מסע בעקבות בעיית סנגקו

משה סטופל
אבי סיגלר
עידן טל

פרופ׳ משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.

מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים, בהן שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בכתבי עת שונים בארץ ובחו״ל.

עוסק בחקר יופייה של הגאומטרייה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי״ס שש-שנתי.

ד״ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד״ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.

מרצה במכללת אפרתה, ירושלים ובשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.

עידן טל

בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על-יסודי) בסמינר הקיבוצים. בוגר תואר שני בטכנולוגיות בחינוך בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

נבחרה בעיית סנגקו בעלת רקע היסטורי עם ניסוח מעניין ותוצאה מפתיעה. הבעיה מעוררת סקרנות ובעלת פוטנציאל חקירה בכיוונים שונים. החקירה לוותה בשימוש בתוכנה ממוחשבת (ג'אוג'ברה) להעלאת השערות ובדיקתן.

הרקע ההיסטורי לבעיות הסנגקו

יפן היא המקור לבעיות הסנגקו ולכן כהקדמה לרקע ההיסטורי שלהן חשוב לציין אירוע שהחל לפני כ-30 שנה. מאמצע שנות השמונים של המאה הקודמת "פרץ" בהתחלה ביפן תשבץ הסודוקו שבו צריך לשבץ ספרות על לוח של 9X9 המורכב מתשעה תת-מצולעים ריבועיים כך שבכל שורה ועמודה ובכל תת-ריבוע יופיע כל מספר פעם אחת. בשנת 2005 "פרץ" המשחק למדינות המערביות של הגלובוס וזאת לאחר צירופו למדור של תשבצים וחידות של העיתונות הכתובה. ישנם אנשים שהפכו להיות "מכורים" לתשבצי הסודוקו, וישנם מחקרים שלפיהם פתרון תשבצי סודקו מעכב את ההזדקנות המנטלית.

קדמו לתשבצי הסודוקו משימות החשיבה הנקראות **סנגקו** שאיתרו בצורות גאומטריות את המקדשים היפניים החל מהמאה השש עשרה ועד המאה התשע עשרה. ברבות השנים השוגונים מבית טוקוגאווה סגרו את יפן מהעולם החיצוני במידה מוחלטת והיא נותקה מההתעוררות המדעית באירופה. אך גם בתקופה זו של בידוד, המשיכה התרבות היפנית להתפתח מתוך עצמה. באותה עת היה **הסנגקו** מילה ביפנית שפירושה לוח מתמטי – תחביב לאומי שכולם עסקו בו, החל באיכרים וכלה באצולת הסמוראים.

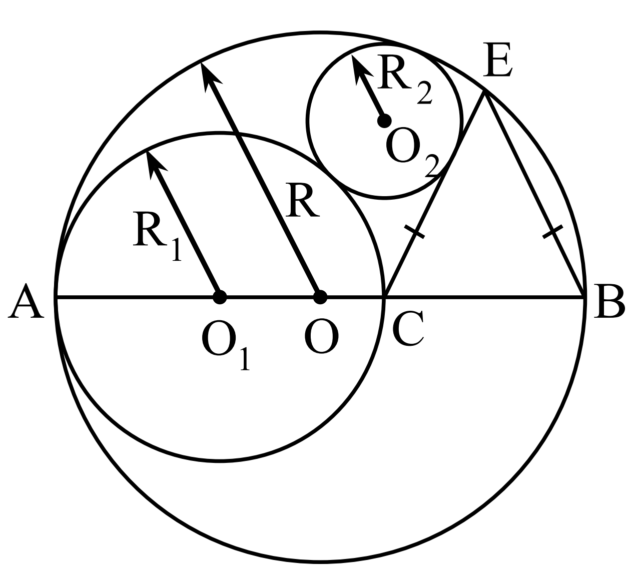
הפותרים של החידות הגישו אותן על לוחות עץ שעוצבו וגולפו בהידור רב. הלוחות האלה שעליהם נחרתו בעיות גאומטריות נתלו כקישוטים מתחת לגגות המקדשים. בשנת 1989 פרסמו הידועשי פוקגאווה ודניאל פדואה את אסופת **הסנגקו** הראשונה שתורגמה לאנגלית (Fukagawa & Pedoe, 1989). נכון להיום שרדו כ-880

לוחות סנגקו. הבעיות היו בדרך כלל מעגלים בתוך מעגלים, משולשים או אליפסות ואף כדורים במרחב שנושקים זה לזה. רמת הקושי עלתה מבעיות פשוטות למדי ועד לרמת קושי כמעט בלתי אפשרית. באותן תקופות יפנים רבים אהבו לעסוק בפתרון משימות מתמטיות ושמחו לגלות את היופי הנסתר בגאומטריה שבה תכונות רבות הן בעלות גוון של שימור. למיטב ידיעתם של ההיסטוריונים, מחברי חידות **הסנגקו** היו ככל הנראה מורים ותלמידיהם ויש מקום להניח שהלוחות נועדו לשמש עזרים ללימוד מתמטיקה וגם לכאלו שלא מתמטיקאים (מוסקוביץ, 2014, עמ' 15).

בשנים אחרונות אפשר למצוא מאמרים רבים העוסקים בפתרון בעיות שונות מתוך מאגר **הסנגקו**.

במאמר זה יוצגו שני פתרונות לבעיית **סנגקו** בצירוף חקר על הקשרים בין הגדלים של הבעיה, וכן שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית המאפשרת חקר דינמי של תכונת השימור. החקר המעמיק של הבעיה היפנית מצטרף לשורה ארוכה של מחקרים שעסקו בתכונות שימור במהלך ביצוע שינוי (Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2016; Segal & Stupel, 2015).

הצגת בעיית הסנגקו



איור 1

נתון מעגל שרדיוס שלו R וקוטרו AB (מעגל (O,R)). למעגל זה משיק מבפנים בנקודה A מעגל שקוטרו AC (מעגל (O_1,R_1)). על קטע הקוטר CB כבסיס בונים משולש שווה שוקיים CEB (EB=EC) שקודקודו E נמצא על המעגל (O,R). מעגל שלישי, (O_2,R_2), משיק לשני המעגלים (O,R) ו-(O_1,R_1), וכן לשוק EC של המשולש ECB, כנראה באיור 1.

יש להוכיח:

$O_2C \perp AB$.

השנה שבה הופיעה בעיה זו היא 1803.

כתובות לאנימציה וליישומון ג'אוג'ברה המציגים במידה פעילה את הבעיה ואת תכונת השימור שלה, נמצאות בקישורים 1 ו-2.

כתובת ליישומון ג'אוג'ברה המציג במידה פעילה את הבעיה ואת תכונת השימור שלה, נמצאת בקישור 1.

קישור 1: https://www.geogebra.org/m/kwdddegy

קישור 2: https://www.geogebra.org/m/wcgu6was

ביישומון זה אפשר לגרור את הנקודות A, B ו-C וכך לשנות את הרדיוסים של R ו-R_1 . בשל השינויים משתנים הרדיוס של המעגל השלישי ואורכי צלעותיו של המשולש ECB ורואים שעבור כל ערך שלהם, הזווית $\angle O_2CB$ היא תמיד $90°$. כמו כן ביישומון יש לחצן המאפשר לראות את שינויי הרדיוסים של המשימה עם הישר O_2C הניצב ל-AB, או בלעדיו.

עד כמה שידוע לנו, הבעיה הופיעה על הלוח שקישט את המקדש בציון התכונה הגאומטרית המאפיינת אותה תכונת הניצבות, בלי שמחבריה היפנים הוכיחו אותה. בנספח תוצגנה שתי הוכחות לנכונותה.

בנספח תוצגנה הוכחות לשתי טענות; אחת הוכחה אנליטית לבעיית הסנגקו המקורית והשנייה הוכחה גאומטרית המובילה לבניית המעגל (O_2,R_2).

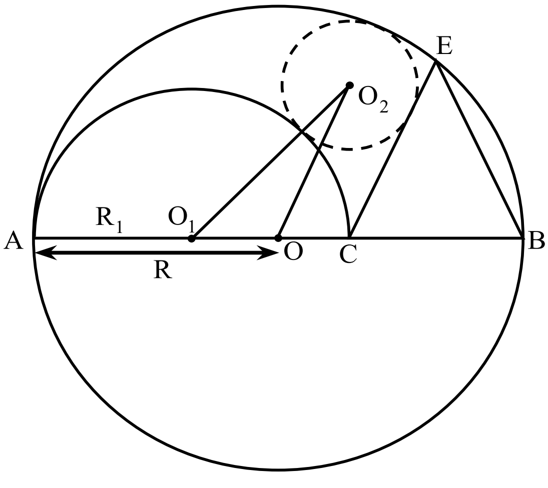
בנספח מופיעות שתי הוכחות מפורטות ועל כן נסתפק "באבני דרך" שמשמשות בסיס להוכחות המלאות.

טענה 1

הישר המחבר את מרכז המעגל O_2 עם הקודקוד C של המשולש ECB מאונך ל-AB.

תמצית הוכחה של טענה 1.

א. יש לשים לב ש $OO_2+O_1O_2 = R+R_1$ גודל קבוע. לכן O_2 נמצא על אליפסה שמוקדיה O ו-O_1 והציר הארוך שלה $R+R_1$. ראה איור 2.



איור 2

ב. ממקמים את האליפסה במערכת צירים כאשר הציר הגדול על ציר ה-x (AB). המוקדים ב-O ו-O_1, ואורך הציר הגדול הוא: $\frac{R_1+R_2}{2}$ (באמצע הקטע המחבר את המוקדים עובר הציר האנכי של האליפסה).

לפיכך מקבלים את המשואה של המקום הגאומטרי שנע עליו מרכז המעגל O_2. משוואת האליפסה היא: $\frac{4x^2}{(R_1+R)}+\frac{y^2}{RR_1^{\,2}}=1$

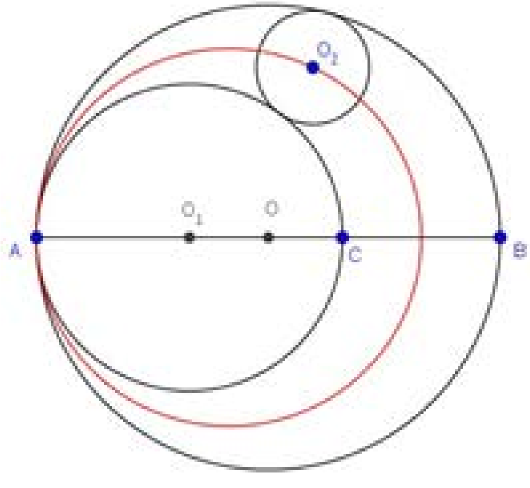
ג. מוצאים נקודה O_2 על האליפסה שמרחקה מ-EC שווה ל-O_2R-R_1.

ד. מוכיחים ש-$O_2C \perp AB$.

אפשר לבצע פעילות חקר דינמית ולראות את צורת העקום בעזרת קישור 3.

קישור 3: https://www.geogebra.org/m/s8zpbqha

כשגוררים את המרכז O_2 הוא משאיר עקבה על המסך המראה שהמרכז נע על גבי עקום של אליפסה, כנראה בתמונה 1 הלקוחה מהמסך של החקר הדינמי. עבור כל ערך של R, ו-R_1 נשמרת צורת העקום. בכל שלב מופיעים על המסך הערכים של שלושת הרדיוסים: R, R_1 ו-R_2.



תמונה 1

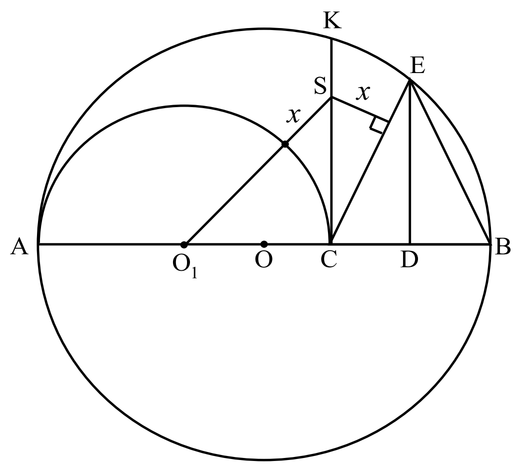
לחיצה על כפתור Clear trace מאפשרת למחוק את עקבת המקום הגאומטרי ולהמשיך בחקר הדינמי עבור ערכי רדיוסים אחרים.

טענה 2

על הקטע CK המאונך לקוטר AB בנקודה C קיימת נקודה שהיא מרכז המעגל O_2 המשיק למעגלים (O,R) ו-(O_1,R_1), וכן לשוק EC של המשולש ECB.

תמצית ההוכחה ללא שימוש בגאומטריה אנליטית

הרעיון המרכזי היה לבדוק האם הטענה ש-$O_2C\perp AB$ נכונה, ולהשתמש בטענה שאומנם $O_2C\perp AB$. כדי למצוא נקודה על האנך מ-C ל-AB המרוחקת במידה שווה ממעגל O, ממעגל O_1 ומן הישר EC. ראה איור 3.



איור 3

א. מוצאים נקודה S על האנך מ-C ל-AB כך שמרחק x מ-E שווה למרחק S מהמעגל O_1.

מקבלים אחרי חישובים שמפורטים בנספח ההוכחות:

$$R_2=x=\frac{2R_1(R-R_2)}{R+R_1}$$

ב. מוצאים ש-x גם שווה למרחק מ-S שמצאנו למעגל R.

הערה:

הטענה השנייה משמשת בסיס לבניית המעגל שמרכזו O_2 בעזרת סרגל ומחוגה ובמידה מסוימת היא משמשת כעין משפט הפוך לטענה הראשונה.

החשיבות המתודית של הוכחות בדרכים שונות לאותה משימה

כפי שצוין, תוצגנה בנספח הוכחות מלאות לשתי הטענות אך בוודאי אפשר למצוא הוכחות בדרכים אחרות לאותן הטענות. אחת מהן היא הוכחה המשלבת טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית (המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי, ח"ת). מבחינה מתודית יש לכך חשיבות רבה. ככל "שארגז הכלים המתמטיים" העומד לרשותו של המתמודד עם הוכחת משפטים או פתרון בעיות הוא רחב יותר, כך גדל הסיכוי להצליח במשימה. חשוב לציין שאפשר לשלב כלים מתחומי מתמטיקה שונים ומתוך כך למצוא פתרונות בלתי קונבנציונליים, אלגנטיים, קצרים ויפים יותר ובכך להציג את המתמטיקה כעץ רחב בעל שורשים עמוקים וענפים המשתלבים זה בזה (Guberman & Leikin, 2013; Peled & Leikin, 2017; Stupel & Ben-Chaim, 2013).

עוד שאלות מסקרנות שעוררה בעיית הסנגקו

ההתמודדות עם הוכחת התכונה גאומטריה המפתיעה הבעיה עוררו אצלנו מספר שאלות מסקרנות שתוצגנה לפני הקורא.

1. בחידה מדובר על מעגל המשיק לשני מעגלים משיקים ולקו ישר. איך אפשר לבנות את המעגל הזה?
2. א. מהו הערך המקסימלי של R_2?

   ב. האם ישנם מקרים פרטיים מעניינים?

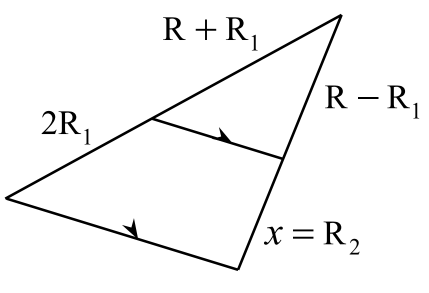
   ג. נוצרים משולשים רבים מחיבורי הנקודות שבתצורה – מהם התנאים שחלק מהמשולשים יהיו **הרוניים למחצה**? הגדרה למשולשים **הרוניים למחצה** תובא בהמשך.

שאלה 1: איך בונים את המעגל R_2?

המעגל R_2 צריך להיות משיק ל-R ו-R_1 (המשיקים ביניהם) וגם משיק ל-EC.

מצאנו בהוכחה של טענה 2 ש- $R_2=\dfrac{2R_1(R-R_1)}{R+R_1}$.

לכן נבנה את הבנייה האלגברית כמתואר באיור 4.



איור 4

בניית הקטע מתבססת על משפט תלס.

אחרי מציאת הקטע שאורכו R_2 בונים את המשולש O_1OO_2.

הערה מתודית:

גם בעידן של טכנולוגיה ממוחשבת יש חשיבות גדולה שהמורה והתלמיד יהיו בעלי יכולת טכנית לבצע בניות גאומטריות, לפחות את הפשוטות שבהן, בעזרת הכלים המסורתיים: עיפרון, סרגל ומחוגה.

שאלה 2א: מהו המקסימום של R_2?

כידוע: $R_2=\frac{2R_1(R-R_1)}{R+R_1}$. מסמנים $R_2\equiv y$, $R_1\equiv x$ ומקבלים שאלה פשוטה לערך קיצון של פונקציה:

$$y=\frac{2x\,(R-x)}{R+x}=\frac{2xR-2x^2}{R+x}$$

$$y'=\frac{(2R-4x)\,(R+x)-(2xR-2x^2)\cdot 1}{(R+x)^2}$$

$y'=0$ כאשר: $2R^2-2Rx-4x^2-2xR+2x^2=0$

$$x^2+2xR-R^2=0$$

$$x=\frac{2R\pm\sqrt{8R^2}}{2}=R\pm R\sqrt{2}$$

הפתרון היחיד: $x=-R+R\sqrt{2}=R\,(\sqrt{2}-1)\approx 0.41R$

כלומר הרדיוס המקסימלי של R_2 הוא $\approx 0.41R$.

שאלה 2ב: מקרים פרטיים מעניינים

מה הקשר בין R_1 ל-R כדי שהמשולש O_1O_2O יהיה שווה צלעות?

פתרון:

$O_1O=R-R_1$, $O_1O_2=R_1+R_2$, $O_2O=R-R_2$

(מעניין לשים לב ש-$O_1O=R$ קבוע)

מציבים: $R_2=\frac{2R_1\,(R-R_1)}{R+R_1}$ ומקבלים: $R_1=R_2=\frac{1}{3}R$

ואז: $O_1O_2=O_2O=O_1O=\frac{2}{3}R$

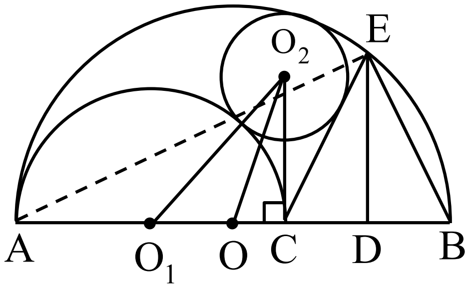
שאלה 2ג: משולשים הרוניים למחצה

הקדמה לשאלה:

הגדרה: משולש הרוני הוא משולש שאורכי צלעותיו מספרים טבעיים וגם שטחו מספר טבעי.

משולש הרוני רציונלי הוא משולש שאורכי צלעותיו מספרים רציונליים וגם שטחו מספר רציונלי.

טענה 2: נתון שהמשולש AEB הוא משולש שאורכי צלעותיו הם שלשה פיתגורית (איור 5).



איור 5

אזי:

א. R, R_1 וצלעות המשולש O_1O_2O הם מספרים רציונליים.

ב. המשולש O_1O_2O הוא משולש הרוני רציונלי.

הוכחה

מסמנים: AE=c, EB=b, AB=a כאשר a, b, c הם שלשה פיתגורית.

א. ברור ש-R רציונלי, כי $R=\frac{a}{2}$.

לפי משפט אויקלידס: $EB^2=BD:AB$, ובמקרה שלנו: $BD=\frac{EB^2}{AB}=\frac{b^2}{a}$, ולכן BD רציונלי.

$BD=DC=R-R_1$, ולכן: $R_1=R-BD=\frac{a}{2}-\frac{b^2}{a}$, ולכן גם R_1 רציונלי.

כפי שמצאנו בהוכחת התכונה באמצעות הנדסה אנליטית: $R_2=\frac{2R_1}{R+R_1}(R-R_1)$, ולכן R_2 רציונלי, $O_1O_2=R_1+R_2$ רציונלי, $O_1O_2=R_1+R_2$ רציונלי, וכן $OO_1=R-R_1$ רציונלי.

ב. צריך להוכיח שהגובה O_2C במשולש O_1O_2O הוא רציונלי.

לפי הוכחת התכונה בדרך גאומטרית התקבל: $O_2C=\frac{2R_1\sqrt{2R(R-R_1)}}{R+R_1}$

הביטוי הייחודי שמשמש בעיה הוא: $\sqrt{2R(R-R_1)}$, אבל זהו הערך של הקטע EB=b ולכן כל הביטוי O_2C הוא רציונלי ועל כן שטח המשולש רציונלי משום שהוא מחצית מכפלת אורך הבסיס בגובה המשולש (גדלים רציונליים).

חקר דינמי

מאחר שמדובר בכמה תכונות שימור כשההוכחה המתמטית של התכונה המרכזית קשה במידה רבה, הוכנו שלושה יישומוני ג'אוג'ברה המאפשרים חקר דינמי של התכונות השונות כמקובל בסוג כזה של בעיות (Segal, Stupel, & Oxman, 2016).

ביישומון אפשר לגרור את הנקודות B ו-C וכך לשנות את הרדיוסים של R ו-R_1 ולראות שעבור כל ערך שלהם, הזווית $\angle O_2CB$ היא תמיד 90°. בכל שלב מופיעים על המסך הערכים של שלושת הרדיוסים: R_1, RR_2 וכן אורכי הצלעות של משולש המרכזים O_1O_2O.

בגרירה של הנקודה C לערך של $R_1=\frac{1}{3}R$, רואים שהמשולש O_1O_2O עבור ערך זה הוא משולש שווה צלעות.

אפשר להשתמש ביישומון באמצעות קישור 4.

קישור 4: https://www.geogebra.org/m/kmqqzapr

סיכום

מתוך אוסף של מאות בעיות גאומטריות הנקראות "**בעיות סנגקו**", שחיברו יפנים במאות השש עשרה–שמונה עשרה והוצגו כתבליטי קישוט במקדשים שלהם, נבחרה בעיה מעניינת בעלת תכונת שימור מפתיעה הממשיכה להתקיים במהלך שינוי גדלים. התבצע מחקר דינמי של תכונת השימור באמצעות הכלי הטכנולוגי הממוחשב. מאחר שאין להסתפק באישור נכונות התכונה באמצעות הכלי הטכנולוגי, הוצגו שתי הוכחות מנומקות כמקובל במתמטיקה. כמו כן הייתה התמקדות בשאלות מסקרנות אחרות שעוררה בעיית הסנגקו.

רשימת מקורות

המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי. (ח"ת). **מעגלים מתגלגלים**. אוחזר מתוך http://newhighmath.haifa.ac.il/index.php/2015-05-11-06-53-50/515-2015-11-30-09-05-55

מוסקוביץ, א' (2014). **הספר הגדול של משחקי החשיבה** (א' שגיא, מתרגם). אור יהודה: כנרת, זמורה-ביתן, דביר.

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2016). Variance and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *The Far East Journal of Mathematical Education, 16*(4), 371-418. doi:10.17654/ME016040371

Fukagawa, H., & Pedoe, D. (1989). *Japanese temple geometry problems: San Gaku.* Winnipeg, Canada: Charles Babbage Research Centre.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33-56. doi:10.1007/s10857-012-9210-7

Peled, I., & Leikin, R. (2017). Using variation of multiplicity in highlighting critical aspects of multiple solution tasks and modeling tasks. In R. Huang & Y. Li (Eds.), *Teaching and learning mathematics through variation* (pp. 341-353). Rotterdam: Sense Publishers. doi:10.1007/978-94-6300-782-5_19

Segal, R., & Stupel, M. (2015). An investigative task incorporating computerized technology with conserved property and generalization. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 9*(2), 124-137.

Segal, R., Stupel, M., & Oxman, V. (2016). Dynamic investigation of loci with surprising outcomes and their mathematical explanations. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(3), 443-462. doi:10.1080/0020739X.2015.1075613

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(2), 129-161.

נספח

הוכחת טענה 1 – המשפט היפני (הוכחה לתכונת השימור של הניצבות $O_2C \perp AB$).

שימוש בגאומטריה אנליטית

ממקמים את הציור במערכת צירים שבה הנקודות A, B, C מונחות על ציר ה-x וציר ה-y עובר בנקודת האמצע שבין המוקדים F_1 ו-F_2.

הפרמטרים של האליפסה הם:

$$2a = R + R_1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{R+R_1}{2}$$

$$2c = OO_1 = R - R_1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{R-R_1}{2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = R \cdot R_1$$

מכאן משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים O_2 הוא:

$$\frac{4x^2}{(R+R_1)^2} + \frac{y^2}{(RR_1)^2} = 1$$

על פי מיקום מערכת הצירים, השיעורים של הנקודות הן:

$$O_1\left(\frac{R_1-R}{2},0\right), O\left(\frac{R-R_1}{2},0\right), C\left(\frac{3R_1-R}{2},0\right), D\left(\frac{R+R_1}{2},0\right)$$

כאשר הנקודה D היא אמצע הקטע BC.

מכאן משוואת המעגל (O,R) היא: $\left(x+\frac{R_1-R}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$.

למציאת שיעורי הנקודה E, קודקוד המשולש השווה שוקיים ECB, נציב את שיעורי הנקודה D במשוואת המעגל (O,R) ונקבל:

$$y_E = \sqrt{R^2 - R_1^2}$$

מכאן משוואת הישר שנמצא עליו הקטע EC הוא:

$$2\sqrt{R+R_1}\,x - 2\sqrt{R-R_1}\,y + \sqrt{R+R_1}\,(R-3R_1) = 0$$

כעת מוצאים את נקודת החיתוך של האנך לקוטר AB העובר בנקודה C עם המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים (O_2,R_2):

$$x_{O_2} = \frac{3R_1-R}{2}\ ,\ y_{O_2} = \frac{\sqrt{8}\,R_1}{R+R_1}\sqrt{R^2 - RR_1}$$

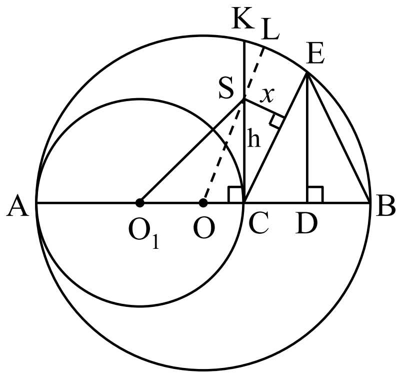
נשאר להוכיח ש- $R_2 = O_1O_2 - R_1$ שווה למרחק שבין O_2 לישר DC.

על פי שיעורי הנקודות O_1 ו-O_2 מקבלים: $R_2 = \frac{2R_1}{R+R_1}(R-R_1)$

בשימוש בנוסחה למציאת מרחק נקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c$, $d = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$, מוצאים שמרחק הנקודה $O_2\left(x_{O_2},y_{O_2}\right)$ מהישר העובר דרך הנקודות E ו-C גם הוא $d = \frac{2R_1}{R+R_1}(R-R_1)$, כלומר המעגל (O_2,R_2) משיק לישר CE כאשר הנקודה O_2 נמצאת על האנך לקוטר AC שעובר דרך הנקודה C.

הערה: לצורך ההוכחה אפשר למקם את ציר ה-y גם במיקום אחר.

הוכחת טענה 1 בשימוש בגאומטריה אוקלידית בונים אנך CK ל-AB, כאשר K היא נקודת החיתוך עם המעגל (O,R), כנראה באיור 6.



איור 6

יש למצוא נקודה S על האנך SK, כך שהמרחק SL מהשוק CE יהיה שווה למרחק מהמעגל (O_1,R_1).

מסמנים ב-x את המרחק SL, כך ש-$SO_1 = R_1 + x$.

מסמנים: $SC = h$, ומדמיון המשולש SLC ו-CDE מקבלים:

$$\frac{x}{h} = \frac{CD}{CE} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{h^2} = \frac{(R-R_1)^2}{CE^2} = \frac{(R-R_1)^2}{EB^2}$$

לפי משפט אוקלידס במשולש AEB (משולש ישר-זווית),

$$(1) \quad \frac{x^2}{h^2} = \frac{(R-R_1)^2}{2R\,(R-R_1)} = \frac{R-R_1}{2R}$$

על פי משפט פיתגורס במשולש SO_1C מקבלים:

$$(x+R_1)^2 = {R_1}^2 + h^2$$

או: $$(2) \quad h^2 = x^2 + 2xR_1$$

בהצבת h^2 ממשוואה (1) במשוואה (2) וצמצום ב-x מקבלים:

$$(3) \quad x = \frac{2R_1\,(R-R_1)}{R+R_1}$$

בשלב זה מחשבים את SO ומוכיחים שערכו $R-x$.

בשימוש במשוואה (3):

$$R - x = R - \frac{2R\,(R-R_1)}{R+R_1} = \frac{R^2 - RR_1 - 2{R_1}^2}{R+R_1}$$

על פי משפט פיתגורס במשולש SOC מקבלים:

$$(SO)^2 = (OC)^2 + h^2$$

$OC = 2R_1 - R$, ואילו לפי משוואות (1) ו-(3),

$$h^2 = \frac{8R{R_1}^2\,(R-R_1)}{(R+R_1)^2}$$

הצבת גדלים אלו, ביצוע מכנה משותף ופישוט אלגברי נותנים:

$SO = R - x$, או: $OL = SO + R$, כאשר L היא נקודת ההשקה של המעגל (O_2,R_2) עם המעגל (O,R).

בכך הוכחה התכונה.