החיים הכפולים של ביטויים אלגבריים: כיצד תלמידים מגשרים על הפער האונטולוגי שבין שיח על תהליכים לשיח על עצמים

שי כספי

ד"ר שי כספי

סיים לימודי דוקטורט בנושא "התפתחות השיח האלגברי של תלמידים בחטיבת הביניים" בהנחייתה של פרופ' אנה ספרד מאוניברסיטת חיפה. מורה למתמטיקה בתיכון "חוגים" חיפה.

תקציר

במאמר זה אני חוזר לרעיון הדואליות תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים, שהובא לראשונה לתשומת ליבה של קהיליית המחקר בחינוך המתמטי לפני כשלושים שנה. במרוצת השנים הדיבור על הדואליות התפתח והתחדד בהדרגה, זכה לנקודות מבט עשירות ומגוונות ונעשה אופרציונלי יותר. במאמר זה אדון בראיפיקציה של השיח האלגברי, כלומר במעבר מראיית ביטוי אלגברי כתיאור של תהליך לראייתו כשם של עצם באמצעות הגישה הקומוגניטיבית[1] (Sfard, 2008). גישה זו מאפשרת לחקור תהליכים בלמידת המתמטיקה בדרך שיטתית ומוקפדת, וכן למפות מסלולי למידה בדיוק רב. גישה זו נמצאה יעילה בייחוד לניתוח שיחים מתמטיים שונים בספרות המחקרית (למשל, נחליאלי וטבח, 2016). במאמר קודם (כספי, 2016) דיווחתי על השינויים שחלו בתהליך הראיפיקציה בתכונות התחביריות-לשוניות של השיח האלגברי המתפתח. במאמר זה אשלים את הדיווח על תכונת הדואליות המאפיינת ביטויים אלגבריים, ואספר כיצד ראיפיקציה מושגת בישורת האחרונה של התהליך. הדיווח השלם מספק אישוש אמפירי להשערה חשובה על הראיפיקציה שנוסחה בעת היוולדו של מושג זה ושחיכתה לאישוש מאז.

מילות מפתח: שיח מטה-אריתמטי; שיח אלגברי; התפתחות; ראיפיקציה; עיצום.

1. המונח קומוגניציה (commognition) הוא מונח המקיף חשיבה (קוגניציה של הפרט) ותקשורת בין-אישית. מונח זה נוצר מהכלאה של המילים קוגניציה ותקשורת והוא בא להדגיש כי חשיבה ותקשורת בין-אישית הן התגלמויות אחרות של אותה תופעה.

הקדמה: על ראיפיקציה ותפקידה בחשיבה המתמטית

כשאנו חושבים על מושג מתמטי כגון מספר או פונקציה, אנו נוטים לראות בו עצם הקיים בעולם, בדומה לספר או לחתול. אולם המספר '7' או הפונקציה $y=x^2$ הם אך ייצוגים אחדים הלקוחים ממגוון ייצוגים שונים של ישויות מופשטות, ואילו ישויות אלה אינן נראות או מורגשות באמצעות חושים אחרים. שלא כעצמים חומריים, מבנים מתמטיים קיימים רק כשאנו חושבים עליהם. למעשה אנו כה רגילים לראות במושגים מתמטיים עצמים לכל דבר ועניין, עד שאנו שוכחים שבבסיסם מצויים תהליכים שיצרו אותם. דוגמה אחת מיני רבות הובאה במחקרן של לביא וספרד (Lavie & Sfard, 2019) שמצאו כי ילדים בני ארבע רואים במספר 'חמש' אך ורק מילה בשפה שמסתיימת בה מנייה של חמישה עצמים. חולפות שנים מספר עד שהמילה 'חמש' תהיה בעיני הילדים שם של עצם בעל קיום עצמאי, בדומה לכל עצם חומרי הקיים בסביבה. מכאן שמושגים מתמטיים מתחילים את דרכם כתהליכים בטרם הופכים לעצמים מופשטים ולפיכך הם בעלי טבע דואלי. ספרד כינתה תהליך זה "תהליך-מבנה" (Sfard, 1991) והסבירה כי היכולת לדבר על תהליכים כישויות הקיימות בזכות עצמן ושאינן תלויות בזמן, היא המאפשרת לנו לבנות עצמים מתמטיים מופשטים. למשל, אפשר להגדיר 'פונקצייה' לא רק מערכת של זוגות סדורים, אלא גם תהליך חישובי או שיטה להגעה ממערכת אחת למערכת אחרת. המעבר מהסתכלות תהליכית בישות מתמטית לראייה מבנית קרוי **ראיפיקציה**. לפי ספרד (Sfard, 1991) ראיפיקציה היא "מעבר אונטולוגי – יכולת פתאומית לראות משהו מוכר באור חדש לגמרי [...] ראיפיקציה היא קפיצה קוונטית: תהליך מתגבש לעצם, למבנה סטטי (עמ' 19–20). ספרד הוסיפה כי "ראיפיקציה שמובילה להבנה רציונלית – קשה להשגה, דורשת מאמץ רב ועשויה להגיע ברגע שאינו ניתן לציפייה, לפעמים באבחה אחת" (עמ' 33).

החוקרים בחינוך המתמטי שפעלו בעשורים האחרונים של המאה העשרים אומנם תיארו את התהליך ההתפתחות של מושגים מתמטיים, ובהם מושג הראיפיקציה, אך לא הצליחו לספק הגדרות אופרציונליות. החוקרים עסקו במושגים 'תהליכי' ו'מבני' כמתארים 'מבנים מנטליים', ודיברו על מבנים אלה במונחים מעורפלים, כגון 'תפיסה', או 'סכמה קוגניטיבית'. תיאורים אלה לא סיפקו כלים מעשיים המאפשרים לבחון כיצד מתנהלת ההתפתחות המושגית בקרב הלומדים. אי לכך לא היה אפשר לבחון גם את ההשערה בדבר ההשלמה של תהליך הראיפיקציה כאירוע בעל אופי של הארה פנימית. כדי להפוך את מושג הראיפיקציה לאופרציונלי, אשתמש בגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) שבאמצעותה מתמטיקה נחשבת לסוג של שיח וראיפיקציה היא תהליך לשוני במהותו. תיאור זה מאפשר לשרטט תמונה מדויקת של התפתחות הראיפיקציה אצל הדוברים בשיח באמצעות ניתוח הבחירות הלשוניות שלהם.

רקע תאורטי: ראיפיקציה של השיח האלגברי בגישה הקומוגניטיבית

חשיבה ולמידה בגישה הקומוגניטיבית

בגישה הקומוגניטיבית שיח מוגדר סוג מסוים של פעולה תקשורתית, בין-אישית או פנימית. תלמידים הלומדים מתמטיקה במקומות רבים בעולם אמורים להשתתף באותו שיח הנקרא 'שיח מתמטי' (וזאת על אף שהם דוברים שפות אחרות). הנחת היסוד של הגישה הקומוגניטיבית היא שחשיבה אנושית היא סוג של תקשורת שאינה בהכרח מילולית. בהיותה גרסה אינדיווידואלית של תקשורת בין-אישית, החשיבה מתפתחת במהלך יחסי גומלין של האדם עם אנשים אחרים. לפי גישה זו יש לשיח המתמטי ארבעה מאפיינים ייחודיים:

- **מילים ודרך השימוש בהן** – שיח מתמטי כולל מילים מתמטיות הנאמרות בעניין מתמטי.
- **מתווכים חזותיים** הם עצמים המאפשרים לדוברים לזהות את נושאי השיח ולנהל לפי הצורך את הפעילות התקשורתית. המתווכים בשיח המתמטי הם ברובם עצמים סימבוליים שנוצרו במיוחד לצורכי תקשורת, למשל, גרף, נוסחה, ביטוי אלגברי או מודל כגון מעגל טריגונומטרי.
- **נרטיבים** הם כל טקסט מדובר או כתוב המנוסחים כתיאור של עצמים, כתיאור של קשרים בין עצמים או כתיאור של פעולות על עצמים. משתתפים מסוימים בשיח עשויים לאמץ נרטיבים שלפי הקהילייה המתמטית הם 'נכונים' או לדחות כאלה שלפיה הם 'לא נכונים'.
- **רוטינות** הן דפוסי שיח החוזרים על עצמם במהלך הפעילות התקשורתית של המשתתפים. אדם הצופה בשיח יכול לזהות דפוסי פעולה חוזרים בדרכים שבהן משתתפי השיח משתמשים במילים מתמטיות, במתווכים חזותיים, וכן באופן שהם בונים נרטיבים על עצמים מתמטיים ומאששים אותם.

בגישה הקומוגניטיבית **למידה** היא תהליך שבו היחיד הופך למשתתף בשיח ומפתח בהדרגה יכולת לנהל תקשורת מתמטית עם עצמו. המשתתף בשיח אינו מגיע כלוח חלק וזאת משום שישנם שיחים שהוא מנוסה בהם. לפיכך אפשר לראות בלמידה טיפוס מסוים של התפתחות הכרוך בשינוי ובהרחבה של שיח קיים.

אלגברה בגישה הקומוגניטיבית

חוקרים רבים בחינוך המתמטי התקשו לספק הגדרה אחת מוסכמת לאלגברה ועל כן העדיפו להגדיר את המושג חשיבה אלגברית 'רכישה' של יכולת:

- "היכולת לפעול על כמות לא ידועה כאילו הייתה ידועה, בניגוד לחשיבה אריתמטית הכרוכה בפעולות על כמויות ידועות" (Swafford & Langrall, 2000).
- "היכולת לייצג מצבים כמותיים באופן שבו קשרים בין משתנים הופכים לגלויים" (Driscoll, 1999).
- "כמויות שערכן בלתי מסוים מקבלות התייחסות כאילו היו מספרים ידועים" (Radford, 2014).

הגדרות אלה אינן אופרציונלית, שכן הן אינן מעניקות לחוקר (או למורה) כלים שבעזרתם אפשר לבדוק את הימצאותה של חשיבה אלגברית בקרב התלמידים. אופרציונליות זו מושגת בעזרת ההגדרה של האלגברה הבסיסית כמטה-שיח של האריתמטיקה (Sfard, 2008), כלומר שיח על שיח מספרי. זיהוי ומעקב אחרי אופי ההשתתפות של לומד האלגברה באמצעות ארבעת מאפייני השיח המתמטי הם הכלים לזיהוי סממנים של חשיבה אלגברית ואף חשוב מזו, התפתחותה של חשיבה זאת. אחת מהמשימות המטה-אריתמטיות המאפיינות שיח אלגברי נקראת הכללה – זיהוי דפוסים מספריים. באלגברה פורמלית מציגים דפוסים כאלה כשוויונות סימבוליים, כגון $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$. שוויון זה הוא קיצור של המשפט המטה-אריתמטי: "כדי לכפול מספר בסכום של שני מספרים אחרים, אפשר לכפול כל אחד משני מספרים אחרים אלה במספר הראשון ואז לחבר את התוצאות". אומנם השוויון נוסח באמצעות סמלים המזוהים על פי רוב כסממן הבולט של האלגברה, ואולם הגדרת האלגברה כפי שהוצגה (ועיקריה מקובלים על היסטוריונים ופילוסופים של המתמטיקה) אפשרה לנו לנסח אותו גם ניסוח מילולי טהור. למעשה הסימול הפורמלי שהומצא רק במאה השבע עשרה, אינו תכונה הכרחית של שיח אלגברי. חוקרים מצאו שהימצאותו של סימול אלגברי פורמלי, אינו משמש סממן של חשיבה אלגברית (Zazkis & Liljedahl, 2002). לאחר שהגדרנו את האלגברה בגישת השיח, נביט כעת בדואליות תהליך-מבנה מנקודת מבט קומוגניטיבית.

ראיפיקציה בגישה הקומוגניטיבית כתהליך יצירת עצמים מתמטיים חדשים

בבואנו לבחון ראיפיקציה של שיח אלגברי, נוכל לבדוק האם המשתתף החליף את הדיבור על פעולות ותהליכים בדיבור על עצמים. למשל, במקום לומר: "**כפלתי** את x ב-4 **וחיברתי** לתוצאה 8" הדובר אומר "**הסכום** של **מכפלת** x ב-4 ושל 8". החלפת המילה "כפלתי" (פועל) במילה "מכפלה" (עצם), וכן "חיברתי" (פועל) במילה "סכום" (עצם) היא ראיפיקציה של המשפט כולו. החלפה זו לוותה גם **בניכור** (alienation) שבו הרכיב האנושי מנותק מהעצם והופך לעצם שאינו תלוי במבצע הפעולה. התרחשותם של ראיפיקציה וניכור מביאה בהדרגה לידי **עיצום** (objectification) של השיח האלגברי. העיצום מתרחש כאשר פעולה מוחלפת בשם עצם, שבשעת שימוש נרחב בו מתחיל לתפקד כשם של דבר מה הקיים בזכות עצמו. הכוח המניע ל'דחיסה' זו, הוא הרצון לשכלל את התקשורת המתמטית כדי שנוכל לומר הרבה במעט מילים.

תלמיד שמשתתף בשיח אלגברי מעוצם, יהיה מסוגל להתייחס לביטויים אלגבריים בשיח בדרך דואלית – הן כתהליך והן כעצם. למשל, הוא יוכל לדבר על הביטוי $(n-1)\cdot 3-14$ בשתי דרכים: האחת כקיצור של משפט המדבר על **תהליך חישובי** ("חסר 1 מ-n כפול ב-3 וחסר מ-14"); והשנייה **כעצם המציין תוצאה** של תהליך זה. נוכל אפוא לומר שישנם שני שיחים אלגבריים מקבילים ושקולים: שיח המתמקד בתהליכים חישוביים על מספרים שיסומן ב-Dproc, ושיח העוסק בעצמים שנוצרים מתהליכים אלה ויסומן ב-Dobj. הדואליות תהליך-מבנה של שיח אלגברי מושגת כאשר שני שיחים אלה שהיו נפרדים עד כה מתמזגים לשיח אחד. התמזגות זו היא תוצאה של שימוש באותם אמצעים תחביריים על אותו ביטוי אלגברי. לכן הביטוי האלגברי מתפקד כמעין 'סיכה' שקושרת בין שני שיחים אלה והופכת אותם לאחד. מאמר זה יעסוק במיזוג שיחים שעל פניו נראה בלתי אפשרי: מיזוג של שיחים בעלי אונטולוגיות שונות זו מזו.

מתמטיקאי העבר חוו לעיתים קושי הנובע מהפער האונטולוגי שבין שני השיחים. ההיסטוריה מלמדת שהמתמטיקאים עשו דרך ארוכה בתהליך בריאתם של מושגים מתמטיים חדשים כגון 'מספר' או 'פונקציה'. מושגים אלה התחילו את 'חייהם' כתהליכים חישוביים עד שהפכו ברבות השנים לעצמים מתמטיים עצמאיים. ביטוי לפער האונטולוגי שבין שני השיחים ניכר היטב בעבודותיו של המתמטיקאי היווני דיאופנטוס. במהלך פתרון בעיה, כגון "בהינתן סכומם ומכפלתם של שני מספרים, מהם המספרים?", השתמש דיאופנטוס באותיות בשביל נעלמים, אבל לא בשביל פרמטרים. במקום להשתמש בפרמטרים, בחר דיאופנטוס בשבילם מספרים ספציפיים וכך חישב את הנעלמים. בעבור דיאופנטוס, הביטוי האלגברי שכתב בשביל הנעלם היה קיצור של פעולות מספריות. הוא לא היה מסוגל להציג את התוצאה בדרך פרמטרית מאחר שהביטוי האלגברי לא היה בעיניו העצם המבוקש. הוא לא היה מסוגל לומר "המספר שמקיים את המשוואה $3x+2=m$ הוא $(m-2):3$", מאחר שאמירה זו שקולה לטענה: "המספר שמקיים את המשוואה $(m-2):3$ הוא החסר 2 מ-m וחלק ב-3".

בנקודה זו עולה השאלה מה אפשר ללמוד מדרך פעולתו של דיאופנטוס על השיח האלגברי של התלמידים בני זמננו? תשובה מיידית לשאלה זו היא שגם כאשר נוסחה אלגברית מופיעה בשיח של התלמידים, אין ערבות לכך שהיא מתפקדת כשם של עצם. למעשה תלמיד עשוי להשתתף בשיח שנשמע מבני ועדיין לא להיות מסוגל להבחין ברעיון הנוגד את האינטואיציה, ולפיו תהליך עשוי להיחשב גם תוצאה של התהליך עצמו (כפי שמתכון לעוגה אינו יכול להיחשב העוגה עצמה). הדרך שבה אנו מקריאים ביטויים אלגבריים, אינה משקפת כל 'מחויבות אונטולוגית', כלומר אינה מבהירה אם הביטוי מסמן תהליך או עצם בשביל הלומד. אי בהירות זאת בכוונת הדובר מעוררת שאלות מספר: כיצד נוכל לקבוע האם התלמיד רואה בביטוי האלגברי תהליך בלבד או שמא **גם** שם עצם? כיצד נוכל להחליט האם שני השיחים Dproc ו-Dobj התמזגו בשביל הלומד? על שאלות אלה אשיב בהמשך המאמר אך כעת נעבור לשיח האלגברי של התלמידים ונבחן כיצד הם מתמודדים עם האתגרים שמציבה הדואליות תהליך-מבנה.

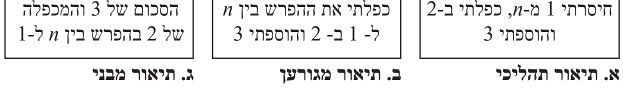
תהליכים המביאים לידי ראיפיקציה בלמידת האלגברה

כשלב מקדים למחקר האורך המוצג במאמר זה, בניתי מודל תאורטי הירככי של התפתחות החשיבה האלגברית על פי ההתפתחות ההיסטורית של האלגברה ולממצאי מחקרים קודמים העוסקים בלמידתה. במאמר קודם (כספי, 2016) הצגתי מודל זה המורכב משלוש רמות של שיח אלגברי:

- ברמה הראשונה – **רמה תהליכית, השיח על תהליכים Dproc הוא השולט בכיפה ואין בנמצא כל סממן**

המעיד על הימצאותו של שיח עצמים Dobj. הדוברים מתמקדים בחישובים מספריים הנעשים בעיקר במילים ומנוסחים ניסוח אנושי (ראו איור 1א). התיאור התהליכי מורכב מיחידות לשוניות הקרויות 'פסוקיות פעולה' – פסוקי משנה המתארים פעולה; למשל, "חיסרתי 1 מ-n". השימוש בסימן השוויון שקול למקש = במחשבון. רמה זו מתאפיינת גם בשימוש תדיר במילים מיוחדות בשביל תוצאות ביניים. למשל, תלמיד עשוי לתאר את הביטוי $3x+5$: "שלוש כפול משתנה שווה משהו. המשהו הזה ועוד חמש". המילה "משהו" מתפקדת כתוצאת ביניים של התהליך החישובי.

- ברמה השנייה – **רמה מגורענת, השיח על תהליכים Dproc מכיל גרעינים של שיח מבני Dobj**, ואולם שיחים אלה טרם התמזגו לשיח אחד. ההתמקדות היא עדיין בחישובים מספריים, אך ישנם סימנים לעיצום חלקי שעשוי להתרחש בשני מצבים: (1) פסוקית פעולה מוחלפת בפרזת עצם[2] באמצעות שימוש בשם עצם חדש. למשל, באיור 1ב, פסוקית הפעולה ("חיסרתי 1 מ-n") הפכה לפרזת עצם ("ההפרש בין n ל-1"; המילה "הפרש" היא שם העצם החדש); (2) פסוקית פעולה מוחלפת ב'פסוקית עצם' – פסוקי משנה המתפקדים כשמות עצם (כלומר מתארים את העצם המתקבל לאחר פעולה שנעשתה בלי שימוש בשם עצם חדש), למשל, "מה שקיבלתי כשהחסרתי 1 מ-n". הפרזות ופסוקיות העצם הן קיצורים של פעולות בסיסיות שחולקות חלקים של שרשרת ארוכה ל'חרוזים' או ל'גרעינים'. כמו ברמה הראשונה, גם כאן מופיע רצף פעולות חישוביות, אלא שבזכות החלפת החישוב בתוצאתו, אין צורך להפסיק את הרצף בכל מקום של חישוב עזר. בשביל תלמיד ברמה זו, גם אם תוצאות אלה מבוטאות בסמלים, הן אינן מספקות בהכרח תשובות לגיטימיות לבעיות.
- הרמה השלישית – **רמה מבנית (מעוצמת)** של האלגברה היא זו של המשתתפים המומחים בשיח האלגברי, **בשבילם שני השיחים Dproc ו-Dobj התמזגו לאחד.** ברמה זו המעמד של פסוקית עצם, כגון $3x+5$, אינו נבדל מהמעמד של מספר. השימוש בביטויים אלגבריים (מילוליים או סימבוליים) נעשה כעת באמצעות קשרים בין עצמים מתמטיים המנוסחים ניסוח מנוכר (ראו איור 1ג). ברמה זו התלמיד מסוגל לפרש ביטויים אלגבריים פירוש דואלי, הן כתהליכים מספריים והן כעצמים מפותחים ועצמאיים.



איור 1: שלוש רמות ראיפיקציה של תיאור ביטויים אלגבריים

2. פרָזה היא קבוצת מילים המתפקדות כיחידה תחבירית. לפרזת עצם יש נושא (שם עצם) או שהיא עצמה מתפקדת כעצם.

כדי לאשש את המודל, נעשה מחקר אורך שבו עקבתי במשך שנתיים וחצי אחר התפתחות השיח המטה-אריתמטי (האלגברי) של חמישה זוגות של תלמידים בכיתה ז' בעת שלמדו אלגברה בבית הספר. כפי שאסביר בהמשך, ממצאי המחקר עודדו אותי להרחיב את אוכלוסיית המשתתפים ולכלול תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. בהמשך מאמר זה אתאר בהרחבה את שלביו של המחקר ואת ממצאיו.

שאלות המחקר

אלה שאלות המחקר שהנחו את ניתוח הנתונים במחקר זה:

1. מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז' ובכיתה ה', שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?
2. כיצד משתנים מאפייני השיח המטה-אריתמטי ומידת העיצום שלו בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?
3. כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

בתשובה לשאלות 1 ו-2 אדווח כיצד נראית ההתקרבות של שיחים Dproc ו-Dobj דיווח פורמלי, עובדתי-לשוני, מנקודת מבטי כחוקר. בתשובה לשאלה 3 אנסה להציג את ההתמודדות של התלמידים מקרוב, כיצד היא מצטיירת מבחינת ההתנהגויות והפעולות שלהם. הדגש המיוחד יושם כאן בתיאור השלמת התהליך, כשהאיחוד של השיחים קורה בפועל.

השיטה

משתתפי המחקר

לצורך המעקב אחרי התפתחותו של השיח האלגברי בחרתי חמישה זוגות תלמידים בכיתה ז' בעלי מאפיינים דומים: הם תושבי עיר גדולה בצפון הארץ, בעלי רמת הישגים ממוצעת או מעל הממוצעת במתמטיקה ורקע סוציו-אקונומי בינוני. התלמידים השתייכו לאותו בית ספר. אף שלמדו מתמטיקה אצל מורות אחרות, הם למדו לפי תוכנית לימודים זהה והשתמשו באותם ספרי לימוד. בחירתם למחקר נעשתה על פי שלושה קריטריונים: גישה חיובית למתמטיקה, יכולת גבוהה לבטא את עצמם ומוכנות להשתתף במחקר השתתפות מלאה. כדי שיוכלו ליהנות בחברת בני זוגם, חילקתי את התלמידים לזוגות על פי בחירתם האישית.

איסוף הנתונים

במהלך שנתיים, מדי שישה חודשים, עשיתי סבב ראיונות עם כל זוג תלמידים. כל סבב ארך כחודש וחצי וכלל חמישה מפגשים עם כל זוג בנפרד. בכל סבב נדונו בעיות ממאגר משימות שנבנה לצורך המחקר. בסבב חמישי ראיינתי כל משתתף בנפרד וזאת כדי לבחון את השיח האלגברי האישי. המפגשים בסבב זה היו בעלי מבנה ותוכן דומים לראיונות של שאר הסבבים. כל מפגש בכל סבב ארך כ-90 דקות. הסבב הראשון החל בתחילת כיתה ז', בשלב שבו התלמידים

טרם נחשפו לאלגברה הבית ספרית, והסבב האחרון נעשה בתחילת שנת הלימודים של כיתה ט' (ראו טבלה 1). במהלך הראיונות שצולמו במלואם, האזנתי לשיחות שניהלו המשתתפים בעת התמודדותם עם המשימות ובמידת הצורך שאלתי אותם שאלות הבהרה. מכל מקום הקפדתי להימנע מכל התערבות הוראתית ישירה, כך שהצגת האלגברה ועקרונותיה נשארו אצל המורות בכיתה. לאחר ניתוח ראשוני של הממצאים שהתבצע בתום סבב 1, הופתעתי לגלות סממנים לשיח Dobj בקרב התלמידים, ולכן החלטתי לבדוק את השיח המטה-אריתמטי של תלמידים צעירים יותר בכיתה ה'. לשם כך ראיינתי כמה זוגות תלמידים בכיתה ה', בעלי רקע לימודי וסוציו-אקונומי דומה לרקע של התלמידים בכיתה ז' (סבב 0). לצורך המחקר הנוכחי בניתי מאגר של משימות משני סוגים: כאלה שמוליכות להכללה של קשרים מספריים וכאלה שעוסקות במציאת נעלמים. המשימות האלגבריות שהוצגו לתלמידים בחמשת הסבבים היו דומות בטבען, אך רמת מורכבותן עלתה עם הזמן. הנתונים שאציג במאמר זה נלקחו מתוך הראיונות שקיימתי עם התלמידים במהלך הסבבים והם עוסקים במשימות הכללה של סדרות.

טבלה 1: הזמנים של חמשת הסבבים במהלך הלימודים בבית הספר

מספר סבב	הרכב	עיתוי במהלך שנת הלימודים
0	זוגי	אמצע שנת הלימודים בכיתה ה'.
1	זוגי	תחילת שנת הלימודים בכיתה ז', טרם החשיפה לאלגברה הבית ספרית הפורמלית.
2	זוגי	לקראת סיום שנת הלימודים בכיתה ז', לאחר החשיפה לאלגברה הפורמלית.
3	זוגי	תחילת שנת הלימודים בכיתה ח'.
4	זוגי	לקראת סוף שנת הלימודים בכיתה ח'.
5	יחידני	תחילת שנת הלימודים בכיתה ט'.

שיטת הניתוח

לצורך ניתוח הנתונים ארגנתי את תשובות התלמידים בטבלאות שיח. אדגים זאת באמצעות משימה המובאת בטבלה 2, שהעתקתי בשבילה את הכללים הכתובים והנאמרים שהציגו ארבעה תלמידים: טל והילה – תלמידות כיתה ז' בסבב 1 ואיילה וכרמל – תלמידות כיתה ה' בסבב 0.

העמודה השמאלית מציגה את התרגומים הסימבוליים של הכללים כפי שכתב אותם החוקר.

טבלה 2: התשובות של טל והילה (כיתה ז') ושל איילה וכרמל (כיתה ה') למשימה בסבב 0 ו-1[3]

<table>
<tr><td colspan="4">משימה: לפניכם סדרה של מספרים
4, 7, 10, 13, 16...
נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.</td></tr>
<tr><th>תלמיד</th><th>כלל כתוב</th><th>כלל נאמר</th><th>כלל שקול</th></tr>
<tr><td>טל</td><td>מקום • חוקיות הסדרה + 1</td><td>מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1</td><td>$a_n=3\cdot n+1$</td></tr>
<tr><td>הילה</td><td colspan="2">כדי למצוא מקום מסוים בסדרה, צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול) ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות) כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו, ואז לחבר את המספר למספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.</td><td>$d(n-m)$
↓
$a_m+d(n-m)$</td></tr>
<tr><td>איילה</td><td>3 x ___ = ___ + 1 = ___
מספר; המספר; המספר שווה התרגיל 3x___; שממנו התחלנו את הסדרה; התשובה</td><td>צריכים לעשות את המספר שידוע לנו, כמו 75 כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו, ואז זה יהיה שווה משהו [...] ואז אנחנו צריכים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחלנו להקפיץ את זה, ואז זה יהיה שווה התשובה.</td><td>$3\times n+1=a_n$</td></tr>
<tr><td>כרמל</td><td colspan="2">צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה (16) (החמישי בסדרה). אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא (העשרים בסדרה). אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה למקום שאתה צריך להגיע (20-5=15). אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת (15x3=45). בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה (45+16=61).</td><td>$n-m=r_1$
$r_1\cdot 3=r_2$
$r_2+a_m=a_n$</td></tr>
</table>

3. על סמך המחקר שתיארו ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), שיערתי, כמו האחרים, שהשיח המטה-אריתמטי של התלמידים יתמקד בתהליכים ולא בעצמים. בשל ציפייה זו, בשני הסבבים הראשונים ניסחתי את המשימות בשפה תהליכית. לכן שאלתי על הכלל לחישוב של איבר כלשהו של הסדרה. החל מסבב 3 שאלתי מהו האיבר הכללי של הסדרה.

כדי לבחון מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב התלמידים ואת השתנותם (תשובה לשאלות מחקר 1 ו-2), ניתחתי תכונות לשוניות בשיח האלגברי שלהם המתמקדות בשלושה מישורים:

א. דרכי הצגה לפעלים ולפעולות

בחנתי שלושה מסמנים של פעלים ופעולות בתשובות התלמידים: פעלים חשבוניים – לדוגמה "לחבר" אצל הילה או "לעשות תרגיל חיסור" אצל כרמל; פעלים שאינם חשבוניים – למשל, "למצוא" אצל הילה או "לוקח" אצל כרמל; פעולות חשבון – לדוגמה "כפול", "ועוד" ו-"+" אצל טל. בעוד ריבוי פעלים חשבוניים משקף שיח Dproc, שימוש נרחב בפעולות חשבון הוא שלב בדרך לשיח Dobj.

ב. פעולות אנושיות או מנוכרות (עצמים מתמטיים)

פעולות שאנשים עושים, למשל, "להוסיף את ה-1" אצל איילה או "מחבר למספר שאתה רואה" אצל כרמל, משקפות שיח תהליכי. לעומתן פעולות מנוכרות שאנשים אינם עושים, כגון "כפול" אצל טל, עשויות לשקף שיח מבני, והן נדבך בדרך לשיח Dproc.

ג. דרכי הצגה לתוצאות של פעולות

כאן בחנתי ארבעה מסמנים לתוצאות של פעולות בתשובות התלמידים: 1. שימוש בשם מיוחד ל**תוצאות ביניים** כגון **"התוצאה המתקבלת"** בתשובתה של כרמל. מילים אלה יוצרות הפרדה ברורה בין ההליך החישובי לתוצאתו ולפיכך מעידות על שיח תהליכי; 2. שימוש ב**פסוקיות פעולה מורכבות** – פסוקיות פעולה שאינן מכילות מילים מיוחדות בשביל תוצאות ביניים ושמנוסחות ניסוח מנוכר, למשל, אצל טל "מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1"; 3. שימוש ב**פרזות עצם**, למשל, אצל הילה "**המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך**"; 4. שימוש בפסוקיות עצם – כאשר תלמיד מדבר על ביטוי אלגברי כגון $n+2$ ומתאר אותו: "n ועוד 2", אנו זקוקים למידע נוסף האם הפסוקיות נחשבות פעולה או עצם. אם סממני שיח אחרים יעידו כי התלמיד מדבר על **תוצאה של פעולה**, אז תיחשב הפסוקית לעצם. להופעתן של פסוקיות פעולה מורכבות בשיח Dproc יש חשיבות רבה, שכן הן משקפות שלב בדרך לגרעון ובהמשך מוליכות לפרזות ולפסוקיות עצם המאפיינות שיח Dobj.

כדי לבחון כיצד התלמידים משיגים ראייה דואלית תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים ויכולת ללכד את השיח התהליכי Dproc עם השיח המבני Dobj (תשובה לשאלת מחקר 3), בחנתי שני היבטים:

1. האם סימן השוויון מתפקד גם כיחס שקילות, נוסף על תפקידו כהוראה לביצוע חישוב?

למשל, שני סימני השוויון בתשובתה של איילה משקפים שיח Dproc : הביטוי המופיע משמאל לסימן השוויון (3x___) מציין פעולה, ואילו הביטוי מימין המספר שווה התרגיל (3x___) מציין את התוצאה. בזהויות אלגבריות, כגון $(a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b))$ מופיע סימן השוויון כיחס שקילות המשקף שיח Dobj.

2. האם התלמיד מצהיר שהיגד שניסח בכתב או בעל פה מבטא הן תהליך חישובי והן את תוצאתו?

תלמיד האומר: "$2x+1$ מציין הן הכפלה של x ב-2 והוספה של 1 והן את התוצאה של חישוב זה", עשוי להכיר בביטוי האלגברי מספר לכל דבר ועניין. זיהוי הצהרות אלה מבשר על התמזגותם של השיחים Dproc ו-Dobj.

ממצאים

שאלת מחקר 1: מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז׳ ובכיתה ה׳ שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?

הממצאים שדיווחתי עליהם במאמר קודם (כספי, 2016) מספקים תשובה לשאלת המחקר הראשונה. כאן אציג סיכום קצר של ממצאים אלה הנוגעים לתשובות המשתתפים בסבב 0 ('צעירים' בכיתה ה') ובסבב 1 ('בוגרים' בכיתה ז') בעבור משימת ההכללה אחת (ראו טבלה 2). הממצאים מראים שהשיח המטה-אריתמטי של כלל התלמידים היה Dproc בעיקרו, אך למרבה ההפתעה הם חושפים הבדלים מהותיים בין השיחים של המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז': הבוגרים השתמשו מעט ב**פעלים חשבוניים** כגון "מחבר", "כופל" והרבו להשתמש ב**פעולות חשבון** כגון "ועוד", "כפול". כמו כן תלמידים אלה השתמשו לעיתים רחוקות ב**פעלים שאינם חשבוניים** כגון "למצוא", "לראות".

ממצא נוסף מלמד שבעוד רוב הצעירים ניסחו תשובות אנושיות (כגון "צריך להתחיל", "אתה רואה", בתשובתה של איילה), רק כמחצית מהבוגרים ניסחו תשובות אנושיות. כדי להתמודד עם **תוצאות ביניים** השתמשו הבוגרים והצעירים **במילים מיוחדות**, כגון "התוצאה המתקבלת" ו"המספר שיוצא" אצל איילה. אולם שימוש זה היה שכיח בעיקר בקרב הצעירים. הבוגרים השתמשו לעיתים **בפסוקיות פעולה מורכבות**, למשל, "מקום • חוקיות הסדרה + 1" בתשובתה של טל. על סמך השימוש הנרחב בפעולות חשבון ובפסוקיות פעולה מורכבות, תשובות הבוגרים היו קרובות יותר לתחביר האלגברי המקובל, לעומת תשובותיהם של הצעירים. המאפיינים שזוהו כאן הם הסנונית הראשונה בתהליך העיצוב של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים שטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית בכיתה.

בתשובות לשאלות מחקר 2 ו-3 אציג ממצאים שטרם זכו לפרסום, הנוגעים להמשך התפתחותה של הראיפיקציה של השיח המטה-אריתמטי במהלך למידת האלגברה הפורמלית בכיתה. בייחוד אתאר כיצד השתנו הסממנים שכבר דיווחתי עליהם במאמר הקודם במהלך הסבבים ואת התפניות הלשוניות המעידות על התמזגות השיחים Dproc עם Dobj.

שאלת מחקר 2: כיצד משתנים מאפייני השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?

בחלק זה אשלים את הדיווח על השתנותם של מאפייני השיח האלגברי בעשר משימות בסבב 2–5 (ראו נספח). נוסף על כך, כדי להציג מעגל התפתחותי מלא בשיח, אדווח על השינוי שהתרחש בסבב 0–5.

דרכי הצגה לפעלים ולפעולות

טבלה 3 מראה שהשימוש **בפעלים חשבוניים** בתשובות התלמידים בסבב 0–5 הצטמצם במידה ניכרת. מגמה דומה חלה גם בשימוש **בפעלים שאינם חשבוניים**. לעומת זאת השימוש **בפעולות החשבון** גדל במידה ניכרת. במהלך הסבבים ניכר צמצום במידת מעורבותו של **המבצע האנושי**: בעוד בסבב 0 רק כעשירית מתשובות התלמידים סווגו מנוכרות, הרי בסבב 5 שלט ניסוח זה כמעט בכל התשובות.

דרכי הצגה לתוצאות של פעולות

שימוש במילים מיוחדות בעבור תוצאות ביניים: תופעת השימוש במילים מיוחדות לתוצאות הביניים שזיהיתי בניתוח סבב 0 ו-1 הופיעה גם בשני הסבבים העוקבים. נעיין, למשל, בתשובתה של דשה בסבב 2 (ראו טבלה 4), שהעניקה שמות לתוצאות חישובי הביניים לפני שהמשיכה לפעולה שנעשתה בתוצאות אלה: את ההפרש בין המקומות סימנה ב-d; את המכפלה של הפרש המקומות בהפרש הסדרה סימנה ב-c, ואילו המילה "תוצאה" שימשה אותה לתוצאות הביניים בתשובתה הנאמרת.

טבלה 3: מסמנים של פעולות ומידת ניכורם בשיח ההכללה בסבב 0–5*

		סבב 0 (N=41)	סבב 1 (N=38)	סבב 2 (N=25)	סבב 3 (N=10)	סבב 4 (N=33)	סבב 5 (N=27)
מסמנים של פעולות (*)	פעלים חשבוניים	4.3	1.5	0.92	1.5	0.7	0.19
	פעלים שאינם חשבוניים	4.6	1.1	1.0	1.0	0.3	0.3
	פעולות חשבון	1.4	3	4.1	4.1	4.8	7.6
מעורבותו של המבצע האנושי	אנושית	91%	35%	20%	50%	19%	6%
	מנוכרת	9%	58%	72%	50%	81%	94%
	משולבת	-	7%	8%	-	-	-

(*) הערכים המופיעים בטבלה זו חושבו בשביל התשובות הכתובות והנאמרות יחדיו (כל תשובה כתובה ונאמרת של אותו תלמיד נחשבת לתשובה אחת, כאשר N מציין את מספר התשובות). מספרי המסמנים מציינים את מספרם הממוצע בתשובת תלמיד.

טבלה 4 : תשובתה של דשה – תלמידה בכיתה ז' למשימה a בסבב 2

משימה: לפניכם סדרה של מספרים:...6, 10, 14, 18, 22 נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.		
תלמיד	**תשובה נאמרת**	**תשובה כתובה**
דשה	אם אנו יודעים בוודאות את המספר של מקום x, אז עושים: $d =$ המספר במקום $y-x$ המקום שאת מספרו אנו רוצים לדעת $d\cdot 4=C$ מספר ההבדל בין מספר למספר המספר במקום y = המספר במקום $x + C$	אם אנחנו יודעים בוודאות את המספר של מקום x, y זה המקום שאת מספרו אנחנו רוצים לדעת, עושים ... לוקחים את ה-y – המקום שאת המספר שלו אנחנו רוצים לדעת, עושים מינוס ה... המקום של x, המספר במקום של איקס x וזה שווה ל-d – שזאת תוצאה כלשהי, ואז ה-d הזה, אנחנו כופלים אותו בארבע, כי זה קופץ בארבע, שווה ל-c, אוקי? ואז את ה-c הזה אנחנו מוסיפים למספר במקום x, ואז יוצא המספר במקום y – כאילו התוצאה.

עיון בטבלה 5 מראה שהשימוש במילים מיוחדות לתוצאות ביניים הלך ודעך בחלוף הסבבים. המספר הממוצע של מספר המילים המיוחדות בתשובת תלמיד בסבב 5 היה קטן פי 4 ממספרן ההתחלתי בסבב 0.

טבלה 5: מילים מיוחדות לתוצאות ביניים בסבב 0–5*

	סבב 0 (N=41)	סבב 1 (N=38)	סבב 2 (N=25)	סבב 3 (N=10)	סבב 4 (N=33)	סבב 5 (N=27)
מילים מיוחדות לתוצאות ביניים	1.1	0.5	0.4	0.2	0.3	0.3

(*) הכלל הכתוב והכלל הנאמר אוחדו לתשובה אחת, ושמות שהופיעו בשני הכללים נמנו פעמיים. המספרים המופיעים כאן מציינים את המספר הממוצע של מילים מיוחדות בתשובת תלמיד.

שימוש בפסוקיות פעולה מורכבות / פסוקיות עצם: טבלה 6 מגלה שפסוקיות פעולה מורכבות נצפו לראשונה רק בסבב 1 בקרב תלמידי כיתות ז' (למשל, אצל טל "מקום • חוקיות הסדרה 1+", ראו טבלה 2). בסבב זה פסוקיות אלה הופיעו אצל כמחצית מתשובות המשתתפים ועם חלוף הסבבים עלתה שכיחותן עד ל-89% בסבב 5 (ראו, למשל, את תשובתו של שחר בטבלה 7). בהמשך המאמר אדווח על ממצאים נוספים בסבב 4 ו-5 המלמדים כי פסוקיות פעולה מורכבות אלה הן למעשה פסוקיות עצם.

שימוש בפרזות עצם: השכיחות המקסימלית של פרזות עצם (פסוקיות שעברו גרעון באמצעות שם עצם חדש, למשל, 'מכפלה' או 'הפרש') נמצאה בסבב 4 ו-5 (ראו, למשל, את תשובתו של טום בטבלה 7).

טבלה 6: ראיפיקציה במשימות הכללה בסבב 0–5*

	סבב 0 (N=41)	סבב 1 (N=38)	סבב 2 (N=25)	סבב 3 (N=10)	סבב 4 (N=33)	סבב 5 (N=27)
הצגה באמצעות פסוקית פעולה מורכבת / פסוקית עצם	-	58%	72%	67%	79%	89%
הצגה באמצעות פרזת עצם	-	3%	-	-	15%	11%

(*) תשובת תלמיד נספרה כפסוקית פעולה מורכבת רק כאשר הופיעה הן בתשובה הכתובה והן בתשובה הנאמרת.

טבלה 7: תשובות תלמידים לשתי משימות הכללה*

תלמיד	תשובה כתובה	תשובה נאמרת
שחר {j,5}	$8+(x+1)\cdot(x+2)$	מספר המבנה בסדרה ועוד 1 כפול הביטוי מספר המבנה בסדרה ועוד 2 ואז ועוד 8.
טום {d,4}	$18-(n\cdot4)+4$	המיקום של המספר שרוצים לגלות כפול 4 ואת המכפלה להחסיר מ-18 ולהפרש להוסיף 4.

(*) הסימון {x, y} מציין {מספר המשימה, מספר הסבב} בהתאמה. ראו משימות בנספח.

לסיכום, כדי להציג פעלים ופעולות, התלמידים **צמצמו בהדרגה את השימוש בפעלים חשבוניים** (כגון "חיברתי", "לכפול") **ובפעלים שאינם חשבוניים** (למשל, "הקפצתי", "למצוא"). **השימוש בפעולות חשבון** (כגון "ועוד", "כפול") **התרחב** עם הזמן והתשובות נוסחו ניסוח מנוכר. כדי לתאר תוצאות של פעולות, התלמידים **הגדילו בהדרגה את השימוש בפסוקיות פעולה מורכבות ובפריזות עצם**, כך ששכיחותן הגיעה לשיאה בסבב 4 ו-5. ממצאים אלה מלמדים, שלפחות מבחינה תחבירית, השיחים Dproc ו-Dobj נמצאו בקרבה מקסימלית זה לזה בסבב 5. עם זה כדי לקבוע האם פסוקיות פעולה מורכבות מתפקדות גם כפסוקיות עצם בעיני התלמידים, עלינו להביט מקרוב בהתנהגותם ובפעולות שהם נוקטים. הסתכלות כזאת תוכל לשפוך אור על הרגע שבו השיחים Dproc ו-Dobj מתאחדים הלכה למעשה ולפיכך מושגת ראייה דואלית תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים.

שאלת מחקר 3: כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

בחלק זה של הדיווח אראה את המאבק המודע של התלמידים על הראיפיקציה ואספר כיצד הם נלחמו על הרעיון של הדואליות ולמענו. לתיאור מאבק זה בחרתי להיעזר בתשובותיהם של שני זוגות תלמידים: דשה–אביב (בת ובן) והילה–טל (שתי בנות). האינטראקציה בשני הזוגות מייצגת במידה רבה את השיח שהתקיים גם בקרב הזוגות האחרים. לאחר שהתלמידים ניסחו תשובה למשימת הכללה, בכל מפגש של כל סבב, שאלתי אותם: "מה מתארת התשובה שכתבתם?". השיחות שסבבו על שאלה זו, נתנו הצצה למאבק שלהם על הכרה בדואליות תהליך-מבנה ואפשרו לי לתפוס את רגע ה'הארה' – הכרה פתאומית בדואליות.

התפתחות ראייה דואלית אצל דשה ואביב

השיחות שהתקיימו בין דשה לאביב עד לסבב 4 (סוף שנת הלימודים בכיתה ח') בעניין מציאת איבר כללי לסדרה חשבונית מראות במובהק שיח תהליכי Dproc. טבלה 8 מראה כי בתחילת סבב זה, עדיין התלמידים ראו בביטוי אלגברי **תהליך חישובי למציאת ערך האיבר** (ראו היגדים 75 ו-78). לאחר ששאלתי אותם מה מבטא הביטוי שכתבה דשה, סברו שניהם **שלא** השיבה על השאלה (היגדים 75 ו-80) והתקשו לראות בביטוי האלגברי פסוקית עצם. דשה הפרידה בתשובתה הכתובה בין התהליך החישובי $18-([y-1]\cdot4)$ לתוצאתו x (ראו היגדים 78 ו-79) וכתבה מקבץ הוראות למציאת האיבר "מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18."

טבלה 8: שיחה עם דשה ואביב על משימה d בסבב 4

משימה: לפניכם סדרה של מספרים: ... ,6 ,10 ,14 ,18 . איזה איבר נמצא במקום כלשהו בסדרה?			
תלמיד	**תשובה כתובה**		
דשה	$18-([y-1]\cdot4)=x$ x– האיבר, y – המקום	כדי למצוא את האיבר במקום כלשהו בסדרה, מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18.	
אביב	y-4 = x y - המספר שלפני, x – האיבר		
מס'	**דובר**	**מה נאמר?**	**מה נעשה?**
75	אביב	אבל אני אומר לך שזאת הדרך! זאת לא התשובה.	מצביע על תשובתה של דשה
76	מראיין	למה זאת הדרך?	

77	אביב	אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואז אתה מוצא את האיבר.	
78	דשה	האיבר הוא איקס (x) אבל זאת הדרך! זאת הדרך להגיע אל האיבר!	
79	דשה	והאיבר הוא איקס (x). לא ידוע.	
80	דשה	אנחנו לא יכולים לענות לו כי אין מספיק נתונים.	$\begin{cases} y\text{-}4=x \\ 18-([y-1]\cdot 4)=x=x \end{cases}$

בשלב זה בשיחה ניסה אביב לפתור מערכת משוואות המשלבת את השוויונות שכתבו שניהם באומרו: "ככה אנחנו נוכל להגיד את האיבר" (ראו היגד 81). דומה שההצעה של אביב למצוא ערך מספרי לאיבר, הציתה אצל דשה את הרעיון שהביטוי האלגברי שכתבה שקול לתוצאה של האיבר הכללי המבוקש. דשה ניגשה לתשובה המילולית שניסחה בטבלה 8: "כדי למצוא את האיבר במקום כלשהו בסדרה, מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18" והוסיפה "**האיבר הוא התוצאה של כל זה**".

תוספת זו כיוונה מייד לרגע מכונן בשיחה, שבו דשה חוותה הארה שלוותה בהתרגשות רבה ובהרמת גובה צליל הדיבור: "זהו אביב, אביב! הבנתי! הו... הללויה!" (היגד 96 בטבלה 9). דשה תשנה מעתה את האופן שהיא מסתכלת על ביטויים אלגבריים. בעוד לפני הגילוי ראתה דשה את הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$ **תרגיל** / פסוקית פעולה המתארת דרך להגיע לאיבר (ראו היגד 98), הרי שעכשיו ביטוי זה הוא בעיניה **תוצאה של התרגיל** . ההכרה בתוצאת התרגיל $18-([y-1]\cdot 4)=x$ כאיבר הייתה משותפת לדשה ולאביב (היגד 99), אבל בעוד דשה ראתה בביטוי חישוב ותוצאתו גם יחד, אביב ראה בו תהליך חישובי גרידא: "את לא אומרת לו מה האיבר! את אומרת לו את התרגיל כדי להגיע לאיבר!" (היגד 121).

טבלה 9: מאבקה של דשה על הראייה הדואלית של ביטויים אלגבריים

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
96	דשה	זהו אביב, אביב !! הבנתי! הבנתי! הו... הללויה!	
97א	דשה	**התוצאה** של התרגיל הזה,	מצביעה על הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$
	אביב	אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואז אתה מוצא את האיבר.	
97ב	דשה	זה האיבר! ↑	מצביעה על x במשוואה $18-([y-1]\cdot 4)=x$
98	דשה	כלומר **חייבים** לכתוב את התרגיל, אבל **התוצאה** זה האיבר!	
99	אביב	נו נכון, אבל את זה הבנתי מההתחלה.	
100	דשה	אז אנחנו כן כותבים את האיבר!	
101	דשה	הוא {המראיין} לא אמר שהאיבר חייב להיות מספר!	
102	דשה	אולי האיבר יכול להיות התוצאה של התרגיל!	
103	אביב	אבל הוא לא ביקש את הדרך, הוא ביקש את האיבר!	
104	דשה	אבל זאת **לא** הדרך!	
105	אביב	זאת כן הדרך, את נותנת לו תרגיל! זה תרגיל כדי להגיע לתשובה!	
110	דשה	אבל שנייה, תקשיב. האיבר הוא **התוצאה** של התרגיל הזה!	מצביעה על הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$
111	דשה	אז כן צריך את התרגיל, אבל רק כדי **להראות את האיבר!**	

121	אביב	את לא אומרת לו מה האיבר! את אומרת לו את **התרגיל**, כדי להגיע לאיבר!	
123	דשה	אני אומרת לו מה האיבר. אני אומרת לו מה האיבר. אני פשוט אומרת לו מה **האיבר**.	
124	אביב	את לא!	
125	דשה	אני כן! כי אני אומרת לו: "**האיבר** הוא התוצאה של התרגיל הבא".	
126	אביב	נו בדיוק, את נותנת לו את **הדרך** ולא את האיבר!	
153	דשה	כל איבר הוא יכול להיות תוצאה של תרגיל.	
156	אביב	אָהה רגע, אז האיבר הוא 18 # מינוס #בסוגריים# וויי (y) #מינוס 1# #כפול # 4 #שווה # איקס (x)?	קורא את הביטוי האלגברי של דשה.
157	דשה	כן!	

כדי לשכנע את אביב להכיר בדואליות, הציגה דשה נימוקים מספר. תחילה ציינה כי האיבר אינו חייב להיות מספר (ראו היגד 101). נימוק זה לא שכנע את אביב, שהמשיך לראות בביטוי 'מרשם' לחישוב: "אָהה רגע, אז האיבר הוא 18 # מינוס #בסוגריים# וויי (y) #מינוס 1# #כפול # 4 #שווה # איקס (x)?" (היגד 156).

כדי לגרום לאביב לאמץ את נקודת מבטה, הציגה דשה נימוק נוסף הנשען על החלפה בין תפקידיו השונים של סימן השוויון, מהוראת ביצוע ליחס של שקילות (ראו טבלה 10). הטענה כי האיבר הוא התוצאה של התרגיל פינתה מקומה לשקילות שבין התרגיל $18–([y–1]·4)$ לאיבר x. למעשה דשה משתמשת בתכונת הטרנזיטיביות של יחס השקילות בדרך הזו: **ביטוי אלגברי** הוא **תרגיל** (היגד 97א)← תרגיל חישוב נותן את תוצאתו (היגד 97א) ← התוצאה היא **האיבר** (היגדים 97ב ו-125)←**האיבר הוא התרגיל (הביטוי האלגברי)** (היגד 173). טרנזיטיביות זו מלמדת על הראייה הדואלית העכשווית של דשה, שלפיה הביטוי האלגברי שבנתה **מתפקד בעיניה כעת גם כפסוקית שם עצם**.

טבלה 10: תפקיד סימן השוויון בתשובתה של דשה

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
170	דשה	שנייה: אתה הסכמת עם המשוואה הזאת, נכון?	מצביעה על המשוואה $18–([y–1]·4)=x$
171	דשה	במשוואה כתוב שזה **שווה** לאיבר	ואז על הביטוי x מצביעה על $18–([y–1]·4)$
172	דשה	כלומר זה והאיבר הם אותו דבר! כלומר זה האיבר!!	
173	דשה	האיבר הוא בעצם התרגיל!	ממשיכה לכתוב: **האיבר הוא בעצם התרגיל.**
174	אביב	אני רשמתי שאין לנו מספיק נתונים כדי להגיד את המספר, אלא רק את הדרך.	

לסיכום, בטבלה 9 ו-10 ניכר מאבקה של דשה על ראיית התפקיד הדואלי של הנוסחה האלגברית שבנתה. יכולתה המתגבשת לראות בביטוי האלגברי הן תהליך והן את תוצאתו, מלמדת כי שני השיחים Dproc ו-Dobj התמזגו אצלה זה עתה לשיח אחד. למעשה הראייה הדואלית של דשה נצפתה עד לתום איסוף הנתונים בסבב 5. החל מנקודה זו בשיח, דשה אף ניסחה את כל תשובותיה הנאמרות כמנוכרות. כל הנימוקים שהציגה דשה לפני אביב לא שכנעו אותו והוא נשאר בעמדתו כי הביטוי האלגברי מתפקד כדרך חישוב ותו לא. הנתונים שאציג כעת יראו כי תעבור עוד כשנה עד שגם אביב יהיה מסוגל לראות ביטויים אלגבריים ראייה דואלית. בעוד דשה חוותה הארה שהתרחשה בזמן קצר, אצל אביב תהליך העיצום היה איטי ומדורג.

עיון חוזר בטבלה 9–11 מראה שעד לסבב 4 (כולל), אביב מסוגל לראות בביטויים אלגבריים תהליך בלבד. גם אם הם נכונים, ביטויים אלה מבטאים בעיניו אוסף הוראות לביצוע, וערכו של האיבר נקבע רק לאחר הצבת מספר בעבור מקום האיבר בסדרה. הסתכלות זאת נצפתה בהיגד 105 בטבלה 9: "זה תרגיל כדי להגיע לתשובה" ובהיגד 77 בטבלה 8: "אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואתה מוצא את האיבר".

נקודת מבט תהליכית זו קיבלה תפנית בתחילת סבב 5. בתשובתו למשימה: "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה ... 31, 22, 15, 7, 6", כתב אביב $(n-1)^2+6$ ואמר "המספר שלפני האיבר שצריך למצוא כפול עצמו פלוס 6"

בשיחה זו **אביב מכיר לראשונה בביטוי שכתב כתשובה לגיטימית למשימה ואף מכיר במשתנה n כמספר**: "לדעתי זה הפתרון והתשובה הסופית, מכיוון שאין עוד דרך להציג את התשובה, מכיוון ש-n נשאר בגדר מספר שאינו ידוע לי. הוא כמו שומר מקום למספר שאמור להיות המקום של המספר שצריך למצוא". בהמשך סבב 5 בנה אביב את הביטוי $(n\text{-}1)(3+n)+8$ בעבור הסדרה ...8,13,20,29,40 ותיאר אותו "המיקום של האיבר פחות 1 כפול מיקום האיבר פלוס 3 ביחד ולחבר להכול 8". בתשובה לשאלתי מה מבטא בעיניו הביטוי שכתב, הסביר אביב "הביטוי זה רצף של מספרים, n זה גם מספר וגם ביטוי אלגברי, כי ביטוי הוא גם מספר. כדי למצוא את האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה, השתמשתי במיקום שלו בהנחה שאני יודע אותו. לכן אפשר לכתוב את המספר/הביטוי שמצאתי בכל מקום בסדרה". הסבר זה מציין שתי התפתחויות בשיח האלגברי: האחת – אביב רואה **בביטוי אלגברי מספר, כלומר פסוקית שם עצם**; השנייה – אביב מבצע 'האחדה' (saming) – פעולה העומדת בבסיסו של תהליך ההכללה, שבה ניתן שם אחד למספר עצמים שעד כה נחשבו לשונים זה מזה. אביב רואה בערכו של n מספר ידוע ולכן **הביטוי האלגברי מייצג בעיניו את כל איברי הסדרה.** התפתחויות אלה מלמדות שאביב רואה כעת בביטויים אלגבריים **הן עצם מספרי והן דרך לחישוב** עצם זה.

המסע להשגת ראייה דואלית אצל הילה וטל

כמו אצל דשה ואביב, עד לתחילת סבב 4, התמקד השיח של טל והילה בתהליכים בלבד. בתחילת סבב 4 התעקשו טל והילה שהביטוי $18\text{-}(x\text{-}1)\cdot 4$ מבטא תהליך חישובי הנפרד מתוצאתו (ראו היגדים 64, 89 ו-97 בטבלה 11). כמו דשה, הילה עשתה הפרדה זו באמצעות סימן השוויון (היגד 97), וכמו אביב, טל הדגישה שהביטוי ייצג איבר רק לאחר ביצוע של ההוראות החישוביות המופיעות בו (היגד 77).

טבלה 11: שיחה עם הילה וטל על משימה d בסבב 4

לפניכם סדרה של מספרים: ...,6, 10, 14, 18 איזה איבר נמצא במקום כלשהו בסדרה?		
תלמיד	**תשובה כתובה**	**תשובה נאמרת**
הילה	$18-(x-1)\cdot 4$ x – מספר המקום שאנו מחפשים	מספר המקום פחות 1 – דבר ראשון, מכפילים ב-4 ואת כל המכפלה מורידים מ-18.
טל	האיבר = $18-(x-1)\cdot 4$	אתה מסמן את המקום בסדרה בסימן כלשהו, ואז הסימן כלשהו פחות 1 ואז זה כפול 4 והכול מחסירים מ-18.

174	אביב	אני רשמתי שאין לנו מספיק נתונים כדי להגיד את המספר, אלא רק את הדרך.	
מס'	**דובר**	**מה נאמר?**	**מה נעשה?**
64	הילה	זה האיבר שנמצא במקום שבשביל להגיע אליו צריך לעשות איקס (x) מינוס 1, בתוך סוגריים, להכפיל ב-4, ואת כל זה לעשות מינוס 18.	מצביעה על הביטוי $18-(x-1)\cdot 4$
66	טל	זה הביטוי האלגברי **איך** להגיע לאיבר.	
77	טל	אי אפשר לענות על השאלה הזאת כי אנחנו לא יודעים מהו המקום הכלשהו. תיתן לנו מקום ונדע איך לענות.	
87	הילה	אם היינו יודעות מה ה-x, היינו יודעות **בדיוק** מה האיבר.	
89	טל	אחרי שעושים את זה יודעים מה האיבר. זה לא האיבר עצמו.	
97	הילה	זה לא האיבר! זה הדרך למצוא את האיבר! **אחרי השווה** יבוא האיבר.	

בהמשך אותו מפגש חלה תפנית בשיחה, כאשר הילה וטל החלו להתלבט באשר למעמדו של הביטוי האלגברי שניסחו. התלבטות זו באה לידי ביטוי בשתי נקודות מבט שהציגו המשתתפות בסימן השוויון: **השוויון כפעולת 'בצע'**. ההיגדים שבטבלה 12א מלמדים שהביטויים 2+3 ו-$18\text{-}(x\text{-}1)\cdot 4$ מתפקדים כמרשמים לחישוב ולא כפסוקיות עצם (במקרה הראשון יתקבל המספר 5, ראו היגד 104; ובמקרה השני יתקבל האיבר הנמצא במקום נתון, ראו היגד 112 ו-130). נקודת מבט זו היא המונעת מהילה, למשל, לראות בביטוי $18\text{-}4(x\text{-}1)$ תוצאת החישוב שלו (ראו היגד 128–130).

טבלה 12א: האם הביטוי מבטא תהליך בלבד?

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
99	הילה	אני מתלבטת... אני מתלבטת כיוון שנכון שיש פה את השווה,	מצביעה על השוויון במשוואה איבר=$18\text{-}4\cdot(x\text{-}1)$
100	הילה	זה כמו להגיד 2 ועוד 3 שווה 5.	
104	הילה	אם אתה רואה 2 ועוד 3, אתה לא יודע שזה 5.	
105	טל	אתה רואה שני מספרים שצריך לחבר ופעולת ועוד,	
108	טל	אז כמו פה, אם מתישהו נחשב את זה, זה יהיה שווה לאיבר.	מצביעה על הביטוי $18\text{-}4\cdot(x\text{-}1)$
110	הילה	אתה שולח את התרגיל הזה למישהו והוא צריך להבין מזה מהו האיבר... ולא כתוב שם בענק "אני האיבר"!	
112	הילה	וצריך לחבר אותי, להכפיל אותי... וכל זה. צריך לעשות מינוס, כפול ורק אז הוא מגיע לאיבר הזה.	
118	טל	יש לנו פה את הדרך, אבל זה לא חד-משמעית האיבר עצמו. אני לא יכולה להגיד לך: "האיבר הוא 5!"	
119	טל	כי זה לא חד-משמעי. כתבנו: "שווה האיבר", מה זה האיבר? זה איבר כלשהו!	
127	הילה	אבל [...] לא כתוב לך 5.	
128	הילה	אומרים לך לכתוב משהו **אחד** שהוא האיבר. לא כתוב לך "האיבר הוא". כתוב שצריך למצוא משהו אחד.	
129	הילה	ולא כתוב 4 או 5 או 6 או כל מספר כלשהו.	
130	הילה	כתוב: 18 מינוס 4, בסוגריים איקס (x) מינוס 1 שווה – ומזה אתה לא יכול להסיק מהו האיבר. זה לא מספר!	

השוויון כיחס שקילות

ההיגדים שבטבלה 12ב מלמדים על תפקידו של סימן השוויון כיחס של שקילות. כמו בנקודת המבט שזיהיתי בשיח של דשה (ראו איור 2), הביטויים 2+3 ו-$18\text{-}4\cdot(x\text{-}1)$ מתפקדים כ**תוצאות חישוב**, כלומר **כפסוקיות עצם** (במקרה הראשון המספר 5, ובמקרה השני האיבר הנמצא במקום x בסדרה). על אף ניסיון התלמידות לראות את הדואליות של הביטויים, הרי שבמהלך כל השיחה ניכרת הפרדה בין מרשמי החישוב ובין תוצאותיהם.

טבלה 12ב: האם הביטוי מתאר גם עצם?

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
120	טל	אבל מצד שני זה כן כי בעצם יש פה את הדרך למצוא את האיבר, ואם מחשבים את זה, אז כן יוצא האיבר!	
121	הילה	אני חושבת שמה שכאן הוא **כן**... **ולא**. ממש כן ולא.	מצביעה על הביטוי $18\text{-}4\cdot(x\text{-}1)$
122	הילה	מצד אחד כן, בגלל שזה שווה בעצם...	
123	הילה	כשאומרים לי ש-5 שווה 5, זה אומר ש-5 הוא 5 בעצם וזה שווה לאיבר כי יש פה שווה לאיבר.	מצביעה על השוויון במשוואה איבר = $18\text{-}4\cdot(x\text{-}1)$

בהמשך המפגשים שהתקיימו בסבב 4, לא הצליחו הבנות להכריע בין הפן התהליכי לפן המבני של הביטויים האלגבריים. הכרעה כזאת הופיעה אצל שתיהן רק במהלך סבב 5 (ראו טבלה 13). בשלב זה בשיח המתפתח של טל והילה, שתיהן מכירות בביטויים האלגבריים שבנו כעצמים מספריים. כמו בשיח של אביב בסבב 5, גם הבנות מבצעות תהליך של האחדה (saming) שמאפשר להן לראות בביטוי האלגברי כל אחד מאיברי הסדרה, גם מבלי להציב ערך מספרי בעבור מקומו של האיבר.

טבלה 13: ראייה מעוצמת של ביטויים אלגבריים אצל הילה וטל במשימה i בסבב 5 (ראיונות אישיים)

משימה: לפניכם סדרה של מספרים:...,8, 13, 20, 29, 40, 53		
תלמיד	**תשובה כתובה**	**תשובה נאמרת**
הילה	האיבר שחיפשתי = $H\cdot(H+1)+(H+1+H+2+(2-H))$ H – המקום של האיבר שחיפשתי בסדרה	המקום ועוד 1 כפול המקום, ועוד המקום ועוד 1 ועוד המקום ועוד 2, ועוד 2 פחות המקום.
מס'	**דובר**	**מה נאמר?**
85	הילה	אני בחרתי בשיטה הזאת כדי לבטא איך מגיעים לאיבר כלשהו בסדרה ואם הגעתי לאיבר כלשהו בסדרה עם הנוסחה הזאתי – זה אומר שהוא מבטא מספר כלשהו בסדרה.
89	מראיין	אבל איך את יודעת שהביטוי הזה מתאר את האיבר?
90	הילה	כתבתי ש-H זה המקום שחיפשתי בסדרה ו-H יכול להחליף כל מספר.
תלמיד	**תשובה כתובה**	**תשובה נאמרת**
טל	$x\cdot(x+4)+8$	האיבר שנמצא במקום כלשהו הוא המקום שלפני, כפול המקום שלפני פלוס 4, ועוד 8
מס'	**דובר**	**מה נאמר?**
75	טל	הביטוי האלגברי מבטא את התשובה לשאלה כלומר את האיבר הכלשהו בסדרה והוא מבטא גם את הנוסחה למציאת האיבר הכלשהו בסדרה.
76	טל	הביטוי מייצג מספר מכיוון שאם נציב ב-x מספר, הביטוי כולו יהפוך למספר.
77	מראיין	ואם לא מציבים בו מספרים במקום x?
78	טל	הביטוי הוא עדיין מספר גם אם לא מציבים.

התפתחות חשובה נוספת בשיח של הילה באה לידי ביטוי בראיית סימן השוויון כיחס שקילות. כמו דשה (ראו טבלה 10), גם הילה השתמשה בתכונת הטרנזיטיביות כנימוק נוסף המצדיק את קביעתה (ראו טבלה 14). בהיגד 88א היא עומדת על השוויון בין הביטוי $H\cdot(H+1)+(H+1+H+2+(2-H))$ ובין הביטוי "האיבר שחיפשתי" המתפקד כתוצאת איבר במקום נתון (ההשוואה משקפת את הפן התהליכי של הדואליות). בשלב הבא (היגד 88ב) הילה משווה בין הביטוי "האיבר שחיפשתי" ובין הביטוי "האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" הלקוח מנוסח המשימה (השוואה זו בין תוצאת החישוב ובין האיבר משקפת את הפן המבני). בשלב האחרון (היגד 88ג) מתקיימת טרנזיטיביות שלפיה הביטוי האלגברי הוא האיבר במקום כלשהו בסדרה. תכונת הטרנזיטיביות אפשרה להילה ולדשה לראות בביטוי אלגברי הן תהליך חישובי והן את תוצאתו.

טבלה 14: ראייה בסימן השוויון יחס שקילות בשיח של הילה

מס'	**דובר**	**מה נאמר?**	**מה נעשה?**
86	מראיין	אם הביטוי מבטא דרך להגיע לאיבר אז איך הוא עצמו גם האיבר?	
87	הילה	כי זאת הדרך לאיבר ותמיד עושים שווה בסוף הדרך לאיבר. ואם הוא שווה, אז זה חוק המעבר שזה שווה לזה וזה שווה לזה.	
88א	הילה	אם ביטוי שווה לאיבר שחיפשת ב',	מצביעה על הביטוי "האיבר שחיפשת".
88ב	הילה	והאיבר שחיפשת ב' שווה לאיבר שחיפשת א' אז	מצביעה על הביטוי "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" בנוסח המשימה.
88ג	הילה	האיבר שחיפשת א' שווה לביטוי.	מצביעה על הביטוי האלגברי שניסחה.

בעוד תשובותיהן הנאמרות של הילה וטל בסבב 4 נוסחו אנושיות (שימוש במילים "מכפילים", "מורידים", מחסירים" בטבלה 11), ניסוחן בסבב 5 היה **מנוכר** (שימוש במילים "כפול", "ועוד" בטבלה 13).

דיון ומסקנות

מאמר זה שופך אור על תהליך העיצום של השיח האלגברי. תהליך זה הוא איחוד של שני שיחים – האחד (תהליכי Dproc) קרוב יותר לשיח בלתי פורמלי שהתלמידים מפתחים לעיתים בכוחות עצמם לפני שמתחילים ללמוד אלגברה בכיתה, והשיח האחר (מבני Dobj) שנלמד עם חשיפתם של התלמידים לרישום הסימבולי המקובל באלגברה. הממצאים מתארים דרך ארוכה ומלאת לבטים, שעוברים אותה לומדי האלגברה הבית ספרית, משלב שבו ביטויים אלגבריים מייצגים בעיניהם תהליכים בלבד ועד לרגע ההארה, שלאחריו הם מצליחים לראות שביטויים אלה מתארים גם את התוצאה של התהליך החישובי. לפיכך הארה זו היא רגע מכונן בחשיבה האלברית שמתפקדת כמעין 'סיכה' הקושרת את השיחים Dproc ו-Dobj וגורמת להתמזגותם.

הממצאים המוצגים כאן לקוחים מתוך מחקר אורך שמטרתו הייתה לבחון כיצד מתפתח השיח האלגברי בקרב תלמידים בחטיבת הביניים. בממצאים לשאלות 1 ו-2 דיווחתי כיצד נראית ההתקרבות בין השיח התהליכי לשיח המבני בהיבט הלשוני-תחבירי מנקודת מבטי כחוקר. בתשובה לשאלה 3 הראיתי כיצד התלמידים פועלים במהלך מסלול התקרבותם של שני השיחים זה לזה עד לאיחודם הסופי. אביא כעת סיכום קצר של ממצאים אלה כדי להשיב על שלוש שאלות המחקר.

שאלת מחקר 1: מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז׳ ובכיתה ה׳ שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?

השיח האלגברי של התלמידים הבוגרים (כיתה ז') ושל התלמידים הצעירים (כיתה ה'), שטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית בכיתה היה תהליכי ברובו. עם זה הממצאים מראים הבדלים ניכרים בין שני השיחים: הבוגרים **השתמשו מעט בפעלים חשבוניים** (כגון "חיברתי", "כופל") **ובפעלים שאינם חשבוניים** (כגון "מצאתי", "ראיתי"). הבוגרים **הרבו להשתמש בפעולות חשבון** (כגון "ועוד", "כפול"). בעוד התשובות של רוב הצעירים היו **אנושיות** (למשל, "אתה צריך לעשות", "אני מחשבת"), כמחצית מתשובות הבוגרים היו מנוכרות. לבסוף, כדי להציג **תוצאות ביניים** של חישובים השתמשו הצעירים והבוגרים ב**מילים מיוחדות**, כגון "התוצאה" או "התשובה", ואולם שימוש זה היה שכיח יותר בקרב הצעירים. לבסוף, הבוגרים הרבו להשתמש **בפסוקיות פעולה מורכבות** – פסוקיות פעולה שאינן מכילות תוצאות ביניים ומנוסחות ניסוח מנוכר, כגון "מקום • חוקיות הסדרה + 1". על סמך השימוש הנרחב בפעולות חשבון ובפסוקיות פעולה מורכבות, תשובות הבוגרים היו קרובות יותר לתחביר האלגברי המקובל לעומת תשובותיהם של הצעירים. ממצאים אלה מלמדים שבעוד הצעירים נמצאים ברמה **התהליכית** במודל התפתחות של השיח האלגברי, הרי הבוגרים נושקים לרמה **המגורענת**.

שאלת מחקר 2: כיצד מאפייני השיח המטה-אריתמטי משתנים בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?

ככל שנקפו הסבבים, הוסט מרכז הכובד של השיח המטה-אריתמטי מתהליכי חישוב לעבר תוצאותיהם. מעבר זה ניכר במספר תופעות בשיח. ראשית, השימוש של התלמידים **בפעלים חשבוניים וכן בפעלים שאינם חשבוניים** נמצא במגמת ירידה. במקום זה **התלמידים הרבו להשתמש בפעולות חשבון.** שינויים לשוניים אלה מלמדים על מעבר הדרגתי משיח Dproc לשיח Dobj, שכן פעולות החשבון מנוסחות ניסוח מנוכר המקובל בשיח אלגברי מבני פורמלי. עדות נוספת לממצא זה ניכרת **בצמצום ניכר במידת מעורבותו של המבצע האנושי. מגמת צמצום נצפתה גם בשימוש של התלמידים במילים מיוחדות לתוצאות ביניים.** עם התקדמות הסבבים, הניסוח של רוב תשובות התלמידים היה מורכב **מפסוקיות פעולה מורכבות** או **מפסוקיות שם עצם ופרזות עצם**. ממצאים אלה מבשרים על מעבר התלמידים מהרמה התהליכית לרמה המגורענת ומשם ככל הנראה לרמה המבנית. בהמשך הדיון אכריע האם פסוקיות הפעולה בסבבים האלה מתארות פעולות או שמא עצמים, כלומר האם הגיעו בסופו של דבר לרמה המבנית.

שאלת מחקר 3: כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? בייחוד האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

הממצאים בחלק זה של הדיווח עוסקים בשיח בקרב שני זוגות תלמידים: דשה–אביב והילה–טל. **בסבבב 1–3 ואף בתחילת סבב 4 (לקראת סוף שנת הלימודים בכיתה ח')**, ארבעת התלמידים עדיין ראו בביטויים האלגבריים שכתבו פסוקיות פעולה שאינן פסוקיות עצם. הביטויים האלגבריים שבנו היו בשבילם הוראות חישוביות למציאת האיבר. בשלב זה שבו השיחים Dproc ו-Dobj טרם התמזגו, הצליחו התלמידים לבנות ביטויים אלגבריים תקניים מבחינה תחבירית, ואולם לא החשיבו ביטויים אלה תשובה לגיטימית לשאלה: "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?". כמו דיאופנטוס, נצמדו התלמידים לשיח על תהליכים והתעקשו על הבחנה מוחלטת בין ביטוי אלגברי השייך לשיח של תהליכים ובין תוצאת החישוב כשייכת לשיח של עצמים. כדי להפריד בין התהליך לתוצאתו, שלושה מארבעת התלמידים סימנו את התוצאה הסופית של האיבר בשם חדש והשוו את הביטוי לשם זה, למשל, $18\text{-}4\cdot(y\text{-}1)=x$. שימוש זה בסימן השוויון אינו מעיד בהכרח על שקילות בין הביטוי לתוצאתו, אלא שהוא מעיד על התוצאה מתקבלת מתהליכי החישוב המופיעים בו – בדומה לאופן שאנו משתמשים בסימן השוויון במחשבון. התלמידים ראו בביטוי האלגברי תוצאה של תהליך החישוב אך עדיין לא עצם עצמאי המתפקד כאיבר כללי של הסדרה. ראייה בסימן השוויון פעולת 'בצע' והשוואת הפסוקית לשם עצם חדש, תבשיל בהמשך הדרך לזיהוי שקילות מלאה, ולכן היא הגשר שיאפשר לתלמידים לעבור משיח Dproc לשיח Dobj. דוגמה להפרדה מעין זו נמצאת בתשובותיהם של תלמידים בבית הספר היסודי בבעיות הדורשות לחבר שני מספרים, למשל, 11 ו-23 ואז להכפיל את התוצאה ב-3. תלמידים רבים נוהגים לכתוב $11+23\cdot3$ ואין זה מפתיע שאנו מוצאים רישום זה, שכן כך נעשית פעולת ההקלדה במחשבון.

בתחילת סבב 4 נרשמה פריצת דרך בשיח האלגברי של דשה, כאשר ברגע של הארה פתאומית הצליחה לראות ביטוי אלגברי באופן דואלי – הן כתהליך חישובי והן כתוצאת החישוב.

דשה הצליחה לראשונה לזהות שקילות בין הביטוי האלגברי שבנתה לבין תוצאתו. הממצאים שדיווחתי עליהם מלמדים שלזיהוי השקילות אצל ארבעת המשתתפים היו שני גורמים עיקריים: **הגורם הראשון הוא החלפה בין תפקידיו השונים של סימן השוויון, מהוראת 'עשה משהו'** (Kieran, 1981) **ליחס שקילות.** היכולת של התלמידים לעשות החלפה זו בכיתה ט' ידועה ממחקרים קודמים שמצאו כי בין כיתה ז' לכיתה ח' עולה בהדרגה תפיסת סימן השוויון כיחס שקילות (Knuth et. al., 2011). החלפה זו נצפתה בשיחים של דשה והילה שהצליחו לזהות שקילות בין הביטוי האלגברי ובין תוצאתו. התלמידות סימנו תוצאה זו בשם מיוחד (x אצל דשה ו"האיבר שחיפשתי" אצל הילה). זיהוי השקילות התאפשר בשיח שלהן הודות לתכונת הטרנזיטיביות:

אצל דשה: ביטוי אלגברי הוא תרגיל ← תרגיל חישוב נותן את תוצאתו ←התוצאה היא האיבר ←האיבר הוא ביטוי האלגברי;

אצל הילה: הביטוי האלגברי שקול לפסוקית "האיבר שחיפשתי" ← הפסוקית "האיבר שחיפשתי" שקולה ל"איבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" ← "האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" שקול לאיבר האלגברי. כפי שדיווחו התלמידות, תכונת הטרנזיטיביות הייתה מוכרת להן דווקא משיעורי הגאומטריה בבית הספר.

הגורם השני הוא היכולת לראות משתנה אלגברי בודד כשם מספר ומשיקולי סגירות לראות בביטוי אלגברי עצם מספרי. תכונת האחדה (saming) העומדת בבסיסו של תהליך ההכללה מאפשרת לתלמיד לראות בביטוי האלגברי מספר 'מוכלל' המייצג את כל איברי הסדרה בו בזמן. הממצאים מראים כי היכולת לבצע האחדה הופיעה בתשובותיהם של אביב, הילה וטל רק בסבב 5. השתתפות התלמידים ברמה מבנית/מעוצמת זו מראה על סגירת מעגל התפתחותי של השיח האלגברי הבית ספרי.

ה'סיכה' שתפרה לבסוף את שני השיחים Dproc ו-Dobj והביאה לידי התמזגותם הייתה הזיהוי של הביטוי האלגברי עם האיבר, כלומר ראיית הביטוי כעצם מתמטי. אם בזכות סימן השוויון כיחס שקילות והטרנזיטיביות הנלווית אליו ואם הודות לתכונת ההאחדה, אוכל לקבוע כעת כי פסוקיות הפעולה המורכבות ביטאו פסוקיות עצם רק לאחר ההכרה בדואליות תהליך-מבנה שהתרחשה אצל רוב משתתפי המחקר בסבב 5. ממצא זה מאשש את השערתה של ספרד (Sfard, 1991) שלפיה ראיפיקציה דורשת תקופה ארוכה של הכנה והתמודדות ולבסוף מגיעה בהארה פתאומית. היכולת לצפות בהארה שחוותה דשה, שבה הצליחה לפתע לראות בביטוי האלגברי שבנתה תהליך וגם את תוצאתו, היא נדירה, והחוקר שמצליח לצפות באירוע כזה אינו אלא בר-מזל. בעוד השינוי שעברה דשה תועד בזמן אמת לפני עדשת המצלמה, הרי אצל שמונה מתוך עשרת המשתתפים התרחש השינוי ככל הנראה בתקופה שבין סבב 4 לסבב 5 (אצל תלמיד אחד, הראייה הדואלית הופיעה כבר בסבב 3). אומנם האירוע של דשה היה מקרה נדיר שיכולתי לצפות בהתרחשותו, אולם ההתרחשות כשהיא לעצמה אינה נדירה, שכן אנשים מכירים אותה מהתנסותם האישית. כך, למשל, לדברי המתמטיקאי ויליאם ט'ורסטון (William Thurston):

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is 134 over 29 [...] What a tremendous labor-saving device! To me, "134 divided by 29" meant a certain tedious chore, while 134 over 29 was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my discovery. He told me that of course this is so, a over b and 'a divided by b' are just synonyms. To him, it was just a small variation in notation (Thurston, 1990, p. 847).

ממצאי מחקר זה מלמדים שעשויות לחלוף **כשנתיים** מהנקודה שבה תלמידים נחשפים לאלגברה הפורמלית ועד שהם מסוגלים להכיר בדואליות תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים. על אף שקבוצת התלמידים במחקר כולו הייתה מצומצמת יחסית, יש מקום להניח כי אפשר להכליל את הממצאים שדיווחתי עליהם. ראשית, הממצאים עולים בקנה אחד עם התאוריה שהצגתי במודל ההתפתחות השיח שבניתי בטרם איסוף הנתונים. שנית, בהסתכלות מקרוב בתהליכי השיח האלגברי זיהיתי תהליכים שבבירור תלויים בשיח עצמו מאשר בתכונות הייחודיות של המשתתף בשיח או באופן שאני והמורות בכיתה עודדנו התפתחות זו. בתופעות הנובעות ממבנה השיח עצמו יש למנות, למשל, שינויים בשיח שחייבים להתבצע בסדר מסוים (כמו שגג הבית יכול להיבנות רק אחרי שנבנו כל הקומות). ובכל זאת יש לראות בממצאים השערה שעשויה להשתנות על סמך ממצאים נוספים ובקרב אוכלוסיות אחרות החשופות לתהליכים אחרים.

כדי לקצר את התקופה שבה מתמזגים השיח התהליכי והשיח המבני ולפתח ראייה דואלית בקרב תלמידיה, רצוי שהמורה תעודד את **ראייה בסימן השוויון יחס שקילות.** בשביל התלמיד סימן השוויון מתפקד תחילה כסימן 'עשה משהו' והתוצאה של הפעולה הנדרשת צריכה לבוא אחריו. בשלב מאוחר יפתח התלמיד יכולת לראות בסימן השוויון גם יחס שקילות. לשם כך רצוי שמורה לאריתמטיקה תציג לתלמידיה שוויונות כגון $3+4=2+5$. מורה המלמדת אלגברה, יכולה להדגיש תפקיד זה של סימן השוויון, למשל, בפיתוח זהויות, כגון $2(x-3)=2x-6$ או בהדגשת עשיית אותה פעולה על שני אגפים של משוואה (ובכך להימנע משימוש במושג 'העברת אגפים'). בייחוד כדאי שתציג משוואות כגון $1=6x+10$, שבהן הביטוי האלגברי מופיע מצד ימין של סימן השוויון. הצגת משוואה כזאת עשויה לחזק אצל התלמיד את הבנת **הטרנזיטיביות של השוויון**, המקיימת תכונה הכרחית של יחס השקילות. כפי שראינו, למושג הטרנזיטיביות היה תפקיד מכריע בהתמזגות השיחים. כדי להאיר את השימוש בטרנזיטיביות בהוראה, רצוי שהמורה תדגיש את 'אקסיומת העבירות' שלפיה שני גדלים השווים לגודל שלישי – שווים זה לזה. הדגשת היישומים של אקסיומה זו היא הזדמנות לגשר בין תחומי מתמטיקה שונים כגון אלגברה וגאומטריה.

המושג **'האחדה' (saming)** זוהה גם הוא כגורם מרכזי המכוון להתמזגות השיחים. כדי להטמיע את המושג, כדאי שהמורה תבחן עם תלמידיה ביטויים אלגבריים כגון $x+8$ ותבקש מהם לחשב את ערך הביטוי בשביל ערכים מספריים שונים של x. לאחר מכן היא עשויה לשאול את התלמידים מהו ערך הביטוי בשביל $x=t$, ולבסוף לדון עימם על ערכו של הביטוי בשביל $x=x$. שאלה זו עשויה להראות לתלמידים שהביטוי $x+8$ מתפקד הן כתהליך והן כעצם מספרי העומד בזכות עצמו.

לבסוף כדאי שהמורה תעקוב אחרי התפתחות הראייה הדואלית של תלמידיה. היא יכולה לשוחח שיחה אישית עם כל תלמיד בנקודות זמן שונות, ותציג במהלכה ביטוי אלגברי ותשאל "מה אתה רואה כאן?". נוסף על כך, רצוי שתעשה דיון כיתתי על סוגיה זו. ממצאי מחקר זה מלמדים כי הימצאותם של סמלים אלגבריים כשהם לעצמם אינם משמשים סממן בלעדי של חשיבה אלגברית (Zazkis & Liljedahl, 2002). לכן על המורה להיות ערה לכך שתלמידיה עשויים לבנות ביטויים תקניים לבעיית הכללה, ובכל זאת לא לראות בהם תשובה לגיטימית לשאלה שנשאלו. היא יכולה לעורר דיון על תקפותם של הביטויים ולבחון את ראייתם המשתנה של התלמידים. על סמך המלצות אלה, תמפה המורה את אופי ההשתתפות בשיח האלגברי של כל תלמיד ותלמידה (שיח תהליכי, מגורען או מבני) ותתאים את נוסח הבעיות לשלב ההתפתחותי שהם נמצאים בו.

רשימת מקורות

כספי, ש' (2016). מטה-אריתמטיקה ספונטנית כצעד ראשון לקראת האלגברה הבית-ספרית. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 123-96.

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 197-174.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Heinemann.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Lavie, I., & Sfard, A. (2019). How children individualize numerical routines: Elements of discursive theory in making. *Journal of Learning Sciences, 28*(4-5), 419-461. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge University Press.

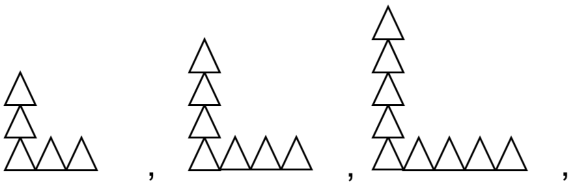
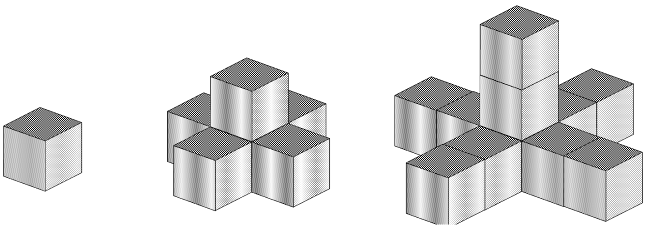
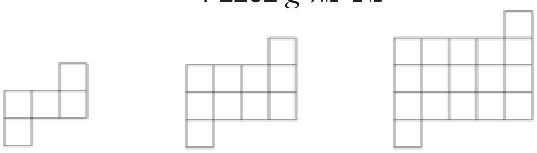
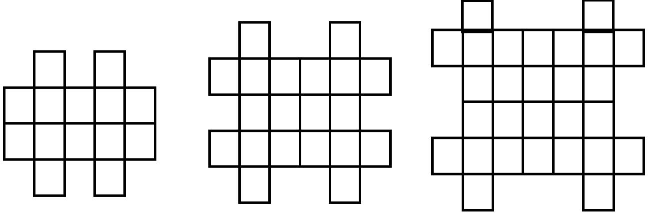
Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228. https://doi.org/10.1007/BF01273663

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grades 6 students' preinstructional use of equations to describe and present problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112. https://doi.org/10.2307/749821

Thurston, W. P. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*(7), 844-850.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

נספח (משימת הכללה בסבב 2-5)

לפניכם סדרה של מספרים: . . . 22 ,18 ,14 ,10 ,6 נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.	משימה ***a*** בסבב 2
לפניכם סדרה של צורות המורכבות ממשולשים. נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב כמה משולשים נמצאים בציור מספר כלשהו בסדרה.	משימה *b* בסבב 2  צורה 1 צורה 2 צורה 3
לפניכם סדרה של מספרים: . . . ,5 ,8 ,11 ,14 איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *c* בסבב 3
לפניכם סדרה של מספרים: ... ,6 ,10 ,14 ,18 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *d* בסבב 4
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מקוביות: כמה קוביות נמצאות במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *e* בסבב 4  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 37 ,27 ,19 ,13 ,9 ,7 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *f* בסבב 4
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מריבועים: כמה ריבועים זהים נמצאים במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *g* בסבב 4  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 31 ,22 ,15 ,10 ,7 ,6 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *h* בסבב 5
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 53 ,40 ,29 ,20 ,13 ,8 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *i* בסבב 5
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מריבועים זהים: כמה ריבועים זהים נמצאים במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *j* בסבב 5  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3