האם α=60°?
שילוב אירוע הוראה בהכשרת מורים

רותי ברקאי

ד"ר רותי ברקאי
ראש תוכנית לתואר שני בחינוך *מתמטי* לבית ספר יסודי במכללת סמינר הקיבוצים ומרצה בכירה במכללת סמינר הקיבוצים. כמו כן רותי היא חוקרת ומרצה באוניברסיטת תל אביב בחוג לחינוך *מתמטי*, מדעי וטכנולוגי. תחומי העניין המרכזיים שלה הם היבטים *מתמטיים* ודידקטיים של הוכחות של טענות *מתמטיות*, חשיבה *מתמטית* בגילים צעירים (3-6) ופיתוח מקצועי של סטודנטים להוראת *מתמטיקה* ושל מורים *למתמטיקה* ושילוב אירועי הוראה בתהליך זה.

תקציר

אחד ממרכיבי ידע תוכן פדגוגי הנחוץ להוראת מתמטיקה הוא ידע על דרכי חשיבה ושגיאות אופייניות של תלמידים. לפיכך חוקרים בחינוך מתמטי ממליצים לחשוף מורים וסטודנטים להוראת מתמטיקה לשגיאות תלמידים. אחת הדרכים המומלצות כאן היא באמצעות הצגה ובחינה של אירועי הוראה הכוללים שגיאות תלמידים. במחקר זה השתתפו 25 סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי. המורים התבקשו לפתור מטלה טריגונומטרית שהוצגה לתלמידים בכיתה י"א, ובהמשך לדון באירוע הוראה המתמקד בשיח בין זוג תלמידים במהלך פתרון המטלה. בעוד כל הסטודנטים רשמו פתרון נכון, שמונה סיפקו רק אחד משני הפתרונות של משוואה טריגונומטרית שהתקבלה במהלך פתרון המטלה. כמעט כל הסטודנטים (23) זיהו לפחות שגיאה אחת משגיאות זוג התלמידים במהלך פתרון המטלה.

אירוע ההוראה מעלה דילמות באשר לתפקיד השרטוטים במטלות טריגונומטריות. מהמאמר עולה כי חשיפת הסטודנטים לאירוע הוראה מספקת הזדמנויות לדון בנושאים הקשורים לידע מתמטי ולמכשולים שתלמידיהם לעתיד עשויים להיתקל בהם בעת פתרון מטלות.

מילות מפתח: סטודנטים להוראת המתמטיקה; אירועי הוראה; שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה.

מבוא

בעשורים האחרונים בחינוך מתמטי מומלץ לעסוק בדרכים מסוימות בדרכי חשיבה של תלמידים על מושגים ותהליכים מתמטיים. גוף הידע המצטבר בנושא דרכי חשיבה של תלמידים כולל מקרים מתועדים של שגיאות שמתרחשות לעיתים קרובות בתהליך הלמידה (למשל, Ashlock, 2010; Clements et al., 2013; Fritz et al., 2019; Grouws, 1992; Kilpatrick et al., 2001; Lester, 2007).

גוף ידע משלים מתאר ידע וגישות של מורים כלפי שגיאות מתמטיות של תלמידים ומספק עדויות לכך שידע תוכן של מורים ואמונותיהם על הדרכים לבחינת שגיאות תלמידים במהלך הלמידה משפיעים על דרכי הטיפול שלהם בשגיאות ועל דרכי ההוראה שלהם (למשל, Bray, 2011; Gagatsis & Kyriakides, 2000; Rach et al., 2012; Anderson et al., 2018). לפיכך חוקרים בחינוך מתמטי ממליצים להתמקד בין השאר בהתמקדות בשגיאות תלמידים בתוכניות להכשרה ולקידום של מורים למתמטיקה. אחת הדרכים המומלצות בהקשר זה היא בהצגה ודיון במקרים (cases) הכוללים שגיאות של תלמידים (למשל, Barnett, 1991; Smith & Friel, 2008; Walen & Williams; 2000).

מאמר זה מתאר מקרה מסוג אירוע הוראה (case) שהוצג לסטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך לימודי הוראת מתמטיקה בבתי ספר על-יסודיים. אירוע ההוראה מתייחס למטלה טריגונומטרית שהוצגה לתלמידים בכיתה י"א, ומתמקד בשיח בין זוג תלמידים במהלך פתרון המטלה. הסטודנטים התבקשו לפתור את המטלה הטריגונומטרית שניתנה לתלמידים ולאחר מכן לדון, באמצעות סדרת שאלות, באירוע ההוראה ובשיח בין זוג התלמידים.

המאמר מתאר את הפתרונות שהציגו הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית ואת התייחסותם לאירוע ההוראה. המאמר מתמקד בשתי שאלות:

1. באילו דרכים פתרו הסטודנטים את המטלה הטריגונומטרית?
2. האם הסטודנטים זיהו את השגיאות שעלו באירוע ההוראה בשיח בין זוג התלמידים?

רקע תאורטי

בחלק זה אתאר בקצרה את הספרות המחקרית על שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה ולגבי הצגת אירועי הוראה בהכשרת מורים למתמטיקה.

בספרות המחקרית מוצגות גישות שונות בעניין התמקדות בשגיאות תלמידים בתהליך ההוראה. מאמרים וספרים מתארים ניסיונות ליצור רצפי הדרכה ללא שגיאות (ראו אצל Resnick & Ford, 1981). אחרים מציעים דרכים להשתמש בידע על שגיאות אופייניות לאבחון קשיי תלמידים ולפיתוח דרכי הוראה העוסקות בשגיאות (למשל, Ashlock, 2010; Radatz, 1980). גישה שונה ועכשווית יותר קוראת לשימוש בשגיאות כמנוף לעידוד חשיבת התלמידים על מושגים ותהליכים מתמטיים (למשל, Borasi, 1987, 1994; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Grobe & Renkl, 2007; Kazemi et al., 2009; Rushton, 2018; Schoenfeld, 2020).

התפיסה הרווחת כיום רואה בשגיאות חלק טבעי ובלתי נמנע מתהליך הלמידה. לפיכך היכרות עם דרכי חשיבה של תלמידים ועם שגיאות המתרחשות במהלך הלמידה היא מרכיב מרכזי של ידע תוכן פדגוגי הנחוץ להוראה בכלל (למשל, Shulman, 1986) ולהוראת מתמטיקה בפרט (למשל, Hill et al., 2008). ההכרה בחשיבות קידום ידע תוכן פדגוגי של מורים והרחבתו מציעה דרכים אחרות ליחס כלפי דרכי חשיבה של תלמידים במסגרות הכשרת מורים למתמטיקה ובמסגרות העוסקות בפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה (למשל, Franke et al., 2001; Heinze & Reiss, 2007; Jacobs et al., 2010; Wilson et al., 2013; Zazkis, 2017; Zazkis & Herbst, 2018).

אחת הדרכים המוצעות היא בתיאור מקרים (cases) המציגים דרכי חשיבה של תלמידים וניתוח אירועים אלו עם מורים ומורים לעתיד. מאמר זה מתמקד במקרה מסוג אירוע הוראה כזה.

שולמן (Shulman, 1986) טען בהקשר לשימוש במקרים בהכשרת מורים כי "ידע מקרים" הוא רכיב חיוני של ידע שנדרש להוראה. שולמן מבהיר במאמרו כי "המקרה, במובנו זה, אינו סתם דיווח על מאורע או תקרית. מי שקורא למשהו 'מקרה' מבטא טענה תאורטית – הוא טוען שמדובר ב'מקרה של משהו' או בדוגמה לסוג רחב יותר של מקרים" (Shulman, 1986, p. 11).

מקרים רבים ומגוונים מוצגים במסגרת הכשרת מורים, ובכללם מוצגות דוגמאות לפתרון בעיות (Markovitz & Smith, 2008; Santagata & Guarino, 2011; Tirosh et al., 2019), נרטיבים (למשל, Henningsen, 2008; Pang, 2011; Silver et al., 2008), קטעי וידאו של שיעורים (למשל, Lin, 2005; van Es et al., 2014) ואירועים מתמטיים (Conner et al., 2011; Markovitz, 2008; Rotem & Ayalon, 2018).

אירוע ההוראה המוצג במאמר זה הוא אירוע מתמטי. אירועים מתמטיים הם מקרים שמתרחשים בכיתת המתמטיקה ויש בהם בעיה, דילמה, עימות, קיטוב או מתח כלשהו (מרקוביץ, 2003). הם עשויים להיות אירועי הוראה אמיתיים שהתרחשו בכיתה או מצבים היפותטיים הנשענים על דרכי חשיבה ותפיסות אופייניות של תלמידים כפי שהם מתוארים במחקרים או על ניסיון אישי.

אירועי הוראה הם קצרים יחסית ובדרך כלל מתארים פתרונות שגויים שהציעו תלמידים. לעיתים פתרונות אלה יכולים לשנות את תוכנית השיעור ולשמש הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים (Rotem & Ayalon, 2018). חלק מאירועי ההוראה מתמקדים בהרחבת ידע תוכן מתמטי שעשוי להיות מאתגר בעבור הלומדים. אחרים מתמקדים בסוגיות דידקטיות כדי לשפר ידע תוכן פדגוגי של לומדים מתוך בחינת נושאים כגון מה התלמיד שפתר מטלה מתמטית בדרך שגויה מבין ומה אינו מבין (מרקוביץ, 2003).

לפי רותם ואיילון (2021), שימוש באירועי הוראה במסגרת הכשרת סטודנטים להוראת המתמטיקה יכול לסייע בפיתוח מיומנות של שימת לב להיבטים מגוונים של הוראה ולמידה של המתמטיקה. למשל, בחינת ההיבט המתמטי שאירוע ההוראה מתמקד בו, דרכי חשיבה של תלמידים והיבטים קוגניטיביים, אפקטיביים וחברתיים.

המקרה המוצג במאמר זה הוא אירוע הוראה המציג פתרון שגוי שהציעו זוג תלמידים שעבדו במשותף על מטלה טריגונומטרית. סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי התבקשו להציג קודם את פתרונותיהם למטלה ולאחר מכן לזהות שגיאות בפתרון התלמידים. המטרה בהצגת אירוע הוראה זה לסטודנטים להוראה הייתה כפולה: לקדם ולשפר ידע תוכן מתמטי ולעורר רגישות לרכיבים מסוימים במטלה שעלולים לשמש מוקד לקשיי תלמידים.

מתודולוגיה

מדגם

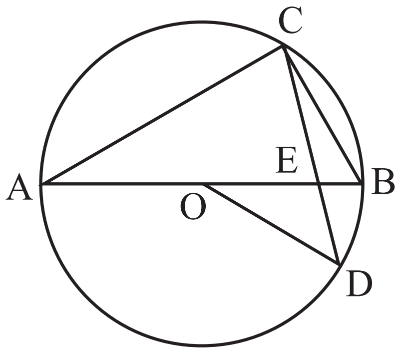
עשרים וחמישה סטודנטים הלומדים לקראת תעודת הוראה במתמטיקה לבית ספר על-יסודי השתתפו בסדנה המלווה את ההתנסות המעשית בהוראת מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. כל הסטודנטים הם בעלי תואר ראשון במקצועות עתירי מתמטיקה העושים הסבה להוראת המתמטיקה לבית הספר היסודי. הסטודנטים עדיין אינם מלמדים בבית ספר אלא צופים ומתנסים בהוראת מתמטיקה במסגרת ההכשרה המעשית שלהם.

כלי המחקר

1. מטלה בטריגונומטריה של המישור שהופיעה בבחינת בגרות במתמטיקה (חורף 2006, 5 יחידות לימוד).

נתון: מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
AB הוא קוטר במעגל.
המיתר CD חותך את הקוטר בנקודה E
(ראו ציור).
$\angle BAC=\angle BOD=\alpha$

i הבע באמצעות R ו-α את שטח המשולש BCD.
ii נתון כי $CB=\sqrt{3}R$ ושטח המשולש BCD הוא $3\sqrt{8}$. חשב את R.



2. אירוע הוראה שמתואר בו שיח בין זוג תלמידים (רון וגילה – שמות בדויים) במהלך שיעור מתמטיקה בכיתה י"א, והמורה ביקש מהם לפתור את המטלה הטריגונומטרית.

אירוע הוראה

1. מורה: אחרי שפתרנו את סעיף i תפתרו את סעיף ii... אפשר לעבוד בזוגות.
2. רון וגילה פתרו יחד את סעיף ii.
3. גילה: מצאנו בסעיף קודם כי $CB=2R\sin\boldsymbol{\alpha}$
4. רון: נכון. כעת נתון כי $CB=\sqrt{3}R$ זה אומר כי $2R\sin\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{3}R$
5. רון וגילה רושמים במחברות שלהם: $2R\sin\alpha=\sqrt{3}R$
6. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\boldsymbol{\alpha}=60^{\circ}$
8. גילה [בהיסוס]: אה... אוי... אה... נראה לי שיש טעות בנתון של CB כי לא ייתכן ש $\boldsymbol{\alpha}=60^{\circ}$.
9. רון: למה?
10. גילה: אם $\boldsymbol{\alpha}=60^{\circ}$
אז $\angle CBD=180^{\circ}-\frac{3}{2}\alpha=180^{\circ}-\frac{3}{2}\cdot 60^{\circ}=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$
כלומר הזווית ההיקפית CBD היא זווית ישרה.
11. רון: אה... נכון... וזווית היקפית השווה ל-90 מעלות נשענת על קוטר, כלומר CD הוא גם קוטר במעגל ולא ייתכן שלמעגל יהיו שני מרכזים O ו-E.
12. [רון וגילה בודקים אם הם לא טעו במהלך הפתרון]
13. רון [בהתלהבות]: אה... מצאתי... מצאתי... שכחנו את האפשרות של $\alpha=120^{\circ}$.
14. גילה [בשמחה]: יפה! כל הכבוד לך. עכשיו נמשיך ונשתמש בנתון של שטח המשולש וככה נמצא את רדיוס המעגל.

אירוע ההוראה זה נבחר משני טעמים: באירוע ההוראה מוצגת טעות אופיינית בפתרון משוואות טריגונומטריות. הטעות האופיינית היא התמקדות בפתרון אחד בלבד ולא במכלול הפתרונות של המשוואה (ובמידת הצורך פסילת פתרונות). שגיאה אופיינית זו בפתרון המשוואה הטריגונומטרית מוליכה לתשובה סופית נכונה למטלה כולה. נוסף על כך, אירוע ההוראה מעלה דילמות בעניין תפקיד השרטוטים בפתרון מטלות גאומטריות וטריגונומטריות.

באירוע הוראה זה אפשר לזהות שלוש שגיאות:

א. התעלמות מהפתרון *sin (180 – 60)*. בפתרון של רון וגילה (שורה 7) אין התייחסות לכך שלמשוואה $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ יש שני פתרונות אפשריים (בעניין שזוויות במשולש): $\alpha_1=60^{\circ}$ ו-$\alpha_2=120^{\circ}$. רון וגילה היו צריכים להציג את כלל הפתרונות ולפסול את הפתרון $\alpha_2=120^{\circ}$. פתרון זה נפסל היות ש-$\angle BAC=\alpha$ היא זווית במשולש ישר זווית ולכן $\alpha\neq 120^{\circ}$.

ב. פסילת הפתרון $\boldsymbol{\alpha}=60^{\circ}$. רון וגילה טענו כי לא ייתכן ש-$\alpha_1=60^{\circ}$ מכיוון שאז הזווית ההיקפית $\angle CBD$ היא זווית ישרה ולא ייתכן ש-CD הוא קוטר במעגל (שורה 11-8). רון וגילה זיהו נכון, כי אם $\boldsymbol{\alpha}=60^{\circ}$ אזי הזווית ההיקפית $\angle CBD$ היא זווית ישרה, אך לא התייחסו לכך שהשרטוט המוצג בבעיה הוא שרטוט כללי המתייחס למקרים שבהם $\alpha<60^{\circ}$. כאשר $\alpha=60^{\circ}$ המיתר CD הוא קוטר והנקודה E מתלכדת עם הנקודה O.

ג. קבלת הפתרון $\alpha_2=120^{\circ}$. בהמשך לשגיאה הקודמת (שגיאה ב) והדילמה של רון וגילה בעניין השרטוט. בסיום אירוע ההוראה (שורה 12-14) נזכרו רון וגילה כי ייתכן עוד פתרון למשוואה הטריגונומטרית ($\alpha_2=120^{\circ}$) אך שגו כי זה הפתרון המתאים לערך הזווית α. פתרון זה שגוי כפי שהוסבר לעיל בשגיאה א.

אירוע הוראה זה הוא אחד מאירועי ההוראה הניתנים לסטודנטים

במסגרת פעילויות שמתקיימות בסדנה שמלווה את ההתנסות המעשית. הסטודנטים מתבקשים להגיב על אירועי הוראה.

אירועי ההוראה נאספו במשך שנים מתצפיות בשיעורי מתמטיקה במגוון כיתות בבתי ספר על-יסודיים. השיעורים הוקלטו ותומללו, והנתונים שנכתבו על הלוח צולמו ושובצו במקומות המתאימים. המידע שנאסף ותומלל חולק לאירועי הוראה שהוצגו לסטודנטים.

מהלך המחקר

מהלך המחקר כולל שני שלבים. בשלב הראשון, באחד השיעורים בסדנה, התבקשו הסטודנטים לפתור בעצמם את המטלה הטריגונומטרית ולהגיש אותה. בשלב השני, לאחר הגשת הפתרונות שלהם למטלה הטריגונומטרית, קיבלו הסטודנטים את אירוע ההוראה עם ההנחיות האלה: "קראו בעיון את אירוע ההוראה וציינו היבטים מתמטיים שגויים שעלו בשיח המתמטי של זוג התלמידים. לגבי כל שגיאה: א. ציינו מהי השגיאה (ציינו את השורה/שורות באירוע ההוראה); ב. הסבירו מדוע זו שגיאה". הסטודנטים התבקשו להגיש בכתב את ההתייחסות שלהם על השגיאות המופיעות באירוע ההוראה. גם ההתייחסות על משימה זו הייתה עצמאית.

בניתוח הממצאים נבדקו תחילה הפתרונות המתמטיים שהציגו הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית. נבדקה נכונות השלבים המגוונים שהציגו הסטודנטים בפתרון שלהם ונכונות התשובה הסופית שלהם לשני הסעיפים המופיעים במטלה הטריגונומטרית. לאחר מכן שני חוקרים סיווגו את תשובות הסטודנטים לאירוע ההוראה. חוקר אחד סיווג את תשובות הסטודנטים על פי שלוש השגיאות המופיעות בשיח בין שני התלמידים (רון וגילה), כלומר את השגיאות שהסטודנטים ציינו ואת ההסברים שלהם לשאלה מדוע זו שגיאה. חוקר נוסף אימת את הסיווג וקידד את הנתונים לפי קטגוריות אלה. הושגה הסכמה מלאה.

ממצאים

בסעיף זה אציג ראשית את פתרונות הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית. לאחר מכן את התייחסות של הסטודנטים כלפי אירוע ההוראה. בתשובות הסטודנטים לאירוע ההוראה אדון בזיהוי השגיאות, בהסבר שלהם מדוע זו שגיאה וכל זאת תוך בחינת פתרונות שהם עצמם נתנו למטלה.

פתרונות הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית

כל הסטודנטים פתרו נכון את סעיף i של המטלה ורשמו את הביטוי $S_{BCD}=2R^2\cdot \sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\alpha$. בפתרון סעיף ii כל הסטודנטים הציגו תשובה סופית נכונה (R=4). עשרים וארבע סטונדטים פתרו סעיף זה תוך כדי שימוש בשיקולים טריגונומטריה, 16 סטודנטים התייחסו בסעיף ii לשני פתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$) ופסלו את האפשרות של 120°. לעומתם שמונה סטודנטים (שליש מהסטודנטים) ציינו רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית.

התייחסות של הסטודנטים כלפי אירוע ההוראה

סטודנט אחד לא ענה על אירוע ההוראה. סטודנט אחר הציג התייחסות שגויה ואדון בה בהמשך. שאר הסטודנטים (23) ציינו **לפחות אחת משלוש** השגיאות באירוע ההוראה:

א. התעלמות מהפתרון *sin(180–60)*. שמונה סטודנטים ציינו כי בשורה 6 ו-7 התלמידים היו צריכים להתייחס לשתי האפשרויות ($\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$) ולפסול את האפשרות $\alpha_2=120°$.

ב. פסילת הפתרון $\boldsymbol{\alpha}=60°$. שמונה עשר סטודנטים ציינו כי בשורה 8-12 (או חלקן) התלמידים שגו שפסלו תוצאה זו ולא חשבו שהנקודות O ו-E יכולות להתלכד.

ג. קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$. חמישה עשר סטודנטים ציינו את השגיאה בשורה 13 ו-14. הם טענו כי כאשר זוג התלמידים הבחינו ששכחו לרשום בסעיף 6 את הפתרון 120°, הם קבעו בשוגג שזהו הפתרון המתאים בעבור α.

טבלה 1 מציגה את שכיחות הסטודנטים שהתייחסו לכל אחת משלוש שגיאות אלו וזאת תוך בחינת דרך הפתרון שהם עצמם הציגו. השגיאות מוצגות בטבלה על פי סדר הופעתן באירוע ההוראה.

טבלה 1: שכיחות הסטודנטים על פי סוג הפתרון שלהם וסוג השגיאה שציינו

השגיאה / **פתרון הסטודנטים**	התעלמות מהפתרון *sin(180 – 60)*	פסילת הפתרון $\alpha=60°$	קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$
בפתרון המשוואה הטריגונומטרית רשמו $\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$ ופסלו את האפשרות $\alpha_2=120°$	5	15	12
בפתרון המשוואה הטריגונומטרית רשמו רק $\alpha_1=60°$	3	3	2
שיקולים גיאומטרים: $\alpha_1=60°$	---	---	1
סך הכול	**8**	**18**	**15**

טבלה 2 מציגה את שכיחות הסטודנטים שציינו סוגים מסוימים של שגיאות לצד התמקדות בפתרונות שלהם. למשל, מהשורה הראשונה בטבלה אפשר לראות כי שלושה סטודנטים ציינו את כל שלוש השגיאות וכי שלושתם פתרו את המטלה בכלים טריגונומטריים והתמקדו בשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון שאינו מתאים.

משורה שלישית, למשל, אפשר לראות כי עשרה סטודנטים ציינו את שתי השגיאות: פסילת הפתרון $\alpha=60°$ וקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$ וכי תשעה מהם פתרו את המטלה בכלים טריגונומטריים והתמקדו בשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון שאינו מתאים וסטודנט אחד הציג רק פתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית.

טבלה 2: שכיחות הסטודנטים על פי סוג השגיאות שציינו ודרך הפתרון שלהם

	השגיאות של זוג התלמידים			דרך הפתרון של הסטודנטים			
	התעלמות מהפתרון *sin (180-60)*	פסילת הפתרון $\alpha_1=60°$	קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$	$\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$ ופסלו את $\alpha_2=120°$	רשמו רק $\alpha_1=60°$	שיקולים גאומטריים $\alpha_1=60°$	**מספר סטודנטים (סה"כ)**
1	v	v	v	3	--	--	3
2	v	v	--	2	--	--	2
3	--	v	v	9	1	--	10
4	v	--	--	1	2	--	3
5	--	v	--	1	2	--	3
6	--	--	v	--	1	1	2
	8	**8**	**15**	**16**	***6**	**1**	**23**

(*) שמונה סטודנטים הציגו פתרון זה כאשר התבקשו לפתור את המטלה הטריגונומטרית, אך אחד מהם לא ענה על ניתוח אירוע ההוראה והשני (יוסי – שאליו אתייחס בהמשך) הציג יחס שגוי כלפי אירוע ההוראה.

אציג כעת דוגמאות לתשובות של שישה סטודנטים על פי סוגי השגיאות שציינו. סטודנט אחד מכל אחת מהשורות שבטבלה 2 (אנה, בתיה, גל, דני, הלל ועלי – שמות בדויים). לבסוף אעסוק בתשובתו של סטודנט (יוסי – שם בדוי) שהציג התייחסות שגויה בניתוח אירוע ההוראה.

התייחסות לשלוש השגיאות המופיעות באירוע הוראה (שורה 1 בטבלה 2)

כפי שאפשר לראות מטבלה 2 שלושה סטודנטים התמקדו בכל שלוש השגיאות המופיעות באירוע ההוראה. בפתרון המטלה הטריגונומטרית, סטודנטים אלה פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית תוך שימוש בכלים טריגונומטריים, התייחסו לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון $\alpha_2=120°$.

למשל, פתרון המטלה הטריגונומטרית של אנה:

א	$CB=2R\sin\alpha$	מסעיף (i)
ב	$CB=\sqrt{3}R$	נתון
ג	$2R\sin\alpha=\sqrt{3}R$	משורה א וב
ד	$2\sin\alpha=\sqrt{3}$	
ה	$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$	
ו	$\alpha_1=60°$ או $\alpha_2=180-\alpha_1=180°-60°=120$	
ז	$\angle BAC=\alpha$	$\alpha\neq120°$ היא זווית במשולש ישר זווית ולכן חדה
ח	$\alpha=60°$	
ט	$S_{BCD}=2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\alpha$	מסעיף (i)
י	$S_{BCD}=8\sqrt{3}$	נתון
יא	$2R^2\cdot sin\,60\cdot sin\,30\cdot sin\,90=8\sqrt{3}$	משורה ט ו-י
יב	$2R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=8\sqrt{3}$	
יג	$R^2=16$	
יד	$R=\mp4$	
טו	$R=4$	רדיוס

אציין כי פתרון זה היה הפתרון של מרבית הסטודנטים שהציגו את שני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסלו את הפתרון $\alpha_2=120$.

התייחסותה של אנה לאירוע ההוראה:

א. בעניין התעלמותם של רון וגילה מהפתרון *sin(180–60)*, אנה רשמה:

בשורה 7 $\alpha=60°$ אינו הפתרון היחיד למשוואה שבשורה 6, נראה כי התלמידים חשבו כי למשוואה יש פתרון יחיד. למשוואה הטריגונומטרית בשורה 6 יש אינסוף פתרונות, וקיימים שני פתרונות בטווח שבין 0 ל-360.

ב. בעניין הטעות של רון וגילה בפסילת הפתרון $\alpha=60°$ אנה רשמה:

> התלמידים הסיקו מהחישובים שעשו בשורה 10, שלא ייתכן ש-$\alpha=60°$ כי אז נובע ש-CD הוא קוטר (כפי שנאמר בשורה 11). אולם ייתכן כי CD הוא אכן קוטר במעגל, וכי הנקודות E ו-O מתלכדות.

ג. בעניין זה שהתלמידים קיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$:

> זה נכון ש-$\alpha_2=120°$ הוא גם פתרון למשוואה שבשורה 6, אבל אפשרות זו לא תיתכן כי אז נובע שבמשולש ישר זווית ABC סכום הזווית גדול מ-$180°$. לכן האפשרות $\alpha_2=120°$ אינה יכולה להתקיים והפתרון הוא $\alpha=60°$.

התייחסות להתעלמות מהפתרון *sin(180–60)* ופסילת הפתרון $\alpha=60°$ (שורה 2 בטבלה 2)

אפשר לראות מטבלה 2 כי שני סטודנטים דנו בשתי השגיאות הראשונות המופיעות באירוע ההוראה: התעלמות מהפתרון *sin (180–60)* ופסילת הפתרון $\alpha=60°$.

שני סטודנטים אלה פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית מתוך שימוש בכלים טריגונומטריים, התמקדות בשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר פתרון דומה לפתרון של אנה, ואילו הסטודנטית השנייה, בתיה, שאף היא השתמשה בכלים טריגונומטריים בפתרון המטלה, התמקדה בשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית אך לא כמו שאר הסטודנטים שפסלו את הפתרון $\alpha_2=120°$ משיקולים גאומטריים הנוגעים למשולש ישר הזווית ABC (ראו הוכחה של אנה). בתיה פסלה פתרון זה באמצעות הצבת $\alpha_2=120°$ בביטוי של שטח המשולש שהתקבל בסעיף i במטלה הטריגונומטרית.

בתיה רשמה:

$$S_{BCD} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3}{2}\alpha$$

$$2R^2 \cdot \sin 120 \cdot \sin 60 \cdot \sin 180 = 0$$

סתירה

בעניין אירוע ההוראה בתיה ציינה שרון וגילה התעלמו מהפתרון $\sin(180-60)$: "קיימת עוד אפשרות של הזווית α. $\alpha_2=180°-60°$. צריך לבדוק את כל האפשרויות ולפסול אחת מהן."

כמו כן בתיה ציינה שהתלמידים שגו שפסלו את הפתרון $\alpha=60°$:

> הטענה בשורה 11 אינה נכונה מכיוון שיש עוד אפשרות, כלומר שהנקודות E ו-O מתלכדות. זו שגיאה נפוצה כי התלמידים מתבססים על השרטוט שהוא בעצם נותן רק אפשרות אחת של הנתונים.

התייחסות לפסילת הפתרון $\alpha=60°$ וקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$ (שורה 3 בטבלה 2)

מטבלה 2 רואים כי מרבית הסטודנטים (10) התמקדו בשתי שגיאות בעת ניתוח אירוע ההוראה: פסילת הפתרון $\alpha=60°$ וקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה הטריגונומטרית כאשר ציין רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית. הסטודנטים האחרים (9) פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית בדרך שפתרה אנה. למשל, גל פתרה את סעיף ii בדרך דומה לפתרון של אנה (שימוש בכלים טריגונומטריים לצד בחינת שני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון $\alpha_2=120°$).

בעניין אירוע ההוראה גל ציינה שרון וגילה שגו שפסלו את הפתרון $\alpha=60°$:

> הם [התלמידים] קיבלו שזווית CBD ישרה ולכן מתקבל ש-CD הוא קוטר במעגל. התלמידים טענו שזה לא ייתכן כיוון שלמעגל יכולים להיות שני מרכזים. אבל אין שום נתון בשאלה שסותר שנקודות E ו-O מתלכדות (וכל שאר הזוויות מסתדרות עם זה).

בהמשך גל ציינה שהתלמידים שגו שקיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$:

> רון אמר שהם שכחו שיש פתרון נוסף למשוואה שקיבלו בשורה 6 והוא: $\alpha_2=120°$. זה רעיון נכון באופן כללי (כי גם $\alpha_1=60°$ וגם $\alpha_2=120°$ פותרים את המשוואה) אך במקרה זה $120°$ אינו יכול להיות פתרון.

מעניין לציין כי גל (כמו שלושה סטודנטים אחרים) ציינה לטובה שהתלמידים (רון וגילה) הפעילו בקרה על הפתרון שלהם. גל רשמה: "ייאמר לזכותם שהם לא הסתפקו בפתרון שלהם בהצבה עיוורת של המשתנים אלא אימצו ביקורתיות ובדקו שהפתרון שלהם הוא הגיוני. לרוע מזלם זה דווקא מה שהכשיל אותם."

התייחסות להתעלמות מהפתרון *sin(180–60)* (שורה 4 בטבלה 2)

שלושה סטודנטים דנו בשגיאה הראשונה של רון וגילה, התעלמות מהפתרון *sin(180-60)* (ראו טבלה 2). סטודנט אחד מתוך השלושה פתר את המטלה הטריגונומטרית פתרון דומה לפתרון של אנה. מעניין לציין כי שני הסטודנטים האחרים פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית והשתמשו בכלים טריגונומטריים כאשר התמקדו רק בדרך $\alpha=60°$ בעבור פתרון המשוואה הטריגונומטרית.

למשל, **פתרון המטלה הטריגונומטרית של דני:**

שלבי הפתרון של דני דומים לפתרון של אנה עד שורה ה (כולל). דני לא התייחס לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית (שורה ו–ז בפתרון של אנה) ורשם: $\alpha=60°$. לאחר מכן דני המשיך כמו אנה (שורה ט–טו בפתרון של אנה).

אציין כי פתרון זה היה הפתרון של כל שמונת הסטודנטים שהציגו למשוואה הטריגונומטרית רק את הפתרון $\alpha_1=60°$.

בהקשר לאירוע ההוראה, דני רשם: "אי אפשר להסיק ש-$\alpha_1=60°$ כפי שהתלמידים פתרו (שורה 7). צריך לבדוק גם את האופציה $\alpha_2=120°$ ואז לפסול אותה."

התייחסות לפסילת הפתרון $\alpha=60°$ (שורה 5 בטבלה 2)

מטבלה 2 אפשר לראות כי שלושה סטודנטים דנו בשגיאה של פסילת הפתרון $\alpha=60°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה תוך התייחסות לשתי התשובות המתאימות למשוואה הטריגונומטרית ופסילת התשובה שאינה מתאימה (כמו הפתרון של אנה). שני הסטודנטים האחרים פתרו את המטלה הטריגונומטרית תוך התייחסות רק לפתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית. סטודנטים אלו הציגו פתרון דומה לפתרון של דני. למשל, הלל פתר את המטלה הטריגונומטרית התייחסות רק לאפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית (הלל פתר פתרון דומה לפתרון של דני).

בעניין אירוע ההוראה הלל רשם לגבי כך שהתלמידים פסלו את הפתרון $\alpha=60°$: "התלמידים מצאו שזווית CBD היא זווית ישרה. חבל שלא חשבו על כך שהישר CD הוא קוטר ונקודה E מתלכדת עם מרכז המעגל O."

התייחסות לקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$ (שורה 6 בטבלה 2)

שני סטודנטים הבחינו באירוע ההוראה כי רון וגילה שגו שקבעו כי הפתרון הוא $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה הטריגונומטרית תוך התייחסות רק בפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרית $\alpha_1=60°$. הסטודנט הציג פתרון דומה לפתרון של דני. הסטודנט השני, עלי, הציג פתרון ייחודי לסעיף ii של המטלה הטריגונומטרית. עלי פתר סעיף זה תוך שימוש בכלים גאומטריים.

פתרון המטלה הטריגונומטרית של עלי:

$\triangle$ CBA	משולש ישר זווית (זווית C היא זווית היקפית על קוטר)
AB=2R	נתון
$CB=\sqrt{3}R$	נתון
$AC^2+CB^2=AB^2$	משפט פיתגורס
$AC^2+3R^2=4R^2$	
AC=R	
$\triangle$ ACO	משולש שווה צלעות
$\alpha=60°$	

יש לציין כי בדרך פתרון ייחודית זו, הפתרון $\alpha=60°$ מתקבל ישירות בלי צורך לדון בשני פתרונות ופסילת אחד מהם. בעניין אירוע ההוראה ושיח בין זוג התלמידים, עלי הזכיר רק שהתלמידים טעו שחשבו כי הפתרון הוא $\alpha_2=120°$. עלי הסביר זאת: "בשורה 13 התלמיד אומר שהפתרון הוא $\alpha=120°$ וזה לא נכון כי אז מקבלים שסכום הזוויות במשולש ישר הזווית ABC יהיה מעל 180°."

שינוי הפתרון הסופי מנכון לשגוי לאחר התנסות באירוע ההוראה

כפי שציינתי, סטודנט אחד (יוסי) הציג התייחסות שגוי כלפי אירוע ההוראה.
בפתרון המטלה הטריגונומטרית יוסי פתר את סעיף ii לצד שימוש בכלים טריגונומטריים וראה רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית. הפתרון של יוסי דומה לפתרון של שמונה הסטודנטים שפתרו את המטלה והשתמשו בכלים טריגונומטריים ללא התייחסות לאפשרות של $\alpha_2=120°$. מהתייחסותו של יוסי כלפי אירוע ההוראה, נראה כי יוסי השתכנע מהשיח של זוג התלמידים כי לא ייתכן ש-$\alpha_1=60°$ וקיבל את ההחלטה (השגויה) של זוג התלמידים כי $\alpha=120°$.

יוסי ראה כי התלמידים התעלמו מהפתרון *sin(180-60)*: "בשורה 7 הם רשמו $\alpha_1=60°$ ומשתמע שהם חשבו כי למשוואה בשורה 6 יש פתרון יחיד. למשוואה הטריגונומטרית בשורה 6 קיימים שני פתרונות בטווח שבין 0 ל-360."

תשובתו של יוסי נכונה, אך לאחר מכן יוסי רשם: "רק בשורות 13 ו-14 הם [התלמידים] רואים כי ייתכן גם הפתרון $\alpha_2=120°$, אם הם היו רואים זאת מראש זה לא היה יוצר להם את כל הבלגן ש-CD הוא קוטר".

יוסי שגה ולא הבחין כי הזווית α היא במשולש ישר זווית ABC ולכן לא ייתכן כי היא זווית קהה. נראה כי יוסי, כמו זוג התלמידים, לא הבחין ש-CD הוא קוטר במעגל וכי הנקודות E ו-O מתלכדות.

לסיכום, כל הסטודנטים (25) פתרו נכון (R=4) את המטלה הטריגונומטרית שהתבקשו לפתור. כשני שליש מהם (17) הציגו שלבי פתרון נכונים. שישה עשר סטודנטים השתמשו בכלים טריגונומטריים לפתרון המטלה, התייחסו לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ופסלו כנדרש את הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד השתמש בכלים גאומטריים לפתרון המטלה ולכן קיבל את הפתרון המתאים בעבור הזווית α. עם זאת כשליש מהסטודנטים (8) הציגו פתרון טריגונומטרי והתייחסו רק לפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרי שמתקבל בין 0° ל-90° ($\alpha=60°$).

מטבלה מספר 2 (שורה 4) אפשר לראות כי שני סטודנטים, מבין השמונה שהציגו פתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית, ציינו בניתוח אירוע ההוראה כי זוג התלמידים שגו שלא בחנו גם את הפתרון $(180-\alpha)$ והצדיקו את פסילתו. שני סטודנטים אחרים (שורה 3 ושורה 6 בטבלה 2) הבחינו שזוג התלמידים שגו שקיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$.

דיון ומסקנות

מאמר זה בחן שתי שאלות:

1. באילו דרכים סטודנטים המתכשרים להוראה במתמטיקה בבית ספר על-יסודי פותרים את המטלה הטריגונומטרית המהווה את הבסיס לאירוע ההוראה?
2. האם הסטודנטים מזהים את השגיאות שעלו בשיח בין זוג התלמידים באירוע ההוראה?

בחלק זה אסכם את הממצאים ואדון בשאלות אלה ואציג סוגיות פדגוגיות העולות מאירוע ההוראה ומתשובות הסטודנטים.

מהממצאים עולה כי כשליש מהסטודנטים התייחסו רק לפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרית ($\alpha_1=60°$). ייתכן שהצגת פתרון אחד בלבד נובעת מההתמקדות בנתוני הבעיה ומפסילה נכונה של הזווית הגדולה מ-90°, אך חשוב לציין כי בכתיבת פתרון המטלה יש להציג את שני הפתרונות

המתאימים ולנמק את הסיבה לפסילת אחד מהם. לפיכך הבקשה מהסטודנטים להעריך את דרך הפתרון של זוג התלמידים חשפה את כלל הסטודנטים לשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית (ובפרט אלה שציינו פתרון אחד בלבד למשוואה הטריגונומטרית). כך דיון עם הסטודנטים על אירוע ההוראה לצד שיח בין זוג התלמידים יכול להעמיק את הידע המתמטי שלהם וזאת נוסף על תרומה להיבטים אחרים של ידע פדגוגי, כגון ידע על דרכי חשיבה של לומדים (Leuders et al., 2018; Moyer & Milewicz, 2002; Prediger, 2010).

מעבר לדיון על פתרונות של משוואה טריגונומטרית והצעדים שיש לרשום בתהליך הפתרון, אירוע הוראה זה מעלה דילמה הנוגעת לתפקיד השרטוטים בהצגת מטלה ללומדים. השרטוט שליווה את המטלה אומנם מתאר מצב כללי אך מציג את הנקודות E ו-O כשתי נקודות שונות זו מזו. לעומת זאת בסעיף ii של המטלה הנקודות E ו-O מתלכדות והן אותה נקודה. מצב זה היה סיבה עיקרית לקושי של זוג התלמידים באירוע ההוראה. דיון שיכול לעלות בכיתת הסטודנטים מתוך בחינת שרטוט המוצג במטלה זו, יכול להתמקד בין השאר בהנחות לא מוצדקות של לומדים על שרטוטים גאומטריים, כמו למשל ההנחה כי O ו-E חייבות להיות נקודות שונות זו מזו. חשיפה לבעיות שמעודדות הנחות בלתי מוצדקות עשויה לעורר דיון פורה על שימוש נכון בשרטוט בעת פתרון בעיות בטריגונומטריה וגאומטריה (Dvora, 2012).

אלה הן שאלות שעולות במיוחד בעניין אירוע הוראה זה: האם נכון מבחינה מתמטית להציג את השרטוט כפי שהוצג במטלה זו? האם נכון מבחינה פדגוגית לעשות זאת? מהן חלופות מתאימות להצגת השרטוט למטלה? האם ראוי להציג שרטוט נפרד לכל אחד מחלקי המטלה הטריגונומטרית?

סוגיות אלה ראויות למחקר ולדיון עם סטודנטים להוראה, מורים ותלמידים.

לבסוף, במחקר זה הוזמנו סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי, לפתור מטלה טריגונומטרית שניתנה לתלמידים בכיתה י"א ולבחון אירוע הוראה המתמקד בפתרון של זוג תלמידים למטלה זו. אף לא אחד מהסטודנטים, במהלך הפתרון שהוא נתן למטלה הטריגונומטרית, התייחס לסוגיה הקשורה בהתלכדות הנקודות O ו-E (ואכן, אין צורך להתייחס לכך). עם זה, זוג התלמידים באירוע ההוראה הניחו הנחה לא מוצדקת ששתי הנקודות לא יכולות להתלכד.

אירוע ההוראה חשף את הסטודנטים להבדל בין דרך החשיבה שלהם על המטלה ובין דרך החשיבה של זוג התלמידים. מצב זה שיש בו הבדל בין דרך החשיבה של המורה לדרך החשיבה של התלמידים קורה לעיתים קרובות במהלך ההוראה ויש חשיבות שמורים לעתיד יהיו מודעים לכך ויכירו דרכי חשיבה אחרות של תלמידים (למשל, Zazkis, 2017; Zazkis & Herbst, 2018). אירועי הוראה מזמנים היכרות עם דרכי חשיבה של תלמידים (מרקוביץ, 2003; Smith & Friel, 2008).

נציין כי אירוע ההוראה שהוצג לסטודנטים במחקר זה מסתיים בכך שזוג התלמידים (רון וגילה) פוסלים את התשובה הנכונה בעבור הזווית α ומקבלים את התשובה השגויה ($\alpha_2=120°$). לפיכך זו הזדמנות לקיים דיון עם הסטודנטים בסוגיה: כיצד היו הם מתייחסים לאירוע ההוראה הזה אילו הם היו המורים בכיתה זו? האם היו מציגים לכל תלמידי הכיתה את שלבי הפתרון של זוג התלמידים (כולל הדילמה שלהם בין התוצאה לשרטוט) ומקיימים על כך דיון עם התלמידים? האם היו מגיבים נקודתית רק על תשובתם של רון וגילה? האם היו מציגים מטלה זו בכיתה?

במהלך ההכשרה של סטודנטים להוראה התמודדות עם אירועי הוראה המציגים פתרונות של תלמידים יכולה לספק הזדמנויות לדון בנושאים הקשורים הן בידע המתמטי שלהם והן במכשולים שתלמידיהם העתידיים עשויים להיתקל בהם בעת פתרון מטלות. אירוע הוראה זה יכול לעודד גם דיון בסוג המשימות הטריגונומטריות והגאומטריות הניתנות לתלמידי תיכון ולסוגיית השרטוטים המלווים משימות אלה. לפיכך הצגת אירועי הוראה הכוללים מקרים אמיתיים היא בהחלט אחת הדרכים לבחינת ממדים חיוניים של ידע הנדרש להוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

מרקוביץ, צ' (2003). **ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה**. מכון מופ"ת.

רותם, ס' ואיילון, מ' (2021). מודל לאפיון אירועים קריטיים שזוהו על ידי סטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשה. בתוך ב' זילברמן, נ' חן-חדד ות' עובדיה (עורכים), **כנס JCRME 9: ירושלים התשיעי למחקר בחינוך מתמטי (עמ' 85-89)**. ירושלים, ישראל. https://www.jct.ac.il/media/5855/ucrme_9_takzirim_21-16-%D7%A1%D7%A4%D7%A8-

Anderson, R. K., Boaler, J., & Dieckmann, J. A. (2018). Achieving elusive teacher change through challenging myths about learning: *A blended approach. Education Sciences*, 8(3), 1-33. https://doi.org/10.3390/educsci8030098

Ashlock, R. B. (2010). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student learn* (10th ed.). Charles E. Merrill.

Barnett, C. (1991). Building a case-based curriculum to enhance the pedagogical content knowledge of mathematics teachers. *Journal of Teacher Education, 42*(4), 263-272. https://doi.org/10.1177/002248719104200404

Bray, W. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 2-38. https://doi.org/10.5951/jresemathed-uc.42.1.0002

Heinze, A., & Reiss, K. (2007). Mistake-handling activities in the mathematics classroom: Effects of an in-service teacher training on students' performance in geometry. In J. H. Woo, H. C., Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 9-16). PME, Seoul, South Korea. https://www.emis.de/proceedings/PME31/3/9.pdf

Henningsen, M. (2008). Getting to know Catherine and David: Using a narrative classroom case to prmote inquiry and reflection on mathematics, teaching, and learning. In M. S. Smith & S. N. Friel (Eds.), *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching* (pp. 47-56). Association of Mathematics Teacher Educators.

Hill, H. C., Ball, L. D., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresemathed-uc.41.2.0169

Kazemi, E., Franke, M., & Lampert, M. (2009). Developing pedagogies in teacher education to support novice teachers' ability to enact ambitious instruction. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (Vol. 1, pp. 12-30). MERGA. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.589.9274&rep=rep1&type=pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics.* Information Age.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 2-8.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208. https://doi.org/10.2307/749507

Clements, M. A. K., Bishop, A. J, Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2013). *Third international handbook of mathematics education.* Springer-Verlag.

Conner, A., Wilson, P. S., & Kim, H. J. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM*, *43*(6-7), 979-992. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0362-1

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*(3), 206-214. https://doi.org/10.1016/j.learninr struc.2011.11.001

Dvora, T. (2012). *Unjustified assumptions in geometry made by high school students in Israel* [Doctoral dissertation]. Tel Aviv .University

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative growth: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal, 38*(3), 653-689. https://doi.org/10.3102/00028312038003653

Fritz, A., Haase, V. G., & Räsänen, P. (Eds.). (2019). *International handbook of mathematical learning difficulties from the laboratory to the classroom.* Springer.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24-58. https://doi.org/10.1076/1380-3611(200003)6:1;1-I;FT024

Grobe, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, *17*(6), 612-634. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (Eds.). (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Routledge.

Rotem, S., & Ayalon, M. (2018). Using critical events in pre-service training: Examining the coherence level between interpretations of students' mathematical thinking and interpretations of teachers' responses. In E. Bergqvist, M. Osterholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceeding of the 42nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 51-58). PME.

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(1), Article 4. https://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM*, *43*(1), 133-145. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3

Schoenfeld, A. H. (2020). Reframing teacher knowledge: A research and development agenda. *ZDM, 52*(1), 359-376. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01057-5

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silver, E. A., Clark, L. M., Gosen, D. L., & Mills, V. (2008). Using narrative cases in mathematics teacher professional development: Strategic selection and facilitation issues1. In M. S. Smith & S. N. Friel (Eds.), *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching* (Vol. 4, pp. 89-102). Association of Mathematics Teacher Educators, San Diego State University.

Smith, M. S., & Friel, S. (Eds.). (2008). *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching*. Association of Mathematics Teacher Educators, San Diego State University.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. S., & Barkai, R. (2019). Using theories and research to analyze a case: Learning about example use. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*, 205-225. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9386-y

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J., & Philipp, K. (2018). Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct. In T. Leuders, K., Philipp, & J. Leuders (Eds.), *Diagnostic competence of mathematics teachers* (pp. 3-31). Springer.

Lin, P. J. (2005). Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(3), 351-377. https://doi.org/10.1007/s10763-004-8369-5

Markovitz, Z. (2008). Is 1¼ the consecutive of ¼? Mathematics classroom situations as part of math lessons. *Mathematics in School*, *37*(1), 10-12. https://doi.org/10.2307/30216087

Markovitz, Z., & Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In T. Wood (Ed.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 39-64). Sense.

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 293-315. https://doi.org/10.1023/A:1021251912775

Pang, J. (2011). Case-based pedagogy for prospective teachers to learn how to teach elementary mathematics in Korea. *ZDM, 43*(6), 777-789. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0352-3

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Rach, S., Ufer, S., & Heize, A. (2012). Learning from errors: Effects of a teacher training on students' attitudes towards and their individual use of errors. In T. Y. Tso (Ed.), *Opportunities to learn in mathematics education: Proceedings of the 36th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3., pp. 329-336). PME.

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

van Es, A. E., Tunnet, J., Goldsmith, T. L., & Seago, N. (2014). A Framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 340-356. https://doi.org/10.1177/0022487114534266

Walen, S. B., & Williams, S. R. (2000). Validating classroom issues: Case method in support of teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(1), 3-26. https://doi.org/10.1023/A:1009917510318

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Zazkis, R. (2017). Lesson play tasks as a creative venture for teachers and teacher educators. *ZDM, 49*(1), 95-105. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0808-6

Zazkis, R., & Herbst, P. (Eds.). (2018). *Scripting approaches in mathematics education: Mathematical dialogues in research and practice*. Springer.