# מה הקשר בין עיסוק באומנות להבנה של אפס ואינסוף?
# המקרה של מתכשרים להוראת מתמטיקה

**ליאורה נוטוב**

**ד"ר ליאורה נוטוב**
מרצה בכירה באקדמית גורדון, חיפה. על בסיס ניסיונה הרב בהוראה ובחינוך כיתות מב"ר במערכת החינוך פרסמה את הספר "מחנכת בע"מ". כיום היא מכשירה מורים למתמטיקה ותחומי המחקר שלה הם מנהל החינוך, הוראת מתמטיקה ופדגוגיה של המחקר האיכותני. על בסיס מחקריה פרסמה מאמרים בכתבי עת מדעים ומקצועיים, ובשנת 2013 הייתה שותפה של פרופ' אורית חזן לעריכת ספר "הוראת מחקר איכותני: אתגרים, עקרונות, יישום".

## תקציר

שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה צובר תאוצה בארץ ובעולם. כדי ליישם גישה זו ללימודי מתמטיקה בבתי הספר, רצוי שהמורים לעתיד יכירו את עקרונותיה ויתנסו בה. 127 סטודנטיות באחת המכללות בצפון הארץ למדו קורס אסינכרוני מקוון, "כשמתמטיקה פוגשת אומנות", המיישם גישה זו. המאמר הנוכחי מציג תוצאות של מחקר שליווה את הקורס. המחקר המוצג בוחן את ייתכנות הקשר בין עיסוק באומנות להישגים בנושא הבנת המושגים אפס ואינסוף בעת חישוב שטח והיקף. ממצאי המחקר תומכים בהשערה זו ואף יותר מכך נמצא שהישגיהן של סטודנטיות שעסקו באומנות בצורה פעילה ועשו עבודות אומנות מקוריות היו גבוהים יותר מהישגי הסטודנטיות שעסקו באומנות בצורה פעילה פחות והסתפקו בבחירה וניתוח של עבודות אומנות קיימות. נוסף על כך, שילוב אומנות יכול להיות דרך נוספת לאיתור תפיסות שגויות.

**מילות מפתח:** שילוב אומנות במתמטיקה; אפס; אינסוף; דימוי מושג; תפיסות שגויות.

## מבוא

למושגים אפס ואינסוף יש זכויות רבות בהתפתחות מתמטיקה היות ששנים רבות הם מציבים אתגרים בפני האנושות. למשל, שתי פעולות בסיסיות כמו כפל וחילוק שמוגדרות היטב עבור כל המספרים הרציונליים מניבות תוצאות לא שגרתיות: כפל באפס מצמצם את כל ציר המספרים לנקודה אחת והחילוק באפס כלל לא מוגדר. כמו האפס גם האינסוף מעורר ויכוחים ומחלוקות בין אנשי המדע והפילוסופים. דוגמה לכך היא סירובו של אחד המתמטיקאים הגדולים בן המאה התשע עשרה, לאופולד קרוניקר, לפרסם מאמרים של מתמטיקאי גדול אחר, גאורג קנטור, על אינסוף כיוון שלא זיהה תחילה את חשיבותם (Falk, 2010; Tall, 1981). אומנם אפס ואינסוף נלמדים בכל שנות הלימודים החל מבית הספר היסודי וכלה בתיכון, אך כדי להעמיק ולבסס את הידע המתמטי של מתכשרים להוראה, הם נלמדים בקורסים כמו תורת הקבוצות, תורת המספרים,

יסודות הגאומטריה האוקלידית.

כמכשירה של מורים למתמטיקה, אני נמצאת בחיפוש מתמיד אחר דרכים חדשות לפיתוח אינטואיציה של הסטודנטים על מושגים אלה וביצוע פעולות חשבון בהם. חיפוש זה הוביל לרעיון ללמד את הסטודנטים פרקטלים, שבהם אפס ואינסוף נפגשים בטבעיות בעת חישוב שטח והיקף. פרקטלים משלבים יופי ויזואלי עם עושר מתמטי ועל כן נושא זה שולב בקורס "כשמתמטיקה פוגשת אומנות" שהוצע למתכשרות להוראה במתמטיקה בבית הספר היסודי באחת המכללות בצפון הארץ. במאמר זה מוצגים ממצאים של חקר מקרה עבור יחידה אחת של הקורס. חקר מקרה זה מאפשר לבדוק את ייתכנות הקשר בין עיסוק באומנות להבנת מושגים מתמטיים – אפס ואינסוף; לבחון אם עיסוק פעיל באומנות, כמו יצירת עבודות מקוריות, מביא לידי תוצאות שונות מאלה של עיסוק פעיל פחות, בחירה וניתוח של עבודות אומנות קיימות; ולבסוף, הוא אפשר לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף כפי שבאים לידי ביטוי בעבודות שיצרו וגם בחרו לומדות בקורס זה.

## סקירת ספרות

בסעיף זה אציג שני נושאים: מושגים מרכזיים בהוראת מתמטיקה בשילוב אומנות וממצאי מחקרים בנושא; ממצאים של מחקרים בנושא הבנה של מתכשרים להוראה ומורים בפועל את המושגים אפס ואינסוף.

### שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה

על פי אחת ההערכות, שוק העבודה העתידי יִיצר כ-20 מיליון מקומות עבודה חדשים עבור אנשים שטובים בפתרון שאלות מתמטיות. אותה התחזית צופה שכ-60% של כלל העבודות החדשות ידרשו מיומנויות שבהן שולטים רק 20% מכלל האוכלוסייה (Boaler, 2015). כלומר התפקיד של מורים למתמטיקה להנגיש את התכנים המתמטיים ולשפר את המיומנויות המתמטיות לכלל התלמידים הופך למהותי אף יותר מבעבר. כדי לתת מענה לכלל התלמידים מומלץ לשלב שיטות ומיומנויות הוראה מגוונות (OECD, 2016) שיתאימו לתלמידים עם יכולות וחוזקות שונות (Gardner, 1983). אחת הדרכים היא שילוב אומנות בלימודי מדעים בכלל ומתמטיקה בפרט.

המצדדים בשילוב בין מדע לאומנות מגייסים את שמם של לאונרדו דה וינצ'י, אלברכט דירר וזוכים בפרס נובל למדעים כדי להמחיש את יתרונות גישה זו (Biller, 1995; Root-Bernstein et al., 2008): שילוב אומנות מזמן למידה באמצעות חקר שמעודדת את הלומדים ליישם חשיבה ביקורתית ויצירתית במהלך חיפוש פתרונות מרובים עבור אותה הבעיה/התופעה/השאלה; חיפוש פתרונות מרובים במקום פתרון אחד נכון שנשען בדרך כלל על אלגוריתם או כללים ידועים מראש; פיתוח יכולת לגשר בין תחומי דעת מגוונים ואף להעביר ידע מתחום אחד לאחר; תפקוד וקיום במצב של חוסר ודאות ואי הגדרה מדויקת של התופעה הנחקרת; שימת דגש בפרטים הקטנים ביותר שבסופו של דבר יכולים לעשות הבדל גדול בתוצר; ביטוי בדרכים מורכבות יותר ממילים וממספרים; חשיבה עם חומר נתון ובאמצעותו; חוויה באמצעות חושים שאי אפשר לקבלם בשום דרך אחרת פרט לאומנות; התאמה לסגנונות למידה למיניהם ולסוגים רבים יותר של אינטליגנציה (Burton, Horowitz, & Abeles, 2000; Eisner, 2002; Fenyvesi & Lähdesmäki, 2017). לצד היתרונות הרבים יש לא מעט אתגרים שמחייבים חשיבה והיערכות מתאימים. למשל, מורים שרוצים לאמץ גישה זו צריכים להיות בעלי ידע תוכן וביטחון מקצועי לא רק בהוראת מדעים ומתמטיקה, אלא גם באומנות, מה שדורש מהמורים הכנה רחבה יותר (Zimmerman, 2016). אורק (Oreck, 2006) מציין אתגר נוסף והוא לחץ כבד המופעל על המורים מצידם של קובעי המדיניות לעלייה מידית של הישגי התלמידים ובו בזמן דיכוי היצירתיות והאוטונומיה שלהם באמצעות הדרישה להיצמד לתוכניות הלימודים המוכתבות.

חשוב להבחין בין שילוב אומנות בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובין שילוב ייצוגים ויזואליים שמקובלים בלימוד מתמטיקה, כמו טבלה, דיאגרמה, גרף או ציור סכמתי (למשל Podgoršek, 2016). בדרך כלל משתמשים בייצוגים ויזואליים לשם הצגת נתונים, ביצוע פעולות, הצגת דרכי פתרון. לפי אפלנד (Efland, 2003) עבודות אומנות הן ייצוגים ויזואליים-מוחשיים המגלמים משמעות עבור היוצר. כלומר אדם שיוצר עבודת אומנות הממחישה מושג מתמטי, יוצר ייצוג ויזואלי של התפיסה שלו את המושג. לייצוג ויזואלי של מושג יש משמעות רבה כיוון שהיא חלק ממה שטל ווינר (Tall & Vinner, 1981) קוראים לו **דימוי מושג**. לפי הגדרתם, דימוי מושג הוא מבנה קוגניטיבי שיש בו תכונות ותמונות המתקשרות למושג שבונה הפרט במהלך שנות הלימודים וההתנסויות איתו. לעומת זאת, הגדרה של מושג היא אוסף מילים המסבירות אותו. ההגדרה יכולה להינתן ללומד או שהוא יכול לבנות אותה לבד לאחר התנסויות מתאימות. דימוי המושג עשוי להיות תואם את הגדרת המושג לגמרי או במידה חלקית, או אף נוגד אותה. שליטה במושג נרכשת כאשר למושג נבנה דימוי מושג התואם את הגדרת המושג.

למרות כל האתגרים, שילוב אומנות בהוראת מדעים בכלל ומתמטיקה בפרט, תופס תאוצה. עדויות לכך הן הקמה של בתי ספר שבהם מיושמת פדגוגיה זו. ישנה ספרות עשירה המתארת תוכניות לימודים המשלבות אומנויות בלימודי מתמטיקה או דוגמאות לשיעורים שהמורים יצרו על פי גישה זו (למשל Murphy, 2009; Smithrim & Upitis, 2005). כמו כן ישנה ספרות מחקרית המתמקדת בשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה בכל שכבות הגיל בלימודים טרום אקדמיים (למשל Gelineau, 2011; Okbay, 2013). ממצאי המחקרים מצביעים על הישגים גבוהים יותר של תלמידים שלמדו על פי תוכנית לימודים שבה לימודי אומנות הם מקצוע שעומד בפני עצמו וגם מקצוע שמשולב בלימודי מתמטיקה, לעומת תלמידים שתוכנית הלימודים שלהם לא כללה אומנות (Burton et al., 2000). ממצא מעניין אחר מלמד על שימור אפקט זה לאורך זמן. כלומר גם לאחר שלימודי אומנות הסתיימו, הישגיהם של התלמידים שנחשפו לאומנות נשארים גבוהים יותר מהישגי תלמידים שלא נחשפו לתוכנית לימודים באומנות (Sisman & Aksu, 2016).

לעומת שפע זה של עשייה בנושא ברמה של לימודים טרום אקדמיים, אפשר למצוא דוגמאות מעטות לשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה (למשל Okbay, 2013; Thuneberg, Salmi, & Fenyvesi & Lähdesmäki, 2017). להלן כמה דוגמאות לתוכניות אלה: הבניית תוכנית לימודים במתמטיקה כסיפורים שמטרתם להגביר את סקרנות הלומדים; יישום ידע מתמטי לשם ניתוח עבודות אומנות באמצעות תוכנת מחשב ייעודית; עבודה מסכמת בקורס כפרויקט המשלב בין תכנים מתמטיים ברמה של בית ספר על-יסודי ובין עבודות אומנות (Dietiker, 2015; Sendova & Chehlarova, 2013; Ward, 2006). גם נמצא שיש מעט מחקרים על שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה. אחד המחקרים הוא של הו ועמיתותיה (Wu, Jia, & Ye, 2015). הן פתחו קורס בחשבון אינפיניטיסימלי שלימדו בו מושגים מתמטיים בשילוב חקר ויצירה של עבודות אומנות. במחקר זה נמצא שהשילוב בין לימוד מתמטיקה לעיסוק באומנות תרם להבנה של תכנים מתמטיים,

לירידה מסוימת של רמת החרדה ממתמטיקה ולהעלאת מוטיבציה של הסטודנטים.

## תפיסות של מתכשרים להוראת מתמטיקה את המושגים אפס ואינסוף

המשותף לשני המושגים המורכבים, אפס ואינסוף, הוא קושי קוגניטיבי וגם פילוסופי. למשל אם נרצה להמחיש את המספר חמש מספיק שנביט בכף היד ונספור את האצבעות. איך ממחישים אפס? אפס הוא מספר שממוקם על ציר המספרים ואפשר לבצע איתו פעולות חשבון כמו עם מספרים אחרים (Barton, 2019). אך כשנבצע פעולות חשבון עם אפס, התוצאות המתקבלות שונות מאלה שמתקבלות כאשר מבצעים פעולות חשבון עם כל מספר אחר – אם בחיבור אפס לא משפיע כלל על התוצאה, בכפל הוא הדומיננטי. איך ממחישים אינסוף? יש סתירה בין החוויה הקיומית שלנו שבה המציאות נחווית כסופית, ובין התפיסה שלנו את האינסוף הנבנית מתוך התנסויות שיש לנו איתו (Tall, 1981). כלומר החוויה של האינסוף בחיי היום-יום לא קיימת. הבסיס להבנת אפס ואינסוף ולשימוש בהם נבנה כבר במהלך הלימודים בבתי הספר היסודי ומתפתח בשנות הלימודים. עם זאת כפי שנראה בהמשך, ידע של חלק ממתכשרים להוראת מתמטיקה (להלן: סטודנטיות), ואף של מורים בפועל, אינו מדויק או מספק. לפיכך לא מפתיע שבמוסדות להכשרת מורים לא מסתפקים בידע שהסטודנטים צברו בשנות לימודיהם בבית הספר, אלא מעמיקים ומבססים אותו בקורסים המלמדים נושאים מתורת הקבוצות, תורת מספרים, אלגברה מודרנית, גאומטריה אוקלידית ועוד.

ידע של סטודנטים ומורים למתמטיקה על תכונות של אפס ופעולות חשבון נחקר בהרחבה במדינות רבות בעולם. ממחקרים אלה עולה שחלק מהלומדים רואים באפס 'שום דבר' או 'שומר מקום'. לומדים אלה בדרך כלל יודעים לצטט כללים של פעולות שאפשר לבצע עם אפס אך אינם יכולים להסביר אותם (למשל Crespo & Nicol, 2006; Russell & Chernoff, 2011). מחקרים אחרים התמקדו בתפיסות המורים ומתכשרים להוראה של פעולת חילוק באפס. במחקרים אלה נמצא שהמשתתפים מכירים את החוק אך רובם מתקשים לתת הסבר המעיד על הבנה (למשל Ball, 1990; Karakus, 2018; Quinn, Lamberg, & Perrin, 2008). נוסף על ידע ויכולת המורים להבהיר את איסור החלוקה באפס, קנקוי (Cankoy, 2010) בחר לבדוק גם את הידע ואת היכולת שלהם להסביר את התוצאות המתקבלות עבור $a^0$ ,!a. גם כאן רוב משתתפי המחקר ידעו את התשובה הנכונה אך לא ידעו להסביר במידה מספקת את התוצאות המתקבלות.

**אינסוף** הוא אחד המושגים החשובים במתמטיקה והדיון בו ובמשמעויותיו תלוי הקשר – אם מדובר בגאומטריה או בתחום המספרי או בחשבון אינפיניטיסימלי (Ibarra, Romo-Vázquez, & Aguilar, 2019). במספרים שלמים מקובל להבחין בין אינסוף פוטנציאלי לאינסוף בפועל: (1) אינסוף כתהליך שנמשך לעד כמו למשל מניית מספרים טבעיים (אינסוף פוטנציאלי); (2) העוצמה של קבוצת מספרים אינסופית (האינסוף בפועל) (Tall, 1981; Tirosh, 1991). פולק (Falk, 2010) מוסיפה ששתי הגדרות אלה שונות בהיבט פסיכולוגי – הראשונה מייצגת תהליך שנמשך ואילו השנייה רואה באינסוף אובייקט. לפי פולק (Falk, 2010) להגדרות אלה של אינסוף יש עוד הגדרה: (3) הקפיצה מקבוצה סופית אל קבוצה אינסופית היא בעצמה אינסופית (פער בלתי מדיד). כמו כן היא מציינת שאדם יכול לאחוז בדעה שיש קבוצה אינסופית (אינסוף בפועל) ועדיין להאמין שקבוצה זו היא גדולה במעט מקבוצה סופית. הבנה טובה של אינסוף מתבססת מלכתחילה על ההנחה שיש פער שאי אפשר למדוד, או מרחק אינסופי בין אינסוף לכל קבוצה סופית.

במחקרים שהתמקדו בהבנת אינסוף של תלמידי בית הספר נמצא שרוב התלמידים רואים באינסוף תהליך ומעטים רואים באינסוף אובייקט (Monaghan, 2001). פולק מוסיפה שגם אם תלמידים תופסים את אינסוף כאובייקט, חלקם מתקשים להבין שאי אפשר למדוד את הפער בין קבוצה סופית לקבוצה אינסופית (Falk, 2010). אימברה ועמיתיו (Ibarra et al., 2019) מוסיפים שרוב התלמידים מזהים מספרים גדולים כאינסוף. מחקרים מעטים בחנו את הבנתם את המושג של מתכשרים להוראה ושל המורים בפועל. מתוך תוצאות המחקרים שנעשו בארץ ובעולם מצטיירת תמונה של ידע חלקי בלבד המסתכם בציטוט כללים, אי בהירות של ההסברים לכללים אלה (למשל Kuntze et al., 2011) ותפיסת האינסוף כמושג מתמטי בעל יישום מועט בחיי היום-יום (Kattou, Michael, Kontoyianni, Christou, & Philippou, 2009).

מתוך סקירת הספרות עולה כי לשילוב אומנויות בלימודי מתמטיקה יש יתרונות רבים ושימוש בשיטת למידה-הוראה מסוג זה הולך ומתרחב בבתי ספר. עם זה מוסדות מעטים מכשירים מורים שהתנסו בשיטה זו, ומשום שמורים נוטים ללמד בדרכים שלמדו בהן בעצמם (OECD, 2009), יש פער בין הכשרת מורים ובין הנעשה בשטח. כמו כן עולה מסקירת הספרות שידע של חלק מהמתכשרים להוראה על אפס ואינסוף אינו מספק ועל כן ראוי לחפש דרכים מגוונות ללמד מושגים מורכבים אלה כדי לבסס את הבנתם. על סמך מסקנות אלה במאמר הנוכחי אציג מסגרת למידה שבה סטודנטיות למדו את המושגים אפס ואינסוף לצד עיסוק באומנות ואציג תוצאות של מחקר שליווה מסגרת לימודית זו.

## הרקע למחקר

המחקר הנוכחי נולד מתוך אמונה שלי בצורך של חשיפה והתנסות של מתכשרים להוראת מתמטיקה בשיטות הוראה-למידה אינטגרטיביות כדי שבעתיד יוכלו ליישם אותן בבתי הספר ובכך להנגיש את התכנים המתמטיים לאוכלוסיית תלמידים רחבה יותר, בד בבד עם שיפור הידע המתמטי הקיים וחשיפתם למתמטיקה מודרנית כדוגמת פרקטלים. כדי להשיג מטרה זו פיתחתי ולימדתי קורס אסינכרוני מקוון על פלטפורמה של Moodle, "כשמתמטיקה פוגשת אומנות". בקורס זה נלמדו שישה נושאים: ריצופים, אפס ואינסוף וביטויים בחישוב שטח והיקף של פרקטלים, ראייה מרחבית (בהקשר לצורות בלתי אפשריות), חתך הזהב, ממד ודמיון עצמי. הנושאים של הקורס נבחרו על פי שלושה קריטריונים: העמקת ידע מתמטי של סטודנטיות בנושאים הנלמדים בתוכנית הלימודים של בית הספר היסודי (אפס ואינסוף, שטח והיקף, ראייה מרחבית); מושגים שמוזכרים בתוכנית הלימודים אך לא נלמדים לעומק (ריצוף – טרנספורמציות, ממד) ומושגים שלא נלמדים בתוכנית הלימודים אך יש להם קשר הדוק למתמטיקה וגם לאומנות (חתך הזהב ודמיון עצמי).

הסטודנטיות נדרשו לבצע משימות אלה בכל אחת משש יחידות הקורס:

1. להפגין ידע קודם בנושא או באמצעות דיון בפורום או באמצעות משימה מקדימה (15% מהציון הסופי עבור כל היחידות; הציון ניתן על הגשה ולא על התוכן כדי לעודד אותן לעשות רפלקציה אמיתית של הידע הקיים).
2. ללמוד את הנושא המתמטי באמצעות סרטון, מאמר, מצגת בנושא או פעילות חקר.

3. לתרום עבודת אומנות מקורית או לא מקורית לגלריה שיתופית בצירוף כותרת או הסבר קצר המעיד על דרך יישום של המושג המתמטי ביצירה (9% מהציון הסופי עבור כל היחידות).
4. לפתור תרגילים או לעשות פעילות חקר בנושא הנלמד.
5. בתום לימוד היחידה לבדוק את הידע באמצעות מבדק מקוון (20% מהציון הסופי עבור כל היחידות).

בסוף הסמסטר התקיים מבחן שהכיל את כלל הנושאים שנלמדו בקורס (56% מהציון הסופי).

כאמור, בסקירת הספרות נמצאו מחקרים מעטים שבדקו קשר כלשהו בין עיסוק באומנות להישגים במתמטיקה של מתכשרים להוראת מתמטיקה, ועל כן החלטתי ללוות את הקורס שתואר לעיל במחקר (חלק מתוצאות אפשר למצוא בתוך Nutov, 2018a, 2018b; Nutov & Levenberg, 2020). במאמר הנוכחי אני מציגה חקר מקרה של אחת מיחידות הקורס, אפס ואינסוף. יחידה זו נבחרה לניתוח הנתונים כחקר מקרה, היות שבגלריה השיתופית שיצרו הסטודנטיות, מספר העבודות המקוריות היה כ-40% מתוך כלל העבודות שהוגשו (47 מתוך 115). יחס זה בין מספר העבודות המקוריות ללא מקוריות היה ייחודי ליחידה זו. נתונים אלה מאפשרים לבדוק אם ללמידה פעילה המתרחשת בעת יצירת עבודות אומנות מקוריות יש תרומה ייחודית להישגים לעומת למידה פעילה פחות בעת בחירה וניתוח של עבודות אומנות לא מקוריות. אלה הן **מטרותיו של המחקר** הנוכחי:

1. לבחון את קיום הקשר בין עיסוק באומנות המפשטת עיקרון מתמטי (כאן זה אפס ואינסוף) להישגים של הסטודנטיות במשימות מתמטיות.
2. לבחון אם סוג העיסוק באומנות, יצירה מקורית לעומת בחירה וניתוח של יצירות אומנות קיימות, משפיע על הישגים.
3. לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף של הסטודנטיות ביצירות אומנות שיצרו בעצמן או בחרו מתוך יצירות קיימות.

## שיטת המחקר

מתוך מתודת מחקר משלב הנשענת על שתי מתודות, כמותית ואיכותנית, נבחר מערך אקספלורטורי שלבי – The explanatory sequential design (Creswell & Plano Clark, 2007). בדרך כלל בסוג מחקר זה יש שתי פעימות: בפעימה הראשונה נאספים נתונים כמותיים ובפעימה השנייה הנתונים הכמותיים מפורשים באמצעות נתונים איכותניים. שיטה זו מאפשרת לחוקר לנצל את היתרונות של שתי הפרדיגמות המחקריות: באמצעות שיטה כמותית אפשר לבחון קשר בין מספר משתנים (כפי שייעשה במחקר הנוכחי) ובאמצעות שיטה איכותנית אפשר לקבל את פרשנותם של משתתפי המחקר לממצאים הכמותיים.

במחקר זה היו שלושה שלבים: **בשלב הראשון** נותחו כל הנתונים הכמותיים כדי לקבל את 'התמונה הגדולה' – לקבוע אם יש קשר בין עיסוק באומנות להישגי התלמידים במשימות מתמטיות: המבדקים המקוונים והבחינה סופית. **בשלב השני** נעשה ניתוח סטטיסטי נוסף שבחן את הישגים של שתי קבוצות: קבוצת הסטודנטיות שיצרו עבודות אומנות מקוריות וסטודנטיות שבחרו וניתחו יצירות אומנות קיימות; **בשלב השלישי** נעשה מיון של כלל עבודות האומנות בגלריה כדי לזהות את דימויי המושגים אפס ואינסוף של הסטודנטיות.

**המדגם** כלל 127 מתכשרות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי שלמדו בסמסטר שלישי להכשרתן, מתוכן 104 סדירות ו-28 מתוכנית להסבת אקדמאיים; 124 נשים ו-3 גברים (אזכור המשתתפים במחקר יהיה בלשון נקבה מטעמי נוחות). הערה: בקורס השתתפו 132 סטודנטיות, 5 מסטודנטיות שלא ניגשו למבחן המסכם לא נכללו במדגם.

## כלי המחקר

במחקר זה המשימות הלימודיות בקורס שניתן עליהן ציון: מבדק, מבחן ועבודת אומנות, היו גם כלים לאיסוף הנתונים הכמותיים. הנתונים האיכותניים התקבלו מניתוח הייצוג הוויזואלי של אפס ואינסוף בעבודות האומנות, בכותרת או בהסבר שהסטודנטיות צירפו.

**מבדק מקוון** הורכב משאלות רב-ברירה וכלל שש שאלות על תכונות של אפס, שתי שאלות על תכונות של אינסוף וחמש שאלות על קשר בין שטח להיקף של צורות (שאלה לדוגמה בנספח א). ציון המבדק נקבע אוטומטית על פי הקריטריונים שנקבעו מראש כפי שמאפשרת הפלטפורמה של Moodle.

**מבחן מסכם** כלל שאלה אחת שעסקה בחישוב שטח והיקף במשולש שיירפינסקי (להלן: המבחן). שאלה זו (ראו נספח ב) מקשרת בין כל המושגים שנלמדו ביחידה הרלוונטית: שטח, היקף, אפס ואינסוף (במהלך הלימוד בקורס הסטודנטיות עשו פעילות חקר, חישוב שטח והיקף של פרקטל אחר – האי המרובע של קוך, שהכינה אותן לשאלה זו).

**עבודות אומנות** (דוגמאות באיור 2): הגלריה השיתופית נבנתה על הפלטפורמה של Padlet וכללה עבודות אומנות מקוריות של הסטודנטיות ויצירות אומנות מקוריות שלדעת הסטודנטיות ממחישות את המושגים הנלמדים. מרצת הקורס (כותבת המאמר) ועוזרת הוראה בקורס העריכו את היצירות שבגלריה באופן בלתי תלוי על פי מחוונים שפותחו במיוחד עבור קורס זה ופורסמו מראש (נספח ג). כאשר לא הייתה הסכמה על הציון, שתי המעריכות ניהלו דיון עד שהגיעו להסכמה ביניהן. מחוון עבור עבודה מקורית בנוי מתבחינים אלה: תוכן מתמטי, השקעה, יצירתיות והתאמת השם ליצירה. מחוון עבור עבודה לא מקורית בנוי מתבחינים אלה: תוכן מתמטי, ציטוט המקור, התאמת שם ליצירה (ראו נספח ג). כפי שאפשר לראות התבחינים בשני המחוונים לא זהים, היות שהיה לכותבת המאמר חשוב לעודד את הסטודנטיות ליצור עבודות מקוריות.

## ניתוח נתונים כמותיים

בשלב ראשון הנתונים הכמותיים נותחו בתוכנה IBM SPSS Statistics 23. הניתוח כלל חישוב מקדם המתאם של פירסון לשם בחינת קיום קשר וכיוונו בין המשתנים האלה: ציונים על עבודות אומנות וציונים על מבדק מקוון, ציונים על עבודת אומנות וציון על השאלה הרלוונטית במבחן מסכם. בשלב שני כל הנתונים חולקו לשתי קבוצות: קבוצה 1 (סך הכול 47) כללה הישגים של הסטודנטיות שיצרו עבודות אומנות מקוריות וקבוצה 2 כל שאר הסטודנטיות (סך הכול 80). לאחר שהנתונים חולקו לשתי קבוצות אלה, חושבו ציונים ממוצעים ונמצא שיש הבדל בין הממוצעים ביניהם. כדי לבדוק אם הבדל זה מובהק, חושב ניתוח שונות חד-כיווני (Oneway ANOVA). לבסוף חושבה קורלציה בין הציונים של עבודות אומנות למבדק מקוון ובין עבודות אומנות למבחן.

## ניתוח נתונים איכותניים

לצורך ניתוח התוכן המתמטי של עבודות האומנות התאמתי את שיטתו של אימדל (Christmann, 2008) שנהוגה בניתוח תוכן של נתונים ויזואליים. כדי להבין מהו דימוי המושגים המתמטיים של

הסטודנטיות השוויתי בין הפרטים הצורניים לכותרת או הסבר שהן צירפו. לאחר מכן השוויתי בין דימויי המושגים של הסטודנטיות לתכונות המתמטיות הידועות של המושגים.

## תוצאות המחקר

**שלב ראשון: האם קיים קשר בין עיסוק באומנות להישגים במתמטיקה?**

ניתוח סטטיסטי כפי שתואר לעיל עבור כלל הנתונים הכמותיים: תוצאות המבדקים, המבחן וציונים עבור עבודות האומנות (לוח 1). סטודנטיות שלא הגישו שום יצירה קיבלו ציון 0.

**לוח 1: סטטיסטיקה תיאורית עבור קבוצת המדגם של 127 סטודנטיות**

| | ציון ממוצע | סטיית תקן | מינימום | מקסימום |
|---|---|---|---|---|
| **מבדק** | 8.08 | 1.32 | 3.06 | 9.9 |
| **מבחן** | 6.19 | 1.57 | 1.81 | 9.52 |
| **עבודות אומנות** | 7.30 | 1.90 | 0 | 10 |

ניתוח הנתונים מצביע על קיום קשר חיובי בין עיסוק באומנות ובין הישגים של הסטודנטיות במבדק המקוון – $r_1 = 0.255$ (מובהק ברמה של 0.05). קשר מסוג זה לא מתקיים בין עיסוק באומנות ובין הישגים של הסטודנטיות במבחן – $r_2 = 0.045$.

**שלב שני: למידה פעילה לעומת למידה פעילה פחות**

היות שעבודת אומנות מקורית דרשה מהסטודנטיות השקעה רבה יותר מניתוח עבודת אומנות לא מקורית, החלטתי לבדוק אם היה שוני בהישגי הסטודנטיות בין שתי הקבוצות: קבוצה 1 – סטודנטיות שהגישו עבודה מקורית; קבוצה 2 – סטודנטיות שהגישו עבודה לא מקורית. חישוב הממוצעים של המבדק ושל המבחן מראה כי הממוצע של קבוצה 1 (9.55) גבוה יותר מהממוצע הכיתתי (9.21). גם ממוצע הציונים של המבחן של קבוצה זו (9.57) גבוה יותר מהממוצע הציונים הכיתתי (8.66). לעומת זאת, בקבוצה 2 המצב הפוך הן במבדק הן במבחן: הציון הממוצע של הקבוצה במבדק (8.97) נמוך מהממוצע הכיתתי (9.21), וגם הממוצע במבחן (8.03) נמוך יותר מהממוצע הכיתתי (8.66) (לוח 2).

**לוח 2: סטטיסטיקה תיאורית של קבוצה 1 וקבוצה 2**

| | | מספר סטודנטיות בקבוצה | ממוצע | סטיית תקן |
|---|---|---|---|---|
| מבדק | קבוצה 1 | 47 | 9.55 | 0.92 |
| | קבוצה 2 | 80 | 8.97 | 1.42 |
| | | 127 | 9.21 | 1.27 |
| מבחן | קבוצה 1 | 47 | 9.57 | 3.94 |
| | קבוצה 2 | 80 | 8.03 | 3.99 |
| | | 127 | 8.66 | 4.03 |

ההבדל בין ממוצעי הציונים של הקבוצות נבדק על ידי ניתוח שונות (Anova) ונמצא כי הוא מובהק (לוח 3).

**לוח 3: ניתוח שונות בין קבוצה 1 לקבוצה 2**

| | Sum of Squares | Df | Mean Square | Sig. |
|---|---|---|---|---|
| מבדק: בין הקבוצות | 9.36 | 1 | 9.36 | .020 |
| מבחן: בין הקבוצות | 66.34 | 1 | 66.34 | .040 |

על פי ממצאים אלה אפשר להעלות השערה שלמידה פעילה המתרחשת בעת יצירת עבודת אומנות מביאה לידי הישגים גבוהים יותר מלמידה פעילה פחות שכוללת בחירה וניתוח של יצירת אומנות קיימת. לשם בדיקת השערה זו, בדקתי את מתאמי פירסון כאשר $r_1$ – בודק את קיום הקשר בין עיסוק באומנות למבדק המקוון; $r_2$ – בודק את קיום הקשר בין עיסוק באומנות לשאלה המתאימה במבחן המסכם (לוח 4).

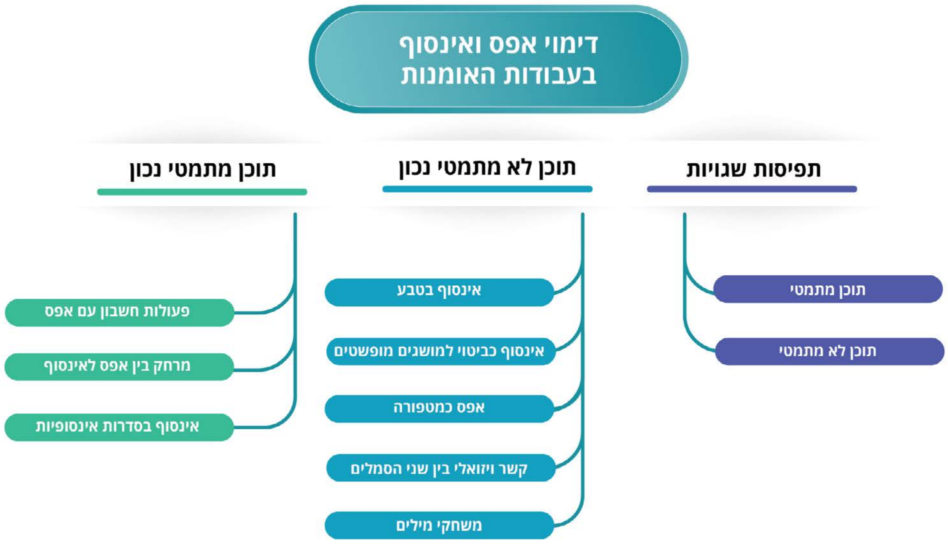
**לוח 4: מתאמי פירסון בין ציונים על עבודות אומנות ובין מבדק מקוון ומבחן סופי**

| | קבוצה 1 | קבוצה 2 |
|---|---|---|
| $r_1$ | .255* | .222* |
| Sig. (1-tailed) | .042 | .024 |
| מספר המשתתפות | 47 | 80 |
| $r_2$ | .169 | -.0530 |
| Sig. (1-tailed) | .128 | .320 |
| מספר המשתתפות | 47 | 80 |
| * p<0.05 (1-tailed) | | |

ההישגים במבדק המקוון של קבוצה 1 – הסטודנטיות שהיו מעורבות בלמידה פעילה המתרחשת בעת יצירה של עבודת אומנות היו גבוהים יותר במידה מובהקת מהממוצע הכיתתי. קשר זה לא נמצא בין צורת הלמידה (פעילה לעומת פעילה פחות) ובין הישגים במבחן המסכם.

**שלב שלישי: ניתוח תוכן של עבודות בגלריה השיתופית**

ניתוח העבודות בגלריה השיתופית הניב את הממצאים האלה: סך הכול הוגשו 115 עבודות כאשר 47 עבודות היו עבודות מקוריות של הסטודנטיות (ניתוח מקיף של עבודות מקוריות בתוך Nutov & Levenberg, 2020) ו-68 עבודות לא מקוריות. הגלריה שיצרו הסטודנטיות מציגה פסיפס של דימויים של המושגים אפס ואינסוף שמכיל תכונות מתמטיות של המושגים וגם דימויים שחורגים אל מעבר למתמטיקה ומקשרים אותם עם תופעות טבע, מושגים מופשטים, משחקי מילים ומטפורות. כמו כן עבודות אלה מאפשרות לזהות תפיסות שגויות (איור 1).




**איור 1: מיון דימויים של אפס ואינסוף**

## תוכן מתמטי נכון

ארבע פעולות חשבון עם **אפס** נלמדות כבר בבית הספר היסודי ועל כן לא מפתיע ששתיים מהעבודות המקוריות של הסטודנטיות עסקו בכך (ראו 2א). לעומת זאת, פעולות חשבון עם אינסוף דורשות ידע מתמטי ברמה גבוהה יותר ואכן אין אף עבודה שמציגה פעולות מתמטיות עם אינסוף.

עבודות אומנות מקוריות של סטודנטים ביטאו דימוי מושג של אינסוף פוטנציאלי כמו סדרה אינסופית; קבוצת מספרים שלמים לא שליליים; השתקפות אינסופית בין שני מראות; דרך אינסופית מנקודת התחלה (אפס) לאינסוף (מעניין לציין שבכל העבודות של הסטודנטים האפס הוא זה ששואף לאינסוף) (איור 2ב). תוצאה זו תואמת את ספרות המחקר שנמצא בה שאצל רוב הסטודנטים דימוי המושג אינסוף הוא של אינסוף פוטנציאלי (למשל, Kolar & Čadež, 2012). רק עבודה מקורית אחת יכולה להיחשב לאינסוף בפועל: היא מתארת את קבוצת המספרים השלמים בתוך סמל האינסוף. כלומר ביצירה זו קבוצת המספרים מתוארת כאובייקט ולא כתהליך. שלוש עבודות נוספות ביטאו דימוי מושג של המרחק האינסופי בין אינסוף לאפס ולא בין אינסוף לקבוצה סופית כפי שמצאה פולק (Falk, 2010).

## תוכן לא מתמטי נכון

כאמור, אפס ואינסוף אינם מושגים נפוצים בחיי היום-יום אך לשני המושגים מטפורות עשירות הנמצאות בשימוש בחיי יום-יום והמשפעות על חיי היום-יום. מרבית העבודות שבגלריה שייכות לקטגוריה זו. מכלל העבודות רק עבודה אחת בלבד הייתה קשורה לאפס – המחשת הביטוי "מלא עד אפס מקום". בשאר העבודות האינסוף הוצג כמו קו האופק, ים, יקום, חוכמה, מחשבות, מוזיקה, רגש, אפשרויות ועוד. ייתכן שכדי להתגבר על מורכבות המושג, הסטודנטיות פנו למטפורות. על פי לייקוף וג'ונסון (Lakoff & Johnson, 2003) המטפורות עוזרות לנו להבין מושגים מופשטים באמצעות אסוציאציות מילוליות של תופעות ידועות מחיי היום-יום. למשל כדי להגיע אל קו האופק ניאלץ לצעוד מרחק אינסופי כי ככל שנתקרב אליו, כך הוא יתרחק. פרשנויות אומנותיות אלה של אינסוף מייצגות אינסוף פוטנציאלי. ממצא זה עולה בקנה אחד עם מחקרים קודמים (למשל Falk, 2010). כך פרשנות זו של האינסוף מוסברת בעבודת האומנות של אחת הסטודנטיות: "אינסוף לא קיים בעולמנו החומרי/הכמותי ומכאן הקושי להגדירו. בכל זאת הוא קיים במקביל אלינו!!!". דוגמה נוספת לאותה התפיסה אפשר לראות בדבריה של סטודנטית אחרת:

> אינסוף זה משהו ללא גבולות או משהו שאינו מוגדר כסופי. ולכן כשאנחנו צריכים לתייג את האינסוף אז מבחינתי, לאינסוף יש בעצם אינסוף אפשרויות, ביטויים או עבודות אומנות. כל אחד רואה את האינסוף אחרת.

| | | |
|---|---|---|
| א. הכפלת כל מספר ב-0 תיתן תוצאה 0 | ב. האפס בדרכו אל האינסוף | ג. יש אינסוף שרשראות DNA בעולם ואין אחד שדומה לאחר |

**איור 2: דוגמאות לעבודות שהוצגו בגלריה השיתופית**

כמו כן, עבודות אחרות ביטאו משחקי מילים המקשרים בין אפס לאינסוף למשל: "לכל אפס יש את האפס שלו לצעוד יחד לאינסוף". במשפט זה יש רמז לפרשנות של אינסוף כתהליך: "לצעוד". בדוגמה זו אפס אינו מבטא כל משמעות מתמטית, היות שהחלפת 'אפס' ב'חמש' לא תשנה את המהות המתמטית של המשפט. כנראה יש לאפס משמעות ספרותית יותר כיוון שמשמעות מילה זו בשפה היום-יומית היא לא מוצלח או עלוב. יחס דומה לאפס אפשר לזהות גם בביטוי הזה: "לכל אפס יש אינסוף אפשרויות". שוב, אין משפט זה מבטא כל תכונה מתמטית לא של אפס ולא של אינסוף. שני המשפטים הופיעו בציורים שלא היה בהם כל רמז לתכונות המתמטיות של המושגים.

עוד ביטוי אומנותי לקשר בין אפס לאינסוף שיקף את הקשר בין הסמלים הויזואליים של המושגים, למשל, יחס לסמל של אינסוף כהרכב של שני עיגולים, כאשר עיגול הוא סמל של אפס. שוב, גם כאן לא היה כל ביטוי לתכונות המתמטיות של המושגים.

## תפיסות שגויות של אפס ואינסוף

עבודות אומנות אחרות בגלריה הציגו תפיסות שגויות הן של תוכן מתמטי של המושגים הן של תוכן לא מתמטי של המושגים. בחלק

מעבודות אלה מוצגות תופעות שאפשר לקבוע את גודלן, גדול ככל שיהיה, כתופעות המציגות את האינסוף. למשל מספר גרגירי חול או מספר צירופי שרשראות של DNA (איור 2ג) או צילום מדרגות לוליניות מזווית מסוימת שיוצרת אשליה של ספירלה אינסופית או מספר אנשים בעולם. ממצא זה תואם את תוצאות המחקרים הקודמים שזוהה בהם הקושי של הסטודנטים להבין קבוצות סופיות גדולות (למשל Kolar & Čadež, 2012). בשתי עבודות אחרות מתוארות תופעות שלא הוגדרו היטב כאינסופיות: ציור בשלג ומידע. בשתיהן האלמנטים של הסדרה אינם מוגדרים מכיוון שחסרה מסגרת זמן: אם התהליך מתאר תמונת מצב ברגע נתון, שתי הקבוצות יהיו סופיות; לעומת זאת, אם מסגרת הזמן היא אינסופית אז בשתי הקבוצות יש מספר אינסופי של איברים.

בין העבודות שהציגו תוכן מתמטי לא נכון היו ארבע עבודות המתארות תפיסות שגויות לגבי הקשר בין אפס לאינסוף: שלוש עבודות ראו באפס חלק מאינסוף. לדוגמה, אחת הסטודנטיות צירפה לעבודה את השאלה שציינה קיום תלות הדדית בין אפס לאינסוף: "כמה אינסוף נוכל לייצר מאפסים?". בעבודה אחרת סטודנטית בחרה להציג נקודה שנעה במעגל סגור. אומנם נקודה יכולה לנוע במסלול מעגלי אינסוף זמן ולעבור מרחק אינסופי, אך מעגל אינו ייצוג לאפס ומעבודתה של הסטודנטית לא היה אפשר להבין את כוונתה.

## דיון מסכם

מטרת המחקר הייתה לבחון את הקשר בין עיסוק באומנות ללימוד מושגים מתמטיים כמו אפס ואינסוף והקשר ביניהם בעת חישוב שטח והיקף בפרקטלים. המחקר התבסס על שיטת מחקר משולבת כמותנית-איכותנית (Creswell & Plano Clark, 2011). ממצאי המחקר תומכים בממצאים של מחקרים קודמים ואף מרחיבים אותם בארבעה היבטים עיקריים: 1. אוכלוסייה נחקרת – ברוב המחקרים בנושא זה אוכלוסיית המחקר הייתה תלמידי בתי ספר, ואילו במחקר הנוכחי היא מתכשרים להוראת מתמטיקה; 2. ייצוג ויזואלי המשמש בהוראה/למידה של מתמטיקה – רוב המחקרים התמקדו בייצוגים גרפיים (טבלאות, גרפים, פונקציות) ולא בעבודות אומנות; 3. ממצאי המחקר מצביעים על קיום קשר בין עיסוק באומנות להבנה טובה יותר של מושגים בעת ביצוע משימות מתמטיות הדורשות רמות חשיבה נמוכות (Bloom, Engelhart, Furst, Hill, & Krathwohl, 1956; Krathwohl, 2002). במשימות מתמטיות הדורשות רמות חשיבה גבוהות התוצאות לא היו מובהקות; 4. תוצאות המחקר מצביעות על הקשר בין הישגים מתמטיים גבוהים ובין סוג העיסוק באומנות – במקרה של עיסוק פעיל ביצירת עבודות אומנות מקוריות ההישגים גבוהים יותר.

הוראת מתמטיקה מאתגרת את המורים והתלמידים כאחד. במקרה של שילוב מתמטיקה עם אומנות האתגר עבור המורים גדול אף יותר. הבנת חוויות הלמידה ותוצאותיה האפשריים של מתכשרים להוראה חשובה היות שכמורים תהיה להם השפעה על המוטיבציה וההישגים של תלמידיהם (Hill, Kapitula, & Umland, 2011; Ruzek, Domina, Conley, Duncan, & Karabenick, 2015). הניסיון האישי שלהם עם משימות שמשלבות אומנות עם מתמטיקה מגדיל את הסיכוי שהם יאמצו גישת למידה-הוראה זו בעתיד (Lee & Cawthon, 2015). תוצאות המחקר הצביעו על כך שיש קשר בין עיסוק באומנות (יצירה מקורית או בחירה וניתוח של עבודות קיימות) ובין הישגי הסטודנטיות כאשר במשימה מתמטית היו שאלות שדרשו חשיבה ברמה נמוכה (Bloom et al., 1956; Krathwohl, 2002). על פי שורסר (Shorser, 1999) שהציעה פרשנות לטקסונומיה של בלום עבור משימות במתמטיקה, שאלות מהרמה הראשונה, רמת הידע, יכללו הנחיות כמו "קבע את ההגדרה", "קבע משפט" או "השתמש בשיטה שצוינה". על סמך פרשנות זו רק טבעי שסטודנטיות שאין להן השכלה באומנות והן לא קיבלו שום הדרכה כיצד ליצור אומנות, יביעו בעבודותיהן ידע מתמטי ברמה הבסיסית ביותר. כלומר במקרה הנוכחי יש התאמה בין תוכן מתמטי של עבודות אומנות שנמצאו בגלריה לרמה המתמטית של שאלות במבדק המקוון. תוצאה זו של המחקר תואמת תוצאות של מחקרים קודמים שבחנו את שילוב האומנות בבתי ספר היסודי (למשל Brezovnik, 2015; Gullatt, 2007). בסקירת הספרות לא נמצאו מאמרים שבדקו נושא זה עבור לומדים במוסדות להשכלה גבוהה.

לעומת זאת, בפתרון משימות המצריכות רמות חשיבה גבוהות יותר, למשל רמת ניתוח, לומד יתבקש לזהות את המשפט המתאים ולהשתמש בו כדי להגיע למסקנה או למיין נתונים. כדי להביע תוכן מתמטי עמוק שדורשות שאלות מסוג זה, צריך גם יכולות אומנותיות גבוהות (Schattschneider, 2010) שכאמור, היו חסרות לרוב הסטודנטיות. מלבד השוני בין רמות חשיבה נדרשות, בחינה לעומק של תוצאות המחקר יכולה להצביע על עוד לפחות שני מקורות להבדל בתוצאות בשני הסוגים של המשימות המתמטיות: הזמן שחלף בין יצירת הגלריה למבחן המתמטיקה וההתאמה בין מושגים מתמטיים שנכללו במבחנים ובין עבודות האומנות.

גלריית האומנות נוצרה סמוך למועד המבדק המקוון. לפיכך העיסוק של הסטודנטיות באומנות בנושא הנלמד היה יכול לשמש בעבורן הזדמנות לבדוק את הידע הקיים ואף להעמיק אותו. בהשוואה למבדק המקוון, הבחינה התקיימה כתשעה שבועות לאחר הגשת עבודת אומנות לגלריה ולא הייתה כל דרישה לעסוק באומנות לפני הבחינה הסופית. כלומר הזמן שעבר בין עיסוק באומנות לבחינה הסופית היה ארוך יותר מהזמן שעבר בין העיסוק באומנות למבדק המקוון. בספרות יש עדויות שלעיסוק באומנות יש השפעה ארוכת טווח (Burton et al., 2000; Sisman & Aksu, 2016), ואולם אוכלוסיית המחקר במחקרים המצוטטים הייתה תלמידי בתי ספר יסודיים ולא מתכשרות להוראה. היות שמדובר במחקר חלוץ, נדרש מחקר נוסף שיתמקד בבדיקת הקשר בין גורם הזמן של העיסוק באומנות ובין מבחני ההישגים עבור אוכלוסייה של מתכשרות להוראה.

עבודות האומנות והשאלות במבדק המקוון התמקדו במושגים של אפס ואינסוף, ואילו השאלה הרלוונטית במבחן המסכם התמקדה בחישוב השטח וההיקף של פרקטל המכונה משולש שיירפינסקי, ובמפגש בין אפס לאינסוף בחישובים אלה. במילים אחרות, עבודות אומנות התמקדו בתוכן המתמטי של המבדק המקוון אך לא בתוכן המתמטי של השאלה במבחן (ביחידה הייתה משימת חובה שעסקה בחישוב שטח והיקף של פרקטל – אי המרובע של קוך – משימה שדורשת את אותן רמות חשיבה כמו השאלה בבחינה. משימה זו ניתנה ללימוד עצמי ולא נערכה בדיקה על ביצועה). לכאורה תוצאה זו של המחקר צפויה ואינה מפתיעה. אך היא מנוגדת לתוצאות מחקרים אחרים שנמצא בהם כי לעיסוק באומנות יש תרומה הוליסטית להישגיהם של תלמידי בית ספר, ללא התאמה בין תוכן מתמטי לתוכן של עבודות האומנות (Brezovnik, 2015; Burton et al., 2000). ההבדל בין תוצאות מחקר זה לבין הספרות עשוי לנבוע מההבדל באוכלוסיית המחקר, ואולם גם תוצאה זו מחייבת בדיקה במחקר עתידי.

כמו כן תוצאות המחקר הצביעו על כך שסטודנטיות שעסקו בלמידה פעילה במהלך יצירת עבודת אומנות מקורית המשקפת את הפרשנות

שלהן למושגים שנלמדו, קיבלו ציונים גבוהים יותר מסטודנטיות שעסקו בלמידה פעילה פחות – בחרו וניתחו עבודות אומנות קיימות. סטודנטיות שעסקו בתהליך יצירתי, לא רק קבעו את התוצר הוויזואלי הסופי שלהן, אלא חשוב יותר, הן קבעו אילו תכונות מתמטיות יוצגו בתוצר. כלומר עבודות האומנות המקוריות של הסטודנטיות משקפות את המאפיינים של המושג הנלמד, כמו גם את דימוי המושג האישי שלהן (Tall & Vinner, 1981). תהליך זה יכול לתרום ל"ראייה טובה יותר של מושגים ורעיונות מתמטיים" (Arcavi, 2003) כפי שעולה מתוצאות המחקר. כלומר הסטודנטיות יכלו לבחון אם דימוי המושג שלהן תואם את הגדרת המושג ובכך להעמיק את הידע שלהן. לעומת זאת, במקרה של סטודנטיות שהיו פעילות פחות ובחרו בעבודות אומנות קיימות, אין כל ערובה לכך שהיצירה תואמת את תפיסתן של המושגים המתמטיים הנלמדים. כלומר העבודות שהן העלו לגלריה לא בהכרח שיקפו את דימוי המושג האישי שלהן. אפשר לומר שסטודנטיות אלה ויתרו על הזדמנות לבחון אם דימוי המושג שלהן תואם את הגדרת המושג כפי שניתנה בחומרי הלימוד שביחידה.

## מגבלות המחקר

המחקר הנוכחי הוא מחקר חלוץ שתרומתו העיקרית היא להעלות מודעות לפוטנציאל הטמון בשילוב אומנות בהוראת מתמטיקה, אך כמו בכל מחקר יש לו מגבלות. המגבלה הראשונה היא מדגם המחקר שהיה מדגם נוחות (Johnson & Christensen, 2012) ולא מדגם אקראי. מדגם נוחות יכול להביא לידי הטיה מסוימת של התוצאות, ייתכן שהסטודנטיות שבחרו להיות מעורבות יותר ביצירת אומנות היו סטודנטיות עם הישגים גבוהים. כדי להימנע מהטיה זו, אחד מהכיוונים של המחקר העתידי יכול להיות תכנון של מחקר אמפירי שבו סטודנטים עם פרופיל לימודי זהה ילמדו את אותו הנושא המתמטי בשלוש דרכים: קבוצה אחת תלמד נושא מתמטי בשילוב של יצירת אומנות במידה פעילה – יצירת עבודות אומנות מקוריות, קבוצה שנייה תלמד את הנושא למידה פעילה פחות – בשילוב ניתוח של עבודות אומנות קיימות וקבוצה שלישית תלמד את הנושא בלי שילוב אומנות. בתום לימוד הנושא המתמטי כל שלוש הקבוצות יבצעו את אותן המשימות המתמטיות. מבנה כזה יאפשר לקבוע אם מעורבות פעילה באומנות אכן תורמת להישגים מתמטיים גבוהים יותר, כפי שהראו תוצאות המחקר הנוכחי.

המגבלה השנייה של המחקר היא העדפת תכנים מתמטיים בתכנון הקורס על פני תכנים אומנותיים. יצירת גלריה שיתופית תרמה רק 9% לציון המסכם בקורס, כלומר 1.5% עבור כל יחידה. משמעות הדבר היא שהסטודנטיות ידעו מראש כי המאמצים שלהן צריכים להיות מכוונים ללימוד תכנים מתמטיים ושילוב אומנות דומה יותר ל'קישוט'. במחקר עתידי, האומנות והמתמטיקה צריכים להיות חשובים באותה מידה בעיצוב סביבת הלמידה. בדרך זו הסטודנטים ישקיעו חשיבה ומאמץ רבים במשימה הקשורה לאומנות, דבר שיאפשר ללמוד על תרומה של אומנות ללימודי מתמטיקה.

המגבלה השלישית היא שימוש בשני מחוונים שונים להערכת עבודות האומנות. מכיוון שהמטרה שלי הייתה לעודד את סטודנטיות ליצור עבודות אומנות מקוריות, נכללו קריטריונים כמו יצירתיות, מאמץ ואומנות במחוון; עם זאת, אי אפשר להשתמש בקריטריונים אלה כדי להעריך עבודות אומנות שאינן מקוריות. כדי להתמודד עם אתגר זה פיתחתי שני מחוונים עם קריטריונים שונים. פתרון זה אינו אידיאלי, ולכן בעתיד כדאי לפתח כלי הערכה גנרי. כלי כזה יתרום לקידום מחקר בנושא שילוב אומנות בלימודי מתמטיקה.

לסיכום, המחקר הנוכחי הוא מחקר חלוץ שבחן את הקשר בין עיסוק באומנות להישגים בנושא של הבנת המושגים אפס ואינסוף. ממצאי המחקר מצביעים על קשר חיובי מובהק בין עיסוק באומנות ובין הישגי הסטודנטיות בשאלות שדרשו חשיבה ברמה נמוכה. קשר זה חזק יותר כאשר הסטודנטיות מעורבות במידה פעילה ביצירת עבודות אומנות.

## רשימת מקורות


Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.doi:10.1023/A:1024312321077

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary end secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144. doi:10.2307/749140

Barton, N. (2019). Absence perception and the philosophy of zero. *Synthese (2018)*, 1-28. doi:10.1007/s11229-019-02220-x

Biller, J. (1995, October). *Math in art or art in math*. Papar presented at the 9th Annual National Conference on Liberal Arts and Education of Artists, New York, NY. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED405907.pdf

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals* (Handbook I: Cognitive domain). New York: David McKay Co Inc.

Boaler, J. (2015). Th*e elephant in the classroom: Helping children learn and love maths*. London: Souvenir Press.

Brezovnik, A. (2015). The benefits of fine art integration into mathematics in primary school. *Center for Educational Policy Studies Journal, 5*(3), 11-32.

Burton, J. M., Horowitz, R., & Abeles, H. (2000). Learning in and through the arts: The question of transfer. *Studies in Art Education, 41*(3), 228-257. doi:10.2307/1320379

Cankoy, O. (2010). Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching a0, 0! and a ÷ 0. Educational Sciences: *Theory and Practice, 10*(2), 749-769.

Crespo, S., & Nicol, C. (2006). Challenging preservice teachers' mathematical understanding: The case of division by zero. *School Science and Mathematics, 106*(2), 84-97. doi:10.1111/j.1949-8594.2006.tb18138.x

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, Calif.: SAGE.

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2nd ed.). Thousand Oaks, Calif.: SAGE.

Christmann, G. B. (2008). The power of photographs of buildings in the Dresden urban discourse. Towards a visual discourse analysis. Forum: *Qualitative Social Research, 9*(3). Retrieved from http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1163/2570

Dietiker, L. (2015). What mathematics education can learn from art: The assumptions, values, and vision of mathematics education. *Journal of Education, 195*(1), 1-10. doi:10.1177/002205741519500102

Education (CERME 7)* (pp. 2717-2726). Rzeszów: Poland: University of Rzeszów.

Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lee, B., & Cawthon, S. (2015). What predicts pre-service teacher use of arts-based pedagogies in the classroom? An analysis of the beliefs, values, and attitudes of pre-service teachers. *Journal for Learning Through the Arts, 11*(1), 1-15. doi:10.21977/D911119691

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 239-257. doi:10.1023/A:1016090925967

Murphy, S. J. (2009). The power of visual learning in secondary mathematics education: How does visual learning help high school students perform better in mathematics? *Research into Practice Mathematics*, 1-8. Retrieved from https://assets.pearsonglobalschools.com/asset_mgr/legacy/200932/PHMath2011_StuartMurphy_24384_1.pdf

Nutov, L. (2018a). Is dimension a size, a surface or a space? Pre-service teachers' perceptions of the concept. In B. Maj-Tatsis, K. Tasis, & E. Swoboda (Eds.), *Mathematics in the real world* (pp. 231-240). Rzeszow: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. Retreived from https://5b06a6f9-c9ac-4c0b-ac0a-6f404878a5bc.filesusr.com/ugd/10e654_59984ea2dfcc4271b29e790c54a1c806.pdf

Nutov, L. (2018b). When mathematics meets art: Does art contribute to the understanding of mathematical concepts? *In Bridges conference: Mathematics, art, music, architecture, education, culture* (pp. 341-346). Stockholm, Sweden: The National Museum of Science and Technology.

OECD. (2009). *Creating effective teaching and learning environments: First results from TALIS* (Chapter 4: Teaching practices, teachers' beliefs and attitudes). Retrieved from http://www.oecd.org/berlin/43541655.pdf

OECD. (2016). *Ten questions for mathematics teachers ... and how PISA can help answer them*. Retrieved from https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264265387-en.pdf?expires=1588846142&id=id&accname=guest&checksum=26660A23288FD126B0F504BE6E-A2927A

Okbay, U. E. (2013). *Art in the middle school mathematics classroom: A case study exploring its effect on motivation* (Master's thesis). Bilkent University, Ankara. Retrieved from http://repository.bilkent.edu.tr/bitstream/handle/11693/15714/0006427.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Oreck, B. (2006). Artistic choices: A study of teachers who use the arts in the classroom. *International Journal of Education & the Arts, 7*(8), 1-27.

Podgoršek, M. (2016). High school students' and pre-service teachers' drawings of some mathematical concepts. *Some Issues in Pedagogy and Methodology*, 44-52. doi:10.18427/iri-2016-0063

Quinn, J. R., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher perceptions of division by zero. *The Clearing House, 81*(3), 101-104. doi:10.3200/TCHS.81.3.101-104

Efland, A. (2003). Imagination in cognition: The purpose of the arts. *The International Journal of Arts Education, 1*(1), 26-50. Retrieved from https://ed.arte.gov.tw/uploadfile/Periodical/428_26_66.pdf

Eisner, E. W. (2002). *The arts and the creation of mind*. New Haven & London: Yale University Press.

Falk, R. (2010). The infinite challenge: Levels of conceiving the endlessness of numbers. *Cognition and Instruction, 28*(1), 1-38. doi:10.1080/07370000903430541

Fenyvesi, K., & Lähdesmäki, T. (Eds.). (2017). *Aesthetics of interdisciplinarity: Art and mathematics.* Cham: Springer International Publishing.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books Inc.

Gelineau, P. R. (2011). *Integrating the arts across the elementary school curriculum* (2nd ed.). Wadsworth: Cengage Learning.

Gullatt, D. E. (2007). Research links the arts with student academic gains. *The Educational Forum, 71*(3), 211-220. Rertrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ763212.pdf

Hill, H. C., Kapitula, L., & Umland, K. (2011). A validity argument approach to evaluating teacher value-added scores. *American Educational Research Journal, 48*(3), 794-831. doi:10.3102/0002831210387916

Ibarra, L. M., Romo-Vázquez, A., & Aguilar, M. S. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts, 13*(1-2), 48-59. doi:10.1080/17513472.2018.1504270

Johnson, B., & Christensen, L. (2012). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (4th ed.). Thousand Oaks: SAGE.

Karakus, F. (2018). Investigation of pre-service teachers' pedagogical content knowledge related to division by zero. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 19*(1), 90-111.

Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: A process or an object? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) (pp. 1771-1780). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique. Retrieved from https://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice, 41*(4), 212-218. doi:10.1207/s15430421tip4104_2

Kolar, V. M., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 389-412. doi:10.1007/s10649-011-9357-7

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – an empirical study with preservice teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics*

Root-Bernstein, R., Allen, L., Beach, L., Bhadula, R., Fast, J., Hosey, C., . . . Weinlander, S. (2008). Arts foster scientific success: Avocations of nobel, national academy, royal society, and sigma xi members. *Journal of Psychology of Science and Technology, 1*(2), 51-63. doi:10.1891/1939-7054.1.2.51

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers conceptions of zero. *The Mathematics Enthusiast, 8*(1-2), 77-112.

Ruzek, E. A., Domina, T., Conley, A. M., Duncan, G. J., & Karabenick, S. A. (2015). Using value-added models to measure teacher effects on students' motivation and achievement. *The Journal of Early Adolescence, 35*(5-6), 852-882. doi:10.1177%2F0272431614525260

Schattschneider, D. (2010). The mathematical side of MC Escher. *Notices of the AMS, 57*(6), 706-718.

Sendova, E., & Chehlarova, T. (2013). Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry. *In DynaMath 12 Conference* (pp. 495-502). Nitra, Slovakia: Constantine the Philosopher University. Retrieved from http://www.math.bas.bg/omi/toni/rezume-statii/126_STUDYING_FINE ART_COMPOSITIONS_BY_MEANS_OF_DYNAMIC_GEOMETRY_CONSTRUCTIONS_2013.pdf

Shorser, L. (1999). *Bloom's Taxonomy interpreted for mathematics*. Retrieved from http://www.math.toronto.edu/writing/BloomsTaxonomy.pdf

Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7),1293-1319. doi:10.1007/s10763-015-9642-5

Smithrim, K., & Upitis, R. (2005). Learning through the arts: Lessons of engagement. *Canadian Journal of Education, 28*(1-2), 109-127. doi:10.2307/1602156

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School, 10*(3), 30-33. Retrieved from https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981c-intuitions-infinity.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. doi:10.1007/BF00305619

Thuneberg, H., Salmi, H., & Fenyvesi, K. (2017). Hands-on math and art exhibition promoting science attitudes and educational plans. *Education Research International*, 1-13. doi:10.1155/2017/9132791

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 199-214). Dordrecht: Kluwer Academic.

Ward, R. (2006). Modeling effective pedagogical strategies for teaching mathematics. *The Charter Schools Resource Journal*, 1-9. Retrieved from https://rusmp.rice.edu/sites/g/files/bxs1546/f/modeling%20effective.pdf

Weisstein, E. (n.d.) Zero. *Wolfram MathWorld*. Retrieved February 2, 2020, Retrieved from http://mathworld.wolfram.com/Zero.html

Wu, L., Jia, L., & Ye, L. (2015). Exploration of calculus teaching and assessment through artwork. *International Journal of Applied Research, 1*(8), 731-735.

Zimmerman, A. S. (2016). Developing confidence in STEAM: Exploring the challenges that novice elementary teachers face. *The STEAM Journal, 2*(2), 1-9. doi:10.5642/steam.20160202.15

## נספחים

**נספח א: שאלה לדוגמה מתוך מבדק מקוון**

יש לבחור תשובה אחת או יותר.

0 הוא גורם חשוב במערכת הספירה העשרות מכיוון שהוא:

א. מאפשר לחשב מרחקים.

ב. מאפשר להבדיל בין המספרים 12, 120, 102.

ג. מאפשר לבצע פעולות חשבון עם מספרים גדולים.

ד. מאפשר להגדיר כל מספר.

ה. מייצג כמות.

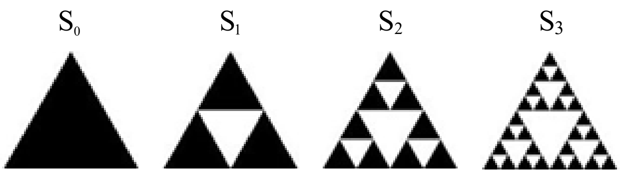
**נספח ב: שאלה מתוך המבחן המסכם**

כדי לבנות את הצורה המכונה משולש שירפינסקי צריך לבצע אינסוף שלבי בנייה. באיור המצורף נתונים 3 שלבי בנייה ראשונים של משולש שירפינסקי. תיאור שלבי הבנייה:

שלב 0: נתון משולש שווה צלעות – $S_0$.

שלב 1: חלקו את המשולש הנתון ($S_0$) לארבעה משולשים ש"צ על ידי חיבור אמצעי הצלעות וגרעו את המשולש האמצעי. התקבלה צורה ($S_1$) המורכבת מ-3 משולשים שווי צלעות המחוברים בקודקודים כמתואר בציור.

שלב 2: כדי לקבל את הצורה $S_2$ עבור כל אחד מהמשולשים המרכיבים את $S_1$ חוזרים על שלבים 0 ו-1. באופן דומה יוצרים את השלב הבא $S_3$. כדי לקבל את משולש שירפינסקי חוזרים על שלבי בנייה 0 ו-1 אינסוף פעמים.




א. חשבו את השטח ואת היקף של המשולש S0 אם נתון כי אורך הצלע הוא 1 ס"מ.

ב. חשבו את השטח (המסומן בשחור) ואת ההיקף של הצורה $S_1$.

ג. חשבו את השטח (המסומן בשחור) ואת ההיקף של הצורה $S_2$.

ד. ממשיכים לבנות את הצורה באופן שמגדירים זאת השלבים 0, 1, 2, 3. **למה יהיה שווה השטח וההיקף** של הצורה (כל השטח השחור) לאחר אינסוף שלבי בנייה? (הקיפו את התשובה הנכונה – אחת עבור שטח ואחת עבור היקף). נמקו את תשובתכם (היעזרו בסעיפים א, ב, ג).

1. השטח יגדל וישאף לאינסוף.
2. השטח יקטן וישאף ל-0.
3. השטח ישאף למספר כלשהו שונה מ-0.
4. ההיקף יגדל וישאף לאינסוף.
5. ההיקף יקטן וישאף ל-0.
6. ההיקף ישאף למספר סופי כלשהו.
7. השטח יהיה שווה להיקף.

**נספח ג: שני מחוונים להערת עבודות אומנות בנושא 'מושגים מתמטיים'**

א. מחוון לעבודות אומנות מקוריות בנושא 'מושגים מתמטיים'

| קריטריון | איכות מצוינת | איכות טובה (אפשרות א או ב) | איכות בינונית | איכות ירודה | לא איכותי |
|---|---|---|---|---|---|
| **מושגים מתמטיים** | העבודה מבטאת את אחד מהקשרים המתמטיים האפשריים בין אפס לאינסוף. | א. הקשר בין אפס לבין אינסוף אינו מדויק מתמטית.<br>ב. יש ביטוי מתמטי מדויק של 0 או של אינסוף. | אפשר לזהות תכונות מתמטיות של 0 או של אינסוף. | ביטוי מתמטי הכולל תפיסות שגויות של 0 או של אינסוף. | העבודה אינה כוללת כל התייחסות ל-0 או לאינסוף. |
| | **50 נק'** | **45 נק'** | **30 נק'** | **20 נק'** | **0 נק'** |
| **יצירתיות** | עבודה מקורית, מפורטת ומעניינת שמדגישה מושגים ועקרונות מתמטיים. | עבודה כוללת אלמנטים מקוריים או מעניינים או מפורטים שמדגישים את המושגים והעקרונות המתמטיים. | עבודה כוללת אלמנטים מקוריים מעטים או מעניינים או מפורטים שמדגישים את המושגים והעקרונות המתמטיים. | אפשר לזהות אלמנטים כלשהם מקוריים או מעניינים או מפורטים שמדגימים את המושגים והעקרונות המתמטיים. | אי אפשר לזהות אף אלמנט מקורי או מעניין או מפורט. |
| | **20 נק'** | **15 נק'** | **10 נק'** | **5 נק'** | **0 נק'** |
| **השקעה וביצוע** | עבודה נעשתה בהשקעה יוצאת דופן ותשומת לב לפרטים. | עבודה מושקעת עם תשומת לב לפרטים. | עבודה נעשתה בהשקעה מסוימת ותשומת לב לפרטים. | עבודה נעשתה בהשקעה מעטה או פחות תשומת לב לפרטים. | לא ניכרת כל השקעה בעבודה. |
| | **20 נק'** | **15 נק'** | **10 נק'** | **5 נק'** | **0 נק'** |
| **כותרת או הסבר מצורף** | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים את התוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים חלקית לתוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, בקושי רב תואמים לתוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, לא תואמים לתוכן המתמטי. | חסר. |
| | **10 נק'** | **8 נק'** | **6 נק'** | **3 נק'** | **0 נק'** |

ב. מחוון לעבודות אומנות לא מקוריות בנושא 'מושגים מתמטיים'

| קריטריון | איכות מצוינת | איכות טובה (לבחור אפשרות א או ב) | איכות בינונית | איכות ירודה | לא איכותי |
|---|---|---|---|---|---|
| **מושגים מתמטיים** | העבודה מבטאת את אחד מהקשרים המתמטיים האפשריים בין אפס לאינסוף. | א. הקשר בין אפס לבין אינסוף אינו מדויק מתמטית.<br>ב. יש ביטוי מתמטי מדויק של 0 או של אינסוף. | ביטוי מתמטי לא מדויק של 0 או של אינסוף. | ביטוי מתמטי הכולל תפיסות שגויות של 0 או של אינסוף. | העבודה אינה כוללת כל התייחסות ל-0 או לאינסוף. |
| | **70 נק'** | **55 נק'** | **40 נק'** | **30 נק'** | **0 נק'** |
| **כותרת או הסבר מצורף** | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים את התוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, תואמים חלקית לתוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, בקושי רב תואמים לתוכן המתמטי. | הכותרת או ההסבר שצורף ליצירה, לא תואמים לתוכן המתמטי. | חסר |
| | **20 נק'** | **16 נק'** | **12 נק'** | **6 נק'** | **0 נק'** |
| **הפנייה אל המקור** | ההפניה אל המקור צוטטה על פי כללי APA וצורף שמו של היוצר | | המקור לא צוטט על פי כללי APA או לא צורף שמו של היוצר | | חסר |
| | **10 נק'** | | **5 נק'** | | **0 נק'** |