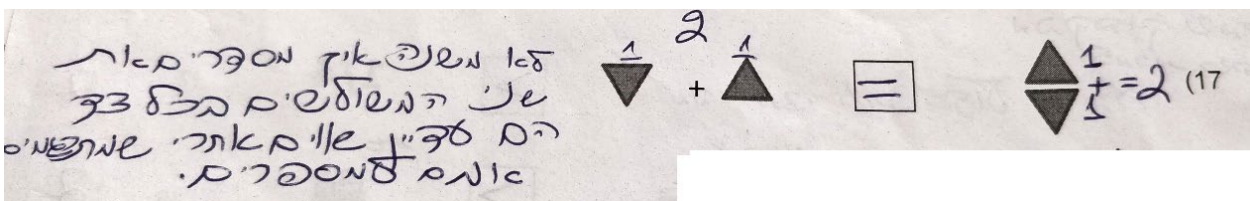
מטבלה 8 מתקבל כי 94.34% מפרחי ההוראה לקדם-יסודי ו-87.27% מפרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלא למדו את הנושא **לא ענו תשובה נכונה**. לעומת זאת 96.77% מפרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא, **ענו תשובה נכונה**. מתוך פרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שלמדו את הנושא 90.31% נימקו, מהם 87.08% כתבו נימוק נכון.

בקרב פרחי ההוראה בקדם-יסודי ופרחי ההוראה לכיתות א'–ב' שענו **תשובה לא נכונה**, הטעות הנפוצה בנימוקים



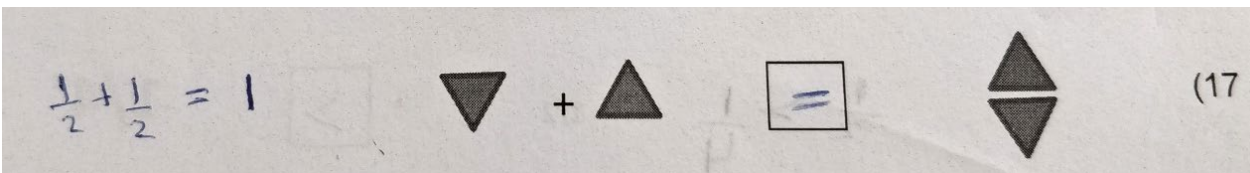
איור 2

הנימוק באיור 2: "שני משולשים הפוכים שווים לשני משולשים בקבוצה שנייה".



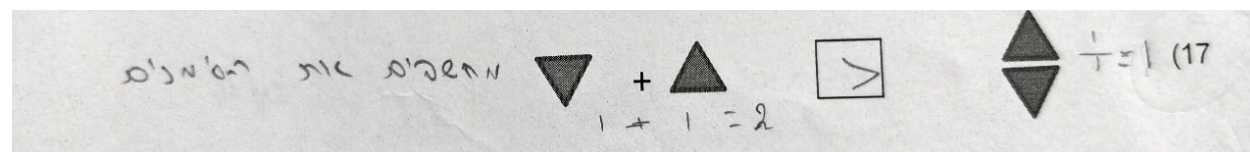
איור 3

הנימוק באיור 3: "לא משנה איך מסדרים את שני המשולשים בכל צד, הם עדיין שווים אחרי שמתאימים אותם למספרים".



איור 4

בריאיון עם פרח ההוראה (איור 4) היא הסבירה זאת: "בצד שמאל רואים משולש ועוד משולש, שיחד הם שווים לציור בצד ימין".



איור 5

בריאיון עם פרח ההוראה (איור 5) היא הסבירה זאת: "סימנתי > כי אחד ועוד אחד יותר גדול מאחד על אחד". עוד דוגמה לנימוק של פרח הוראה שכתבה "מחשבים את הסימנים". היא הסבירה זאת בריאיון עימה: "בצד שמאל מחשבים משולש ועוד משולש וזה שווה שניים, לעומת זאת בצד ימין מחלקים משולש אחד במשולש אחר וזה שווה אחד. ולכן צד שמאל גדול מצד ימין".

ממצאים בהיבט המספרי

טבלה 9: התפלגות באחוזים של תשובות פרחי ההוראה לשאלות בהיבט מספרי

שאלות		תשובות של פרחי ההוראה שניתנו באחוזים											
		<			>			=			X		
		כיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	כיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	קדם יסודי	כיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	כיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	קדם יסודי	כיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	כיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	קדם יסודי	כיתות א'-ב' שלמדו את הנושא	כיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא	קדם יסודי
7	$1/2 \square 1/4$			0			*97.2			0			2.8
9	$5 \square 5$			0			14.1			*77.5			8.4
10	$6 \square 4$			2.8			*91.6			0			5.6
16	$2 \times 3 \square 6$			0			0			*98.6			1.4

2. חוסר הבנה שאי אפשר לראות במספר אובייקט גרפי.
3. הנבדקים חשבו באופן שגוי שאפשר לשים בין שני מספרים פעם אחת את הסימן "<" ובפעם אחרת את הסימן ">".

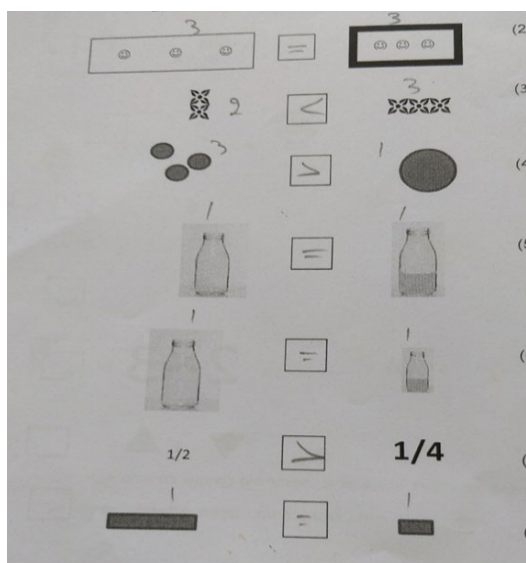
דין ומסקנות

השינויים שחלו בעולם ביחס להוראת המתמטיקה החל מגיל הרך והמעבר לבית הספר בתחום המתמטיקה, מטיל על הגננות ומורי כיתות א'-ב' אחריות רחבה בתחום זה. ממחקר זה עולה כי הנבדקים משתמשים בסימני יחס מתמטיים בדרכים שונות בהתאם להקשר: לעיתים בהקשר לכמות, לעיתים בהקשר לצורה או לגודל של התמונות ולעיתים הנבדקים התייחסו להיבטים הגרפיים. הנבדקים לא התייחסו למשמעות המתמטית של סימני היחס. אפשר להסיק ממחקר זה שהנבדקים לא מבינים כראוי את המשמעות ואופן השימוש בסימבולים המתמטיים: "<, >, =". המסקנות הנובעות ממחקר זה הן שרוב פרחי ההוראה לגיל הרך ולכיתות א'-ב' שלא למדו את הנושא, תופסים לא נכון את המשמעות של הסימנים "<, >, =" ולכן יש מקום להניח שהם גם לא ילמדו נכון את הנושא (התקבל מהראיונות ומהנימוקים). לעומת זאת חלק מאוכלוסיית הנבדקים שלמדו את הנושא ענו נכון ותופסים נכון את המשמעות והשימוש בסימני היחס "<, >, =" (מידע זה התקבל מהראיונות ומהנימוקים).

ממצאים לשאלה 9 כדוגמה להיבט המספרי: נמצא ש-45.1% מפרחי הוראה לקדם יסודי ו-16.1% מהגננות שענו תשובה נכונה, נימקו זאת: "זאת סדרת המספרים". 13.4% מהגננות ו-2.8% מפרחי הוראה לקדם יסודי ענו תשובה נכונה אבל כתבו נימוק שגוי שבו התייחסו להיבט הגרפי של המספרים: הם התייחסו לצורה, לגודל או לעובי הקו. 12.7% מפרחי הוראה לקדם יסודי ו-4.7% מהגננות שענו תשובה נכונה "X", כתבו נימוק שגוי שבו התייחסו לכמות הפריטים שבכל צד: "בכל צד קיים פריט אחד ולכן זה שווה". נימוק אחר של הגננות הראה שקיימת התלבטות בין התייחסות להיבט גרפי ובין התייחסות למספרים: "תלוי על מה מסתכלים ואיך, לפי הצורה, אחד גדול מהשני ואם מסתכלים לפי ערך המספר אז הם שווים". 8.5% מפרחי הוראה לקדם יסודי ו-1.3% מהגננות ענו תשובה שגויה ונימקו שאי אפשר לשים סימן בין שני מספרים מאחר שיכולות לדעתן להיות כמה תשובות, לדוגמה: "שני המספרים בעלי אותו ערך אבל לא אותו גודל ועובי". 11.3% מפרחי הוראה לקדם יסודי ו-11.4% מהגננות נימקו כי "הגודל של המספר בצד שמאל גדול מהמספר בצד ימין". אחד מפרחי ההוראה לקדם יסודי כתב ש"בהסתכלות על המספרים אז הם שווים מבחינת כמות או ערך אבל הכתב יותר גדול וזה מבלבל".

נמצאו שלושה סוגים של חוסר הבנה בקרב הנבדקים:

1. חוסר הבנה שהסימנים המתמטיים קשורים אך ורק למשמעות המספר.



איור 6

פרח הוראה בקדם-יסודי הראתה חוסר עקיבות בשאלות 1 ו-2, היא סימנה X אבל נימקה כי "הציורים לא מייצגים מספרים כי הם לא מדויקים". כמו כן היא סימנה סימנים שונים זה מזה בין הבקבוקים – לפי כמות או גודל או נפח. פרח הוראה שסימן בשאלה 2 "=", נימק זאת: "הסמיילים שווים בשני המלבנים, השונה הוא אורך המסגרת". אותו פרח הוראה בשאלות אחרות התייחס לקריטריונים אחרים, למשל בשאלה שלוש הוא התייחס לאורך ובשאלה 4 סימן תשובה נכונה אבל כתב נימוק שגוי: "זה לא רלוונטי מבחינת הגודל והנפח".

דרך אפשרית שפרחי ההוראה יפנימו את המשמעות והשימוש הנכון בסימני היחס ">", "<", "=" היא באמצעות פעילות המובילה לקונפליקט קוגניטיבי ודיון מקצועי בנושא.

חשוב להדגיש שכמו לכל שפה, גם לשפה המתמטית יש חוקים משלה וסימנים המאפשרים לשפה להתקיים, לדוגמה: מספרים, סימני פעולה, סימני יחס ועוד. לכן יש לחזק הבנה זו בקרב העוסקים בהוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

בן-יהודה, מ' ואילני, ב' (2008). פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך: תאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים. מכון מופ"ת.

מרגולין, ב' ואילני, ב' (2007). בין לשון למתמטיקה – חינוך לחשיבה אוריינית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. דפים, 45, 114–139.

מאליגן, ג' (2023). מסלולים לחשיבה מתמטית מוקדמת בגן הילדים: תוכנית המודעות לדגמים ולמבנה. בתוך ד' חסידוב וא' שריף-דסלאן (עורכות), עיון ומחקר בחינוך המתמטי בגיל הרך (עמ' 200–213). מכון

נמצאו שלושה סוגים של הבנות שגויות בקרב הנבדקים שלא למדו את הנושא:

1. חוסר הבנה שהסימנים המתמטיים מתייחסים אך ורק למשמעות המספר.
2. חוסר הבנה שאי אפשר להתייחס לאובייקט גרפי כמספר.
3. אף שחלק מהנבדקים ענו תשובה נכונה, הנימוק לתשובה הנכונה היה שגוי, מה שמראה על חוסר הבנה.

תפיסות שגויות של משמעות הסימנים המתמטיים יכולות לנבוע מהשימוש באותן מילים בחיי היום-יום ובמתמטיקה (Ilany & Margolin, 2008). דוגמה מתאימה לכך הן המילים "גדול, קטן, שווה" המשמשות גם בשפה הטבעית בחיי היום-יום וגם משמשות בשפה המתמטית סימני יחס ">", "<", "=" במאמר של חסידוב ואילני (& Hassidov, 2017) נמצא שגננות לא חשבו שזו טעות אם ילד כותב $5 > 5$. בראיונות עם הגננות, הן אמרו "אנחנו מלמדות את הילד להשתמש בסמל $>$ " בין שני עצמים, וייתכן כי במקרה מסוים הגודל חשוב, ובמקרה אחר האורך עשוי להיות חשוב. זה תלוי בהקשר. גננות אחרות טענו כי "לפעמים במצבים מסוימים נכון להשתמש בשני סימני יחס שונים זה מזה בו בזמן בהתאם להקשר, לדוגמה: $4 < 6$ בגלל הגודל של הספרות, אבל בגלל ש-6 הוא מספר יותר גדול מ-4 נכון גם לסמן $4 > 6$ ". נמצא שנוצרה סיטואציה שהגננות לא היו מודעות לקונפליקט הקוגניטיבי של שימוש בשני סימנים מתמטיים שונים זה מזה. על כן חשוב שפרחי ההוראה לגיל הרך יבינו שאי אפשר להשתמש בו בזמן בשני סימני יחס שונים זה מזה בין שני מספרים ושיש להשתמש בסימנים ">", "<", "=" רק במובן המתמטי.

לדוגמה, אחד מפרחי ההוראה אמר בריאיון: "מלמדים את הילד להשתמש בסמל $<$ " בין שני עצמים, וייתכן כי במקרה מסוים הגודל חשוב, ובמקרה אחר האורך עשוי להיות חשוב. זה תלוי בהקשר". פרח ההוראה אחר אמר: "לפעמים במצבים מסוימים נכון להשתמש בשני סימני יחס שונים בו זמנית, פעם לפי גודל המלבן ופעם לפי עובי המלבן".

איור 6 מציג דוגמה לתשובות של פרח הוראה לכיתות א'-ב' שלא למד את הנושא. בדוגמה זו הנימוקים נעשו באמצעות תרגום האובייקטים הגרפיים למספרים.

- and Teacher Education, 27(5), 961–968. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2011.03.008>
- Hassidov, D., & Ilany, B. (2014). A unique program (“senso-math”) for teaching mathematics in preschool: Evaluating facilitator training. *Creative Education*, 5(11), 976–988. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.51112>
- Hassidov, D., & Ilany, B. (2015). The “senso-math” preschool program: Successful cooperation between mathematics facilitators and preschool teachers. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (Vol. 3, p. 41–48). PME.
- Hassidov, D., & Ilany B. (2017). Between natural language and mathematical symbols (<, >, =): The comprehension of pre-service and preschool teachers-perspective of numbers. *Creative Education*, 8(12), 1903–1911. <https://doi.org/10.4236/ce.2017.812130>
- Hassidov, D., & Ilany, B. (2018). Collaboration between mathematics facilitators and preschool teachers during the innovative “senso-math” preschool program. *Mathematics Teacher Education and Development*, 20(1), 154–167.
- Hassidov, D., & Ilany B. (2022). Professional development of kindergarten teachers through collaboration with preschool math education expertise. In A. Sharif-Rasslan & D. Hassidov (Eds.), *Special issues in early childhood mathematics education research mathematics education research in early childhood: Learning, teaching and thinking* (pp. 266–286). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004510685_013
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73(8), 572–580.
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical
- מופ"ת.
- פרנקל, א"ה (1953). מבוא למתימטיקה: בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה. מסדה.
- סיניצקי, א' ואילני, ב' (2014). שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות. מכון מופ"ת.
- תירוש, ד', צמיר, פ', ברקאי, ר' ולוינסון, א' (2024). מה דומה, מה שונה: גננות מיישמות ומנתחות מטלות הערכה מתמטיות. בתוך ד' חסידוב וא' שריף-רסלאן (עורכות), *עיון ומחקר בחינוך המתמטי בגיל הרך* (עמ' 214–234). מכון מופ"ת.
- Baroody, A. J. (2000). Does mathematics instruction for 3-to-5-years olds really make sense? *Young Children*, 55(4), 61–67.
- Bialystok, E. (1992). Symbolic representation of letters and numbers. *Cognitive Development*, 7(3), 301–316. [https://doi.org/10.1016/0885-2014\(92\)90018-M](https://doi.org/10.1016/0885-2014(92)90018-M)
- Charalambous, C. Y., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in pre-service teachers' beliefs and attitudes: Insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 161–180. <http://doi.org/10.1007/s10649-008-9170-0>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2006). Young children mathematical mind. *Scholastic Parent & Child*, October 2006, 30–37.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2015). Developing young children's mathematical thinking and understanding. In S. Robson & S. Flannery Quinn (Eds.), *The Routledge international handbook of young children's thinking and understanding* (pp. 331–344). Routledge.
- Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232–236. <https://doi.org/10.5951/TCM.6.4.0232>
- Guo, Y., Justice, L. M., Sawyer, B., & Tompkins, V. (2011). Exploring factors related to preschool teachers' self-efficacy. *Teaching*



- The case of kindergarten and first grade children. In J. J. Kaput, M. Blanton, & D. Carraher (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 201–210). Lawrence Erlbaum Associates.
- Mulligan, J. T. (2016). Promoting early mathematical structural development through an integrated assessment and pedagogical program. In *Program of the 13th international congress on mathematical education topic study group 1: Early childhood mathematics education* (p. 44). University of Hamburg.
- Nemirovsky, R., & Monk, S. (2000). "If you look at it the other way...": An exploration into the nature of symbolizing. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 177–221). Lawrence Erlbaum.-
- Sarama, J., Clements, D. H., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2016). Professional development in early mathematics: Effects of an intervention based on learning trajectories on teachers' practices. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 21(4), 29–55. <http://dx.doi.org/10.7146/nomad.v21i4.148741>
- Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153–187. <https://doi.org/10.1023/A:1003086304201>
- Strawn, G. D. (2019). *What is mathematical equality*. Princeton University Press.
- Thomas, G. V., Jolley, R. P., Robinson, E. J., & Champion, H. (1999). Realist errors in children's responses to pictures and words as representations. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(1), 1–20. <https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2506>
- Tirosh, D., & Graeber, O. A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333–355. <https://doi.org/10.1007/BF00312451>
- Ilany, B., & Hassidov, D. (2018). Perspective of "quantity" between natural language and mathematical symbols (<, >, =): The comprehension of pre-service and preschool teachers. *Creative Education*, 9(10), 1525–1535. <https://doi.org/10.4236/ce.2018.910112>
- Ilany, B., & Hassidov, D. (2022). Between natural language and mathematical symbols (<, >, =): The comprehension of pre-service and preschool teachers' perspective of "numbers" and "quantity". In A. Sharif-Rasslan & D. Hassidov D. (Eds.), *Special issues in early childhood mathematics education research mathematics education research in early childhood: Learning, teaching and thinking* (pp. 229–245). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004510685_011
- Ilany, B., & Margolin, B. (2008). Textual literacy in mathematics – An instructional model. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209–216). Cinvestav-UMSNH.
- Ilany, B., & Margolin, B. (2010). Language and mathematics: Bridging between natural language and mathematical language in solving problems in mathematics. *Creative Education*, 1(3), 138–148. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2010.13022>
- Morris, A. K. (2003). The development of children's understanding of equality and inequality relationships in numerical symbolic context. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 25(2), 18–51.
- Mark-Zigdon, N., & Tirosh, D., (2008). What counts and what does not count as legitimate arithmetic number sentences: