קרני שיר

אוכל טוב הוא לא זול: מחקר זוטא לאפיון וסיווג תפיסות של פרחי הוראה הקשורות למשפטי תנאי

תקציר

אתה נמצא בעיר זרה שאתה לא מכיר ומרגיש רעב. על שפת הנהר, בשני צידי הרחוב, יש שתי מסעדות. שתי המסעדות נראות יפה, משתיהן בוקעת מוסיקה נעימה ובשתיהן יש אותו מספר סועדים פחות או יותר. ההבדל היחיד בין המסעדות הוא השלט שתלוי בכניסה למסעדה. בשלט של **מסעדה א'** כתוב: "אוכל טוב הוא לא זול". בשלט של **מסעדה ב'** כתוב: "אוכל זול הוא לא טוב". באיזו מסעדה תבחר לאכול?

הבעיה המתוארת היא הרחבה של טענה מפורסמת בתחום הלוגיקה המתמטית. הבעיה הוצגה לפרחי הוראה הלומדים לתואר הוראת מתמטיקה בקורס "מבוא ללוגיקה" כדי לעמוד על תפיסות אינטואיטיביות שלהם כלפי כלל ההיסק הלוגי "קונטרה-פוזיטיב". במאמר יוצג הרקע המתמטי לבעיה; יידונו כמה מההבדלים בין המשמעות היומיומית של פסוקים והמשמעות המתמטית שלהם; ויוצגו הממצאים שעלו מתגובותיהם של פרחי ההוראה והנימוקים שהשתמשו בהם כדי להצדיק את קביעתם באשר לפירוש אינטואיטיבי של משמעות משפטי תנאי.

מילות מפתח:

לוגיקה; משפטי תנאי; כללי היסק.

מבוא

שפה היא מערכת סמלים המשמשת לארגון מידע, חשיבה, למידה ובעיקר לתקשורת. השפה המתמטית משמשת כדי לתקשר רעיונות מתמטיים ברמת הפשטה גבוהה. היא נשענת על שפה טבעית (כגון עברית, אנגלית או כל שפה אחרת), בתוספת סמלים וחוקים המוגדרים בשפה המתמטית עצמה. שלא כשפות הטבעיות שהילדים רוכשים אותן מתוך חשיפה אליהן, את השפה המתמטית יש ללמוד והיא חיונית לפיתוח מיומנויות מתמטיות מגוונות (גביש, 2008; Riccomini et al., 2015).

השפה המתמטית יכולה להיות לעיתים מבלבלת או לא פשוטה להבנה. בלבול יכול להיווצר כאשר משמעות מתמטית של מילה, ביטוי או משפט שונה מהמשמעות היומיומית שלו. כדי להימנע ממצבים אלה יש ללמוד את כללי השפה ולהבין כיצד להשתמש בה נכון. דוגמה לבלבול כזה אפשר לראות במשמעות השונה שיש למונח "קבוצה" במתמטיקה לעומת הפרשנות היומיומית של מילה זו. קבוצה היא "אוסף של עצמים" אך בעוד בשפה המתמטית אוסף זה יכול להיות גם בין איבר אחד או אפילו לא לכלול אף איבר (הקבוצה הריקה), במשמעות היומיומית נהוג לראות בקבוצה אוסף של שני איברים או יותר (המורה לא תצפה שיהיה ילד שיעמוד לבד כאשר היא מבקשת מתלמידי הכיתה "להסתדר בקבוצות"). למרות הקושי והבלבול, פיתוח השיח המתמטי של הלומד מאפשר לו להשתמש במושגים המתמטיים בדרך המקובלת בקהילייה המתמטית (נחליאלי וטבח, 2016), ובד בבד תורם להתפתחות האוריינית שלו (Purpura at al., 2017).

הלוגיקה המתמטית היא תת-שדה של המתמטיקה שבה מתבטאת השפה הפורמלית של המתמטיקה. בהיותה כזו, הלוגיקה מתמקדת בהתבוננות מטה-מתמטית במערכת היחסים בין פסוקים, סימנים, כמתים, קשרים ועוד - שהם מרכיבים של השפה המתמטית. על הלוגיקה נאמר כי היא המקום שבו המתמטיקה חוקרת את עצמה (אלכסנדרוביץ, 2012).

ללימודי לוגיקה מתמטית חשיבות רבה בפיתוח מיומנויות חשיבה מסדר גבוה. שלא כמו בישראל, תוכנית הלימודים לתואר ראשון בארצות הברית מכילה תחומים רבים מעבר למסלול הלימוד המרכזי של הסטודנט. אחד מנושאי החובה הנלמדים על רקע לימודי הסטודנטים לתואר ראשון כלשהו הוא מתמטיקה, כאשר החשיבה הלוגית היא חלק מרכזי מקורס חובה זה. הכללת תחום הלוגיקה בחלק המתמטי של הדרישות החינוכיות הכלליות בארצות הברית היא על פי התפיסה כי אי אפשר להחליף את לימוד המתמטיקה בכל פעילות אחרת שתכשיר ותפתח את החשיבה ההגיונית של האדם באותה רמה של רציונליות (Attridge at al., 2015; Griffiths & Peitz, 2016).

על מהותה של הלוגיקה המתמטית

מקורו של המונח לוגיקה מהמילה היוונית לוגוס (λόγος) שמשמעותה ההיגיון שעומד מאחורי טיעון (לעיתים החלופה העברית של המילה "לוגיקה" היא "תורת ההיגיון"). הלוגיקה מתמקדת בניתוח דרכי החשיבה, ובעזרת כללי הלוגיקה המתמטית אפשר לבחון קשרים בין טענות למיניהן ולהסיק מסקנות (Mendelson, 2010). הטענות האלה שדנים בקשרים ביניהן, נקראות בשפה המתמטית "פסוקים" והלוגיקה המתמטית עוסקת בתחשיב הפסוקים ובתקפותן של טענות.

התנ"ך נפתח בפסוק "בראשית ברא אלוהים את השמים ואת הארץ", ועל אף שפסוק זה הוא גם פסוק לפי האופן שמוגדר פסוק במתמטיקה, לא כל הפסוקים בתנ"ך עונים על ההגדרה של פסוק על פי הלוגיקה המתמטית.

אז מהו פסוק מתמטי? פסוק או פסוק חיווי הוא משפט בשפה המדוברת המכיל הצהרה ומסתיים בדרך כלל בנקודה (שריקי ומובשוביץ-הדר, 2012). כלומר משפט שיש בו טענה כלשהי. להלן דוגמאות מספר למשפטים שהם פסוקים:

1. 15+3=18
2. ירושלים היא בירת ישראל.
3. לישראל ולצרפת יש גבול משותף.

4. לאחי קוראים יואב.
5. סוג הדם של דוד המלך הוא B.

אפשר לראות כי בכל אחד מהמשפטים האלה יש טענה כלשהי או מסירת מידע.

במשפטים כגון "הרצחת וגם ירשת?" או "תהיו בשקט!" אין טענה או מסירת מידע ולכן הם אינם נקראים פסוקים.

תכונה חשובה של פסוקים היא שיש להם ערך: אמת או שקר בכל הקשר (ברגר וגינזבורג, 1994). כלומר עבור כל אחד מהפסוקים אפשר לומר אם הוא נכון (ואז ערכו אמת) או לא נכון (ואז ערכו שקר).

אם נתבונן בחמשת הפסוקים שהוצגו לעיל, ערך שני הפסוקים הראשונים "15+3=18" ו"ירושלים היא בירת ישראל" הוא אמת. ערך הפסוק השלישי "לישראל וצרפת יש גבול משותף" הוא שקר. ערך הפסוק הרביעי "לאחי קוראים יואב" אמת אם למי שאמר אותו יש אח ששמו יואב, וערכו שקר אם למי שאמר אותו אין אח בשם זה. ערך האמת של הפסוק החמישי אינו ידוע מכיוון שאי אפשר לדעת האם סוג הדם של דוד המלך הוא אכן B, אך על אף שאי אפשר לדעת מהו ערך הפסוק, יש לפסוק זה ערך. בדומה גם המשפט "מספר התושבים במלטה הוא 413,991" הוא פסוק בעל ערך אף שקשה מאוד לדעת מה ערכו (אולי ברגע שערך הפסוק נבדק נפטר מישהו או נולד תינוק). לסיכום, טענה ומשפט חיווי הם פסוקים בעלי ערך גם אם אי אפשר לדעת מה ערכם. במילים אחרות, משפט הוא פסוק אם אפשר לומר עליו אם הוא נכון או לא נכון (גם אם לא ידוע ערכו).

קשרים בין פסוקים

הפסוקים שהוצגו עד כה הם פסוקים פשוטים מבחינה לוגית. כלומר פסוקים המכילים נושא ונשוא ולפעמים גם תיאור כלשהו אבל לא יותר מזה (שריקי ומובשוביץ-הדר, 2012). פסוקים מסוג זה הם אבני היסוד של השפה המתמטית (לויתן, 2012). כדי לבנות פסוקים מורכבים, מחברים פסוקים פשוטים זה אל זה בעזרת קשרים.

שלילה של פסוק

נתבונן בפסוק "ירושלים היא בירת ישראל" שהוצג לעיל. השלילה של פסוק זה היא הפסוק "ירושלים איננה בירת ישראל". אם ערך הפסוק "ירושלים היא בירת ישראל" הוא אמת (True) אזי ערך הפסוק השני "ירושלים איננה בירת ישראל" הוא שקר (False). כלומר ערך שלילה של פסוק מסוים הוא בדיוק ההפך מערך הפסוק המקורי. אם ערך הפסוק המקורי הוא אמת אז ערך פסוק השלילה של פסוק זה הוא שקר, ואם ערך הפסוק המקורי הוא שקר, אז ערך פסוק השלילה של פסוק זה יהיה אמת.

קשר השלילה הוא קשר אונרי (המושג אונרי נשען על הספרה "אחת"), הוא פועל על פסוק אחד בלבד. בדומה, פעולה אונרית פועלת רק על מספר אחד (העלאה בריבוע או מציאת ערך מוחלט הן פעולות אונריות הפועלות רק על איבר אחד בקבוצה. לעומתן, חיבור או כפל שהן פעולות בינריות, פועלות על שני מספרים).

הקשר "וגם" (ו"ו החיבור)

הקשר "וגם" (וו החיבור) הוא קשר בינרי שמקשר שני פסוקים. לדוגמה, אפשר לחבר את שני הפסוקים "נסעתי לעבודה" ו"שתיתי קפה" לפסוק מורכב באמצעות השימוש בקשר "וגם" בדרך הזו: "נסעתי לעבודה ושתיתי קפה". הערך של הפסוק המורכב המתקבל יהיה אמת רק כאשר הערך של כל אחד משני הפסוקים המרכיבים אותו הוא אמת. כלומר הפסוק המורכב "נסעתי לעבודה ושתיתי קפה" הוא פסוק אמת רק כאשר ערך כל אחד משני הפסוקים "נסעתי לעבודה" ו"שתיתי קפה" גם אמת.

שלא כשפה המתמטית שבה שני הפסוקים "נסעתי לעבודה ושתיתי קפה" (1) ו"שתיתי קפה ונסעתי לעבודה" (2) שקולים זה לזה (כלומר מכל אחד מהם אפשר להסיק את משנהו), בשפה היומיומית הדבורה יש לשני הפסוקים האלה משמעות שונה לחלוטין. מפסוק 1 אפשר להבין שקודם נסעתי לעבודה ואחר כך שתיתי קפה, ואילו מפסוק 2 נובע שסדר הדברים הוא הפוך. כלומר קודם שתיתי קפה ורק אחר כך נסעתי לעבודה.

הקשר "או"

בדומה לקשר "וגם", הקשר הלוגי "או" גם הוא קשר בינרי שמקשר שני פסוקים. את שני הפסוקים "נסעתי לעבודה" ו"שתיתי קפה" נוכל לחבר לפסוק מורכב באמצעות השימוש בקשר "או" בדרך הזו: "נסעתי לעבודה או שתיתי קפה". כדי שהערך של הפסוק המורכב יהיה אמת מספיק שיתקיים שהערך של אחד מהפסוקים המרכיבים אותו יהיה אמת. כלומר הפסוק המורכב "נסעתי לעבודה או שתיתי קפה" הוא פסוק אמת אם אכן

"נסעתי לעבודה" (כלומר פסוק זה הוא פסוק אמת) או ש"שתיתי קפה" (פסוק זה הוא פסוק אמת) או **ששניהם** אמת. מה שכן, בשפה היומיומית הדבורה כאשר אומרים "אכלתי מרק או סלט" מתכוונים לרוב שאכלנו רק אחד מהשניים: או מרק או סלט, בעוד מבחינה לוגית ייתכן שאכלנו גם מרק וגם סלט וערך הפסוק "אכלתי מרק או סלט" יהיה אמת.

פסוקי תנאי

פסוקי תנאי הם פסוקים שמבטאים קשר של גרירה. לפסוקי תנאי יש את התבנית הזו: "אם A אז B" (כאשר A ו-B הם שני פסוקים). לדוגמה: "אם תצליח במבחן, אז אני אקנה לך גלידה". פסוקי תנאי נפוצים מאוד בשפה היומיומית, וכמובן גם בשפה המתמטית. בדרך כלל הוכחת נכונות טענה היא תוצאה של מסקנה הנובעת מהנחות מסוימות. כלומר מוכיחים טענה שבה מראים איך המסקנה נובעת מההנחות. הווה אומר, מראים ש**אם** ההנחות נכונות, **אז** המסקנה גם נכונה (לויתן, 2012). מכיוון שמתמטיקאים עוסקים הרבה גם בהוכחה של טענות, כאלו שעדיין לא הוכחו או כאלו שמחפשים להן הוכחה פשוטה או קצרה יותר, פסוקי התנאי משמשים תדיר את המתמטיקאים בעבודתם והם עיקר בשפה המתמטית.

כדי לדעת מתי פסוק תנאי נכון, אפשר לראות בו סוג של הבטחה (Ramsey, 2016). ערך משפט התנאי יהיה נכון אם ההבטחה קוימה, ושקר כאשר ההבטחה לא קוימה. נתבונן שוב בפסוק "אם תצליח במבחן, אז אני אקנה לך גלידה". פסוק מורכב זה בנוי משני פסוקים פשוטים: A = הצלחת במבחן; B = קניתי לך גלידה.

אם הצלחת במבחן (ערך פסוק A הוא אמת) וקניתי לך גלידה (ערך פסוק B גם הוא אמת), ההבטחה קוימה, ואז ערך הפסוק המורכב כולו הוא אמת.

אם הצלחת במבחן (ערך פסוק A הוא אמת) ולא קניתי לך גלידה (ערך פסוק B הוא שקר), ההבטחה לא קוימה, ואז ערך הפסוק המורכב כולו הוא שקר.

אם לא הצלחת במבחן (ערך פסוק A הוא שקר) ולא קניתי לך גלידה (ערך פסוק B גם הוא שקר), ההבטחה **לא הופרה**, ואז ערך הפסוק המורכב כולו הוא אמת.

השאלה המעניינת יותר כאן היא מה קורה אם לא הצלחת במבחן (ערך פסוק A הוא שקר) ובכל זאת כן קניתי לך גלידה (ערך פסוק B הוא אמת) - האם ערך הפסוק כולו כאן הוא אמת או שקר?

מבחינת האופן שנתפס הפסוק בשפה היומיומית, יהיו כאלו שיגידו שערך הפסוק הוא שקר מכיוון שמהפסוק "אם תצליח במבחן, אז אני אקנה לך גלידה" יכול להשתמע הפסוק "אם לא תצליח במבחן, אז אני לא אקנה לך גלידה". כלומר מפסוק שמבנהו הוא "אם A אז B", יכול להיראות שמשתמע הפסוק "אם לא A אז לא B", אבל אי אפשר להסיק מכך. לדוגמה יש מקום לומר ש"אם אתה רב אז אתה יהודי" אבל מכאן לא משתמע ש"אם אתה לא רב אז אתה לא יהודי".

עוד שגיאה נפוצה היא המסקנה שפסוק שקול לפסוק ההפוך לו. כלומר אם אמרתי לך ש"אם תצליח במבחן אז אני אקנה לך גלידה" אז מכאן ש"אם קניתי לך גלידה, סימן שהצלחת במבחן". שני פסוקים כגון אלה נקראים במתמטיקה "פסוק" ו"פסוק הפוך" (או "טענה"/"טענה הפוכה", "משפט"/"משפט הפוך"). מכיוון שפסוק והפסוק ההפוך לו לא בהכרח שקולים זה לזה, בוודאי שאי אפשר לומר שהפסוק השני משתמע מהראשון. המסקנה מהפסוק "אם A אז B" ש"אם B אז A" היא שגיאה די נפוצה הנובעת כנראה מתחושת סימטרייה לשונית או שימוש לא קפדני בפסוק התנאי "אם... אז ..." בשפה היומיומית (שריקי ומובשוביץ-הדר, 2012).

יש פעמים שבהן טענה וטענה הפוכה יהיו שתיהן בעלות ערך אמת, ואף שקולות זו לזו. לדוגמה שתי הטענות האלה "אם המשולש הוא שווה שוקיים, אז זוויות הבסיס שלו שוות" והטענה ההפוכה לה "אם שתי זוויות במשולש שוות, אז המשולש הוא שווה שוקיים" הן בעלות ערך אמת. אך זה לא בהכרח נכון תמיד.

נסתכל בשתי הטענות האלה: (א) "אם אני גרה בחיפה, אז אני גרה צפונית לתל אביב"; (ב) "אם אני גרה צפונית לתל אביב, אז אני גרה בחיפה". הערך של טענה א' הוא אמת, בעוד טענה ב' לא בהכרח נכונה. אם אני גרה צפונית לתל אביב, יכול להיות שאני גרה בחדרה, נתניה, הרצליה וכו', ולאו דווקא גרה בחיפה. כלומר כאן ברור ששתי הטענות אינן שקולות.

נחזור לפסוק שאנחנו דנים בו: "אם תצליח במבחן, אז אני אקנה לך גלידה". ולשאלה - מה יהיה ערך הפסוק כולו כאשר לא הצלחת במבחן, אבל כן קניתי לך גלידה. כפי שנאמר קודם, כדי לדעת אם ערך הפסוק כולו הוא אמת או שקר עלינו לחזור לפסוק המקורי ולבדוק האם ההבטחה קוימה או הופרה. אם לא הצלחת במבחן ובכל

זאת קניתי לך גלידה אז אומנם הייתי נדיבה, כי לא הייתי חייבת לקנות לך גלידה, אבל ההבטחה שהבטחתי לא הופרה ולכן ערך הפסוק המורכב כולו הוא אמת.

כללי היסק

מודוס-פוננס ומודוס-טולנס הם שני כללי היסק שגם בלי להכיר את השם הרשמי שלהם נעשה בהם שימוש רב הן בחיי היומיום והן במתמטיקה.

כלל ההיסק הראשון נקרא **מודוס פוננס**. אם הבטחתי לילד שלי שאם הוא יצליח במבחן אז אני אקנה לו גלידה והוא הצליח במבחן, נסיק מכך שאני אקנה לו גלידה. כלומר במקרה של מודוס פוננס אם יש משפט תנאי והתנאי מתקיים, אז נסיק שהתוצאה תתקיים.

כלל ההיסק השני נקרא **מודוס טולנס**. אם הבטחתי לילד שלי שאם הוא יצליח במבחן אז אני אקנה לו גלידה וידוע שלא קניתי לו גלידה, נסיק מכך שהוא לא הצליח במבחן. כלומר במקרה של מודוס טולנס אם יש משפט תנאי וידוע שהתוצאה לא התקיימה, אז נסיק שהתנאי עצמו לא התקיים.

נתבונן בדוגמה להלן: ידוע שאם אבי אוכל מנת פלאפל אז הוא שבע.

אם אנחנו יודעים שאבי אכל מנת פלאפל, נסיק שהוא שבע (מודוס פונוס), ואם אנחנו יודעים שאבי לא שבע, נסיק שהוא לא אכל מנת פלאפל (מודוס טולנס), כי אם הוא כן היה אוכל מנת פלאפל הוא היה שבע.

בעזרת שני כללי ההיסק האלה אפשר לנסח שתי טענות השקולות זו לזו: (1) אם אבי אוכל מנת פלאפל אז הוא שבע; (2) אם אבי לא שבע אז סימן שהוא לא אכל מנת פלאפל.

בדומה נוכל גם לנסח שתי טענות אחרות שגם תהיינה שקולות זו לזו: (1) אם תצליח במבחן אז אני אקנה לך גלידה; (2) אם לא קניתי לך גלידה אז סימן שלא הצלחת במבחן.

בדרך כלל עבור פסוקים A ו-B כלשהם נוכל לנסח שתי טענות: "אם A אז B", "אם לא B אז לא A", ושתי הטענות האלה תהיינה שקולות זו לזו ובעלות אותה המשמעות (ראו נספח א להוכחה המתמטית של שקילות שתי הטענות האלה באמצעות טבלאות אמת). שתי הטענות האלה הן פסוקי תנאי המבטאים את אותו הדבר בדיוק. ההבדל בין שני הפסוקים האלה הוא שההנחה והתוצאה החליפו תפקידים בשעה שנוספה לשניהם שלילה בפסוק השני. מקובל לומר ששני הפסוקים האלה הם **קונטרה-פוזיטיב** זה של זה (שריקי ומובשוביץ-הדר, 2012).

אז באיזה מסעדה כדאי לנו לבחור?

הסטודנטים התבקשו לבחור מסעדה שהיו יושבים לאכול בה ואלה הן שתי הטענות: "אוכל טוב הוא לא זול", "אוכל זול הוא לא טוב". שתי הטענות האלה הן משפטי תנאי. כדי להקל על הבנת החלק של התנאי והחלק של התוצאה וגם להצליח לעמוד בקלות רבה על מערכת הגומלין בין שתי הטענות, ננסח את הטענות מעט אחרת אך עדיין בלי לשנות אותן בדרך הזו:

במקום לכתוב "אוכל טוב הוא לא זול" נכתוב "אם האוכל טוב אז הוא לא זול", ובמקום לכתוב "אוכל זול הוא לא טוב" נכתוב "אם האוכל זול אז הוא לא טוב".

לפסוק "האוכל טוב" נקרא פסוק A, לפסוק "האוכל לא זול" נקרא פסוק B, ואז את הפסוק הראשון "אם האוכל טוב, אז הוא לא זול" נוכל לכתוב בדרך זו: "אם A אז B".

הפסוק "האוכל לא טוב" הוא השלילה של הפסוק "האוכל טוב", והפסוק "האוכל זול" הוא השלילה של הפסוק "האוכל לא זול". היות שקראנו לפסוק "האוכל טוב" בשם A, לפסוק "האוכל לא טוב" אפשר לקרוא לו A. בדומה, היות שקראנו לפסוק "האוכל לא זול" בשם B, לפסוק "האוכל זול" אפשר לקרוא לו B. את הפסוק השני "אם האוכל זול, אז הוא לא טוב" נוכל לכתוב בדרך הזו: "אם לא B אז לא A".

ההצרנה (רישום והצגה באמצעות סמלים מתמטיים) של שני הפסוקים "אוכל טוב הוא לא זול" ו"אוכל זול הוא לא טוב" הביאה אותנו אל שני הפסוקים "אם A אז B" ו"אם לא B אז לא A" שראינו כבר כי הם שקולים, ומכאן נובע כי **מבחינה מתמטית, שני השלטים שנמצאים בכניסה לשתי המסעדות טוענים בעצם את אותה טענה ובעצם אין שום הבדל בין שתי המסעדות.**

האם גם אתם חשבתם כך כשקראתם את הבעיה לראשונה, או אולי חשבתם דווקא משהו אחר? נציג כעת את מחקר-הזוטא בנושא שנעשה עם פרחי ההוראה.

תיאור המחקר

מטרת מחקר הזוטא המתואר היא לאפיין את האופן שתופסים פרחי הוראה למתמטיקה **שני פסוקים שקולים** המספקים קונטרה-פוזיטיב זה של זה, והנימוקים שהם משתמשים בהם כדי לנמק את קביעתם.

במחקר הזוטא השתתפו 41 פרחי הוראה שלמדו בקורסים "לוגיקה" ו"מבוא ללוגיקה" במכללת שאנן. הנתונים נאספו מתוך שאלון שחולק לפרחי ההוראה.

להלן הבעיה שהוצגה בשאלון:

אתה נמצא בעיר זרה שאתה לא מכיר, ומרגיש רעב. על שפת הנהר, בשני צידי הרחוב, יש שתי מסעדות. שתי המסעדות נראות יפה, משתיהן בוקעת מוסיקה נעימה ובשתיהן פחות או יותר אותה כמות של סועדים. ההבדל היחיד בין המסעדות הוא השלט שתלוי בכניסה למסעדה. בשלט של **מסעדה א'** כתוב: "אוכל טוב הוא לא זול". בשלט של **מסעדה ב'** כתוב: "אוכל זול הוא לא טוב". באיזו מסעדה תבחר לאכול ומדוע?

(התמונה מתוך Barcellona, 2017)

כפי שאפשר לראות, פרחי ההוראה התבקשו לכתוב באיזו מסעדה היו בוחרים ולנמק את קביעתם. תשובות פרחי ההוראה נאספו והנימוקים שכתבו להצדקת הקביעה שלהם חולקו לקטגוריות.

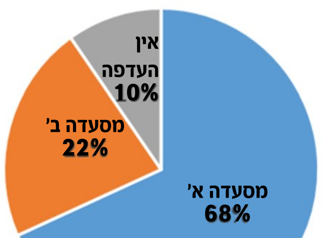
ממצאים ודיון

להלן טבלה המתארת את התפלגות ההעדפות של 41 פרחי ההוראה כפי שעלה בשאלונים:

טבלה א: התפלגויות ההעדפות של פרחי ההוראה

מסעדה א' אוכל טוב הוא לא זול	מסעדה ב' אוכל זול הוא לא טוב	אין העדפה	סך הכול
28	9	4	41
68%	22%	10%	100%

אף שהכתוב בשני השלטים של שתי המסעדות הוא שקול, רק 4 פרחי הוראה כתבו במילים אלו או אחרות כי שני המשפטים שקולים זה לזה ולכן אין הבדל בין שתי המסעדות. 28 פרחי הוראה (68%) כתבו שיעדיפו ללכת לאכול במסעדה א', ואילו 9 פרחי הוראה (22%) כתבו שיבחרו לאכול דווקא במסעדה ב'.



דיאגרמה א:
התפלגות תשובות פרחי ההוראה

יש מקום לראות כי כמעט כל פרחי ההוראה לא היו ערים לשקילות הלוגית של שני הפסוקים.

הקושי בהבנת כללי ההיסק אינו נחלתם רק של פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר הזוטא המתואר. קשיים בהבנת שקילויות נצפו בעבר גם אצל תלמידים (Hadar, 1977), אך יתרה מזו - במחקר שהשתתפו בו

72 מדענים העובדים באחת האוניברסיטאות במרכז ארה"ב נמצא כי כמעט מחצית מהם לא הצליחו להבחין בתוקפם של כללי היסק (Kern et al., 1983).

לאחר בחירת המסעדה שירצו לאכול בה, היה על פרחי ההוראה לתת הסבר מילולי לקביעתם. מתוך ההסברים המילוליים לבחירת מסעדה שכתבו פרחי ההוראה עלו 110 נימוקים מגוונים. כדי לעמוד יותר לעומק על הסיבות להעדפה של אחת מהמסעדות, 110 הנימוקים שעלו סווגו לקטגוריות.

סיווג הנימוקים לקטגוריה הראה ארבע קבוצות עיקריות של נימוקים לבחירת מסעדה: (א) בחירה המסעדה כי הפרשנות של פרחי ההוראה הייתה שהאוכל בה טוב; (ב) בחירת המסעדה בשל הנימה החיובית שעלתה מתוך השלט בכניסה אליה; (ג) בחינת שקילות של שתי המסעדות; (ד) נימוקים אחרים.

קטגוריה א: השיקול לבחירת המסעדה - האוכל בה טוב

הנימוק הנפוץ ביותר להעדפת מסעדה מסוימת בידי פרחי ההוראה נובע מהפירוש שהם נתנו לשלט העומד בכניסה למסעדה, ותפיסתם את השלט כאומר: במסעדה זו מגישים אוכל טוב. מה שכן, חלק מפרחי ההוראה הבינו את השלטים כך שהאוכל במסעדה א' הוא אוכל טוב, בעוד אחרים הבינו מאותם שלטים בדיוק את ההפך – שהאוכל במסעדה ב' הוא דווקא זה שהוא טוב. פירוש זה בא לידי ביטוי ב-21 נימוקים לבחירת מסעדה א' ו-7 נימוקים לבחירת מסעדה ב'.

להלן כמה ציטוטים של נימוקים שהעלו פרחי ההוראה ושייכים לקטגוריה זו:

נימוקים בעד בחירת מסעדה א'

> אומנם משלמים יקר אבל **זה אוכל טוב**. במסעדה השנייה האוכל הוא זול אבל לא איכותי.
>
> כי הנושא הוא אוכל טוב, וזה נותן ביטחון. **האוכל שם הוא בטוח טוב** לעומת מסעדה ב' ששם זה רק סיסמה הגיונית.
>
> היא מייצגת לפי דעתי **אוכל טוב** שאולי כנראה קיים אצלם כי אותו הם רוצים אולי לשווק, ואילו במסעדה ב' אומנם קטלגו את האוכל הזול אך מי אמר שיש להם אוכל טוב? צריך לרשום משהו שמשקף את המסעדה.
>
> כיוון שמהשלט מבינים **שיש אוכל טוב במסעדה**, ולגבי עניין הזול - מחיר זול זה עניין יחסי ולא בטוח שמה שיקר לאחר יקר לי ולהפך. בכל מקרה הייתי נכנסת למקום טוב גם אם הוא יקר יותר כי אני רוצה לאכול וליהנות.

נימוקים בעד בחירת מסעדה ב'

> על פי השלט ניכר שהמסעדה חשוב לה איכות האוכל, בזה שהיא אומרת שאוכל זול הוא לא טוב משמע שהאוכל שם יקר אך **בטח איכותי וטוב**.
>
> כשאני קוראת את הכתוב על מסעדה ב' אני מבינה שמגישים **אוכל טוב** ולא זול ושעדיף ליהנות במקום לא זול העיקר שיהיה אוכל טוב. במסעדה א' מהרשום אני מבינה שלאו דווקא מגישים שם אוכל טוב.
>
> אצלם **האוכל הוא טוב**. הם רק אומרים שאוכל זול הוא לא טוב ולכן כדאי להגיע אליהם.

קטגוריה ב: השיקול לבחירת המסעדה - הנימה החיובית של השלט בכניסה למסעדה

על אף השקילות הלוגית של שני הפסוקים, נימוק שחזר על עצמו אצל פרחי ההוראה שכתבו שיבחרו לאכול במסעדה א', היה ההתרשמות שלהם מהנימה החיובית של השלט בכניסה למסעדה. פירוש זה בא לידי ביטוי ב-19 נימוקים שהעלו פרחי ההוראה.

להלן כמה ציטוטים של נימוקים שהעלו פרחי ההוראה ושייכים לקטגוריה זו:

> הכיתוב מנוסח בצורה חיובית יותר. "אוכל טוב" ולא "אוכל לא טוב", כלומר יש אוכל טוב במסעדה א', אומנם יקר. במסעדה ב' לא ידוע איזה אוכל יש.
>
> על פי השלט ניכר שהמסעדה חשוב לה איכות האוכל.
>
> יש דגש על חיובי, טוב למרות שיהיה יקר.

הכיתוב מנוסח בצורה חיובית יותר. אוכל טוב ולא אוכל לא טוב, כלומר יש אוכל טוב.
במסעדה א' אומנם יקר. במסעדה ב' לא ידוע איזה אוכל יש.

המשפט מתחיל עם מילים חיוביות ואופטימיות.

קטגוריה ג: שקילות

מספר פרחי הוראה שמו לב לשקילות הלוגית של שני השלטים, ועסקו בשקילות זו בנימוקים שהעלו. סך הכול היו 6 נימוקים השייכים לקטגוריה זו.

להלן כמה ציטוטים של נימוקים שהעלו פרחי ההוראה, ושייכים לקטגוריה זו:

באופן כללי זה אותם משפטים, הם שקולים זה לזה.

הייתי בוחרת בשתיהן! טוב גורר לא זול = זול גורר לא טוב.

אין שוני. שני המשפטים אומרים את אותו הדבר.

קטגוריה ד: אחר

היו גם פרחי הוראה שרשמו נימוקים שלא היה אפשר לאחד אותם בקטגוריה אחת. נימוקים אלו נכנסו בקטגוריה "אחר". סך הכול היו 5 נימוקים בקטגוריה זו.

להלן כמה ציטוטים של נימוקים שהעלו פרחי ההוראה ושייכים לקטגוריה זו:

לא רוצה להיכנס למסעדה שאומרת שאוכל זול הוא לא טוב.

מסקרנות.

לא התחברתי לשלט של מסעדה ב', פשוט לא מסכימה עם הטענה.

להלן טבלה המתארת את התפלגות 58 הנימוקים שכתבו פרחי ההוראה כדי לנמק את קביעתם באשר להעדפת אחת משתי המסעדות:

טבלה ב: התפלגויות הנימוקים של פרחי ההוראה

קטגוריה א האוכל במסעדה טוב	קטגוריה ב נימה חיובית בשלט	קטגוריה ג שקילות	קטגוריה ד אחר	סך הכול
28	19	6	5	58
48%	33%	10%	9%	100%

רוב רובו של פרחי ההוראה (68%) כתב כי יבחר לאכול במסעדה א', ואילו מעטים מאוד (22%) בחרו ללכת למסעדה ב'. נשאלת השאלה - למה הרבה פרחי הוראה בחרו דווקא במסעדה א'?

סמואליין (Smullyan, 1978) עסק בדיוק באותה בעיה בספרו *What's the Name of this book*. גם הוא העלה את השאלה: האם שני המשפטים האלה אומרים אותו דבר, או אומרים שני דברים שונים זה מזה. לטענתו, אומנם מבחינה לוגית שני המשפטים אומרים בדיוק אותו הדבר (ושקולים למשפט האומר כי "לא קיים אוכל שהוא גם טוב וגם זול"), אך מבחינה פסיכולוגית המשמעות של שני המשפטים האלה היא שונה. כאשר קוראים את המשפט הראשון נוטים לדמיין אוכל טעים ויקר, בעוד כאשר קוראים את המשפט השני נוטים לדמיין אוכל רקוב וזול. הפירוש הפסיכולוגי של שני המשפטים תומך בהעדפה של רוב פרחי ההוראה במסעדה א', כפי שעלתה מממצאי מחקר הזוטא.

ובכן, איך אתם רואים את עצמכם – לוגיקנים יותר או פסיכולוגים יותר?...

רשימת מקורות

אלכסנדרוביץ', ג' (2012). אז מה זו לוגיקה מתמטית? **לא מדויק**.

ברגר, ש' וגינזבורג, א' (1994). **מתמטיקה דיסקרטית: כרך III. לוגיקה מתמטית**. האוניברסיטה הפתוחה.

גביש, ת' (2008). המתמטיקה כשפה – חשיבותם של מושגים לשוניים בבניית שפה. **לדעת חשבון**, 1-23.

לויתן, ת' (2012). **יסודות החשיבה המתמטית: צעדים ראשונים במתמטיקה מתקדמת**. מכון מופ"ת.

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). [שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה](). **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 197-174.

שריקי, ע' ומובשוביץ-הדר נ' (2012). **לוגיקה בארץ הפלאות: מבוא ללוגיקה באמצעות קריאת הרפתקאות אליס בארץ הפלאות**. מכון מופ"ת.

Attridge, N., Doritou, M., & Inglis, M. (2015). The development of reasoning skills during compulsory 16 to 18 mathematics education. *Research in Mathematics Education, 17*(1), 20-37. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.999014

Barcellona, N. (2017). Restaurant competitor analysis: How to do it. *Foreters: Restaurant Marketing Blog*.

Griffiths, B. J., & Peitz, E. A. (2016, July 24-31). *A comparison of syllogistic reasoning skills among American undergraduates* [Paper presentation]. 13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13), Hamburg, Germany.

Hadar, N. (1977). Children's conditional reasoning: An investigation of fifth graders' ability to distinguish between valid and fallacious inferences. *Educational Studies in Mathematics, 8*(4), 413-438. https://doi.org/10.1007/BF00310946

Kern, H. L., Mirels, L. H., & Hinshaw, V. G. (1983). Scientists' understanding of propositional logic: An experimental investigation. *Social Study of Science, 13*(1), 131-146. https://doi.org/10.1177/030631283013001007

Mendelson, E. (2010). *Introduction to mathematical logic* (5th ed.). CRC Press.

Purpura, D. J., Logan, J. A. R., Hassinger-Das, B., & Napoli, A. R. (2017). Why do early mathematics skills predict later reading? The role of mathematical language. *Developmental Psychology, 53*(9), 1633-1642. http://dx.doi.org/10.1037/dev0000375

Ramsey, T. (2016). *If..., Then....* http://www.math.hawaii.edu/~ramsey/Logic/IfThen.html

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, *31*(3), 235-252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Smullyan, R. M. (1978). *What is the name of this book? The riddle of Dracula and other logical puzzles*. Prentice-Hall, INC.

נספח א

הוכחת שקילות הטענות "אם A אז B", "אם לא B אז לא A" בטבלאות אמת

A	B	~A	~B	~B ⇒ ~A
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

A	B	A ⇒ B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T