מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

פרופ׳ (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר
כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הביאה לישראל את ״תוכנית קולומביה״, והנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים הדרמטיים ״חשבון פשוט״ שעליהם הטלוויזיה החינוכית זכתה בפרס בין-לאומיים.

פרופ׳ מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער.

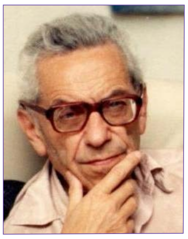
היא הקימה בשנת 1987 את ״קשר חם״ - מרכז מו״פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. בשנים האחרונות היא מתמסרת לפיתוח מבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהקמת אתר ״רמזור למורה״.

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-125,000 פריטים המתפרסמים בכ-650 כתבי-עת מתמטיים למאגר המידע הבין-לאומי המנוהל בידי החברה המתמטית האמריקאית MathSciNet: AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info. רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים.

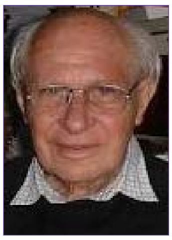
מדור החדשות בגיליון זה מכיל הפעם חדשות על התקדמות משמעותית לקראת פתרונן של שלוש בעיות, על בעיה שנראה היה שנפתרה אבל התברר שהייתה שם טעות, על השערה ש"נפתרה" באמצעות הפרכתה ועוד הפתעות שהן כמובן רק חלק קטנטן של המתרחש השכם והערב בתחום המתמטיקה הסוער.

בעיית ״הסוף הטוב״

הכול התחיל בשנת 1933 בבודפשט בירת הונגריה. יום בהיר אחד אתגרה עלמה צעירה ששמה אסתר קליין שניים מחבריה הטובים, פול ארדש בן ה-20 וג'ורג סזקרס בן ה-22: "הצלחתי להוכיח שבהינתן חמש נקודות כלשהן במישור, כך שאף שלוש מהן לא נמצאות על אותו קו ישר, אפשר תמיד למצוא ביניהן ארבע שהן הקוד קודים של מרובע קמור".[1] השניים חשבו, חיפשו ומצאו גם הם דרך להוכיח זאת.[2] ואז, כמקובל



Paul Erdős
1913-1996



George Szekeres
1911-2005

1. מצולע קמור הוא מצולע שאפשר להקיף אותו סביב באמצעות פניות ימינה בלבד או פניות שמאלה בלבד. לחלופין מצולע קמור הוא מצולע שכל האלכסונים שלו פנימיים.
2. ההוכחה שאסתר קליין נתנה ומובאת במאמרם של ארדוש וסזקרס (Erdős & Szekeres, 1935) היא כדלקמן: אם הפוליגון המינימלי שמכיל (כנקודות שפה או נקודות פנימיות) את כל הנקודות הוא מרובע או מחומש אז הטענה מובנת מאליה. נניח שהמצולע המינימלי המכיל את כל הנקודות הנתונות הוא משולש ABC, אזי שתי הנקודות הנותרות D ו-E נמצאות בתוך המשולש. שתיים מהנקודות הנתונות (נניח שאלה הן A ו-C) בהכרח נמצאות מאותו צד של הקו הישר המחבר את D ו-E. לפיכך AEDC הוא מרובע קמור.

במתמטיקה, אתגרה אותם אסתר קליין בשאלה כללית יותר: אם חמש נקודות מספיקות כדי להבטיח את קיומו של מרובע קמור, האם קיים ואם כן, מהו מספר הנקודות הכי קטן שמספיק כדי להבטיח את קיומו של מחומש קמור? משושה? או בכלל, מצולע קמור בעל מספר אחר כלשהו של צלעות – n?

לאחר מכן התברר שהבעיה הזאת מסובכת יותר. כעבור שנתיים, בשנת 1935, פרסמו ארדש וסזקרס (Erdős & Szekeres, 1935) מאמר ובו הציגו את פתרון הבעיה עבור מצולעים קמורים בעלי שלוש, ארבע וחמש צלעות. ליתר דיוק הם הראו ששלוש נקודות שאינן על קו אחד מספיקות כמובן כדי להבטיח שאפשר לבנות משולש קמור, והראו את ההוכחה של אסתר קליין לכך שחמש נקודות שאף שלוש מהן אינן על קו אחד, מספיקות כדי להבטיח את קיומו של מרובע קמור, ואת ההוכחה שתשע נקודות כאלו מספיקות כדי להבטיח שקיים מחומש קמור שנתנו שני מתמטיקאים אחרים, א' מאקאי ופ' תוראן (E. Makai & P. Turan). באותו מאמר מציגים ארדש וסזקרס תוצאה חדשה שמצאו, והיא $\binom{2n-4}{n-2}$ כחסם עליון למספר הנקודות המספיק כדי להבטיח קיומו של מצולע קמור בעל n צלעות. הם אף העלו את ההשערה שמספר הנקודות המינימלי שמספיק לכך הוא לפחות $2^{(n-2)}+1$. במאמר אחר (Erdős & Szekeres, 1960-1961) הם הוכיחו זאת והעלו את ההשערה שהמספר המינימלי שווה בדיוק ל-$2^{(n-2)}+1$. נוסף על כך ארדש הציע, כפי שעשה פעמים רבות אחרות במהלך הקריירה היצירתית שלו כמתמטיקאי שופע שאלות מעניינות, פרס בסך 500 דולר לכל מי שיצליח להוכיח שההשערה נכונה.[3]

הבעיה זכתה לשם "בעיית הסוף הטוב" מסיבות שאין להן כל קשר לסוגיה המתמטית. יש אומרים שהיא פרי המצאתו של ארדש. על כל פנים היא משקפת את התוצאה הלא-מתמטית העיקרית של התעניינותם של אסתר קליין וג'ורג סזקרס בה: הם התאהבו, נישאו בשנת 1937, ברחו מהונגריה עם עליית הנאציזם, וחיו יחד עד שנפטרו באוסטרליה שניהם באותו יום בשנת 2005, כ-70 שנה אחרי שההשערה הועלתה... ומה עלה בגורלה של ההשערה?

עשרות שנים חלפו ללא התקדמות. עד שנת 2006, התוצאה היחידה שהוכחה (באמצעות מחשב, בידי סזקרס ועמיתו לינדי פיטרס) היא שלקיומו של משושה קמור דרושות לפחות 17 נקודות שאין ביניהן שלוש נקודות על אותו קו, וזה מאושש את ההשערה כי $2^{(6-2)}+1=17$. צפו [כאן](#) בסרטון יו-טיוב משנת 2014 שמסביר את הקושי בהוכחת המקרה של המשושה ונעוץ בכוח החישוב הגבוה מאוד הנחוץ לשם כך.

ושוב עברו שנים, עד שבשנת 2017, בעבודה שפרסם אנדרו סוק (Andrew Suk) מאוניברסיטת אילינוי שבשיקגו בכתב העת של החברה האמריקאית למתמטיקה (AMS), מופיעות ראיות חזקות לכך שהאינטואיציה שהנחתה את ארדש וסזקרס הייתה ככל הנראה נכונה (Suk, 2017). אומנם העבודה של סוק איננה הוכחה מלאה, אבל בקהילייה המתמטית אין עוררין על כך שהיא מחזקת את ההשערה שלהם במידה שקשה להעלות על הדעת שהיא לא נכונה. חבל רק שארדש וסזקרס לא זכו לראות את השערתם כה קרובה לאימות.

המעוניינים בפרטים על ההוכחה של סוק ופריצת הדרך שהתווה בשיטת ההתבוננות במצולעים קמורים כמורכבים מ"כוס" ו"מכסה" (Cups and Caps), התבוננות שהציגו ארדש וסזקרס מלכתחילה, ימצאו את מבוקשם בכתבה שהתפרסמה במאי 2017 במגזין Quanta [כאן](#).

התקדמות בהוכחת השערת התאומים

כמו בעיות רבות בתורת המספרים גם השערת התאומים קלה מאוד להבנה, אבל היא אגוז קשה לפיצוח. השערת התאומים אומרת שיש אינסוף זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 (כמו למשל 3 ו-5 או 11 ו-13 ועוד רבים אחרים). יתרה מזו, בניסוחה המודרני ההשערה קובעת שהדבר נכון לא רק להפרש של 2. אלא שהדבר נכון גם למספר הזוגות של ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 4 (כמו 3 ו-7 או 19 ו-23) ולכל הפרש (זוגי) אחר. במדור החדשות המתמטיות של **[גיליון מס' 1](#)** שהתפרסם בשנת 2014 סיפרתי על פריצת הדרך שקרתה בשנת 2013 כאשר ייטאנג זאנג (Yitang Zhang, 1955-) הצליח להוכיח שיש אינסוף זוגות של ראשוניים שההפרש ביניהם לא עולה על... 70 מיליון. זמן קצר לאחר מכן הוכח שזה נכון אפילו לזוגות של ראשוניים שהפער ביניהם קטן יחסית ועומד על 246. אבל הוכחה להשערת התאומים עדיין אין. בקרב המתמטיקאים העוסקים בכך די ברור שנחוץ רעיון חדשני של ממש כדי להגיע להוכחה. במהלך חיפושים אחר רעיון כזה, פורסמה בספטמבר 2019 ברשת האינטרנט (https://arxiv.org/abs/1808.04001) הוכחה להשערת התאומים בשדות סופיים. זה הישג ניכר כי זה נותן תקווה כלשהי שיהיה אפשר אולי לאמץ חלק מהרעיונות גם לשדה האינסופי של המספרים הרציונליים.

מהו שדה סופי? איך מגדירים את פעולות החשבון בשדות סופיים? ומה המשמעות של ראשוניים בשדות סופיים?

[כאן](#) יש כתבה קלה לקריאה על כל אלה ועוד.

גלגוליה של בעיית ABC

עוד חדשה שכתבתי עליה בפרוטרוט **[בגיליון מס' 1](#)** קיבלה תפנית מעניינת. בשנת 2012 היה נראה שהשערת ABC באה על פתרונה החיובי והפכה למשפט, אבל מרגע שההוכחה פורסמה (ברשת) היא מעוררת ספקות לא רק בשל היקפה העולה על 500 עמודים ונשען על תוצאות קודמות רבות מאוד, אלא גם בשל סגנון הכתיבה הכבד והמעורפל האופייני להצגת הדברים ומונע הכרה בנכונותם. בשנת 2018 הספקות הביאו לידי כך שעדיין ההשערה נחשבת למשפט רק ביפן, מקום מגוריו ועבודתו של המתמטיקאי עתיר הנסיון הטוען להוכחתה, שינצ'י מוצ'יזוקי (Shinichi Mochizuki, 1969-), אבל במקומות אחרים בעולם היא חזרה להיחשב השערה פתוחה. סערה של ממש מתחוללת ברשתות החברתיות, בקרב טובי המוחות באירופה ובאמריקה המתמחים בתורת המספרים. מומלץ לקרוא [כאן](#) תיאור מרתק של הדרך שבה מתמטיקאים בני זמננו נזהרים בכבודו של עמיתם, אבל לא מוותרים על החתירה לקפדנות מתמטית מלאה תוך בירור כל פרט, ולא על הצגה בהירה, מלוטשת ועקבית של כל טיעון, גם אם המחבר הצליח לפרסם את גרסתו **השנויה במחלוקת**.

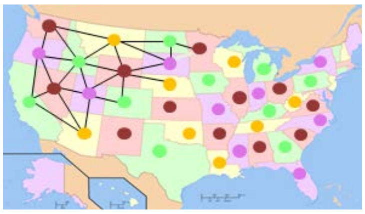
לפעמים השערה נשארת בלי הוכחה לאורך זמן רב לא מפני שהיא קשה להוכחה, אלא מפני ש...

בעיות צביעה של רשתות (נקודות וקווים המחברים אותן) מעסיקות את הקהילייה המתמטית כבר כמעט 200 שנה. המפורסמת שבהן היא בעיית הצביעה של מפות מדיניות כך שכל שתי מדינות בעלות קו גבול משותף תהיינה צבועות בשני צבעים שונים זה מזה. זאת האחרונה נפתרה בשנת 1976 באמצעות בדיקה ממוחשבת של כל הדרכים בזכות שני מתמטיקאים אמריקאים מאוניברסיטת אילינוי:

3. עוד על הפרסים הכספיים שארדש הציע לפתרון בעיות רבות שהעלה (Hartnett, 2017): https://www.quantamagazine.org/cash-for-math-the-erdos-prizes-live-on-20170605/

קֶנֶט אַפֶּל (Kenneth Appel, 1932-2013) וּוֹלְפְגַנְג הַאקֶן (Wolfgang Haken, 1928-). הם נשענו כמובן על רעיונות של קודמיהם, אך הצליחו להימנע מטעויות שעשו רבים במשך למעלה מ-100 שנים מאז שהועלתה הבעיה בשנת 1852.

בשנת 1880 פרסם המתמטיקאי הסקוטי פיטר טייט (Peter Tait, 1831-1901) הוכחה ששלושה צבעים אינם מספיקים לצביעת כל מפה כנדרש, אבל ארבעה כן מספיקים לכך. הוא סימן כל מדינה בקודקוד (נקודה) צבוע, וכדי לבטא את הכלל ששתי מדינות שכנות הן בעלות צבעים שונים זה מזה, קבע שאסור לחבר בקטע שני קודקודים בעלי אותו צבע. לרוע המזל ההוכחה של טייט, כמו אחרות שקדמו לה, התבררה שגויה, אבל השיטה שנקט שימשה השראה להמשך המאמצים והביאה להתפתחותו של תחום חדש במתמטיקה – תורת הגרפים (עוד על הבעיה המרתקת הזאת אפשר למצוא בבלוג המומלץ של גדי אלכסנדרוביץ' [2018א, 2018ב]).



לבעיות של צביעת גרפים, וכמוהן בעיות בתורת המספרים, יש נטייה להיות קלות להבנה ואולם קשות לפתרון. אחת מהן שנשארה בלי פתרון במשך חמישים שנה בערך, עוסקת בגרפים המתקבלים משני גרפים אחרים בדרך מסוימת הנקראת מכפלה טנזורית (בגרף G המתקבל כמכפלה טנזורית של שני גרפים G1 ו-G2 כל קודקוד מייצג זוג קודקודים – אחד מ-G1 ואחד מ-G2, ושני קודקודים ב-G מחוברים זה לזה אם שני הקודקודים התואמים שלהם ב-G1 מחוברים זה לזה וגם שני הקודקודים התואמים שלהם ב-G2 מחוברים זה לזה). בשביל מה זה טוב?

כאן במאמר מיוני 2019 יש שתי דוגמאות יפות לשימוש במכפלה טנזורית של שני גרפים לפתרון בעיות יומיומיות, כמו תכנון של הזמנת אורחים למסיבה כך שלא ייווצרו אי נעימויות וזיווג של נגנים לדואט.

בעבודת הדוקטור שלו בשנת 1966 העלה סטיפן הדטניימי (Stephen Hedetniemi, 1939-), פרופסור באוניברסיטת קלמסון בדרום קרוליינה, את ההשערה כי מספר הצבעים המינימלי הנדרש לצביעת מכפלה טנזורית G של שני גרפים נתונים, הוא מספר הצבעים הקטן מבין שני מספרי הצבעים הנדרשים לצביעת הגרפים המרכיבים אותה G1 ו-G2. הניסיונות להוכיח את ההשערה או להפריך אותה באמצעות דוגמה נגדית, העסיקו מאז את טובי המתמטיקאים העוסקים בתורת הגרפים. ככל שחלפו שנים ואיש לא מצא דוגמה נגדית, גברה הנטייה להאמין שההשערה נכונה ועם זה גברה התחושה שההוכחה מהווה אגוז קשה מאוד לפיצוח.

ואז במאמר קצר בן שלושה עמודים בלבד שפרסם באינטרנט בחודש יוני 2019, הציג המתמטיקאי הרוסי הצעיר, ירוסלב שיטוב (Yaroslav Shitov, 1989-), דוגמה נגדית של שני גרפים סופיים (ענקיים מבחינת מספר הקודקודים) שהמכפלה הטנזורית שלהם דורשת לצביעתה פחות ממספר הצבעים הדרושים לצביעת כל אחד ממרכיביה. (להסבר מפורט על הדוגמה הנגדית מומלץ לקרוא כאן את הכתבה של פרופ' גיל קלעי מהאוניברסיטה העברית).

פרופ' נוגה אלון (1956-) מאוניברסיטת תל-אביב מוסיף את הלקח: אם ההוכחה נראית קשה מאוד, יכול להיות שההשערה פשוט מוטעית... וכעת משנמצאה דוגמה נגדית אחת, המתמטיקאים המתעניינים בנושא פונים לעסוק בשאלה המתבקשת: האם יש דוגמאות נגדיות קטנות יותר? עוד על השערת הדטניימי אפשר למצוא בוויקיפדיה כאן. ראו גם סרטון יו-טיוב על הבעיה והדוגמה הנגדית כאן.

סיפור אמיתי המשקף את אופייה של המתמטיקה בת-זמננו

במאה העשרים היה מקובל להפריד בין מתמטיקה טהורה למתמטיקה שימושית. זוהי הפרדה מלאכותית ששורשיה עוד במאה התשע עשרה והיא איננה מקדמת ויש הטוענים שאפילו מהווה מכשול להתפתחות המתמטיקה הן בתאוריה והן בפרקטיקה.[4] בתחילת המאה העשרים ואחת ניכר שינוי בגישה. על פי מסמך חשוב משנת 2013 שדן בעתידה של המתמטיקה ומנמק את הדברים, גוברת כיום הנטייה לא להפריד בין מתמטיקה טהורה לשימושית. זאת משום שהולכים ורבים המקרים שבהם נמצא שימוש לתוצאות שנחשבו בעבר לשייכות למתמטיקה טהורה, כגון השימוש במספרים הראשוניים להצפנה, וגם להפך – יישומי המתמטיקה המשרתים את המדעים (ולא רק אותם), מציבים שאלות מתמטיות תאורטיות שפתרונן על פי המסורת שייך למתמטיקה טהורה (National Academies Press, 2013). שאלה מהסוג האחרון העלו לאחרונה שלושה פיזיקאים והיא משקפת (לטעמי) את טבעה התוסס והעשיר של המתמטיקה ואת הדרך שבה נוצרת המתמטיקה בת זמננו.

ובכן, מעשה שהיה כך:

המתמטיקאי האמריקאי יליד אוסטרליה, טרנס טאו (Terence Tao, 1975-), היה ילד פלא של שלהי המאה העשרים וגדל להיות אחד המתמטיקאים המבריקים של ראשית המאה העשרים ואחת. בבוקר אחד בחודש אוגוסט 2019, הוא פתח את הדואר האלקטרוני שלו וראה הודעה משלושה פיזיקאים שלא הכיר. בהודעתם הם התנצלו לפניו כי הוא ביקש בפירוש בבלוג שלו לא להטריד אותו שלא לצורך, והם הסבירו שהחליטו לפנות אליו כי קראו מאמר שלו שקשור לזהות מתמטית שהם "עלו עליה" די במקרה במהלך עבודתם ואינם בטוחים בנכונותה. באותו רגע חשב טאו לעצמו שהזהות לא יכולה להיות נכונה, כי היא כל כך פשוטה שאילו הייתה נכונה היא הייתה ידועה כבר מזמן. אבל שעתיים לאחר מכן הוא שלח לעמיתיו החדשים שלוש הוכחות שונות של הזהות שלא הכיר עד אותו יום. עשרה ימים לאחר מכן שלחו הארבעה מאמר לפרסום ובו הם עמדו על כך שהזהות, על אף פשטותה ואף שהתחום של אלגברה ליניארית שהיא שייכת אליו הוא תחום מבוסס למדי, לא זכתה להכרה עד לאחרונה אף שהוזכרה בדרך זאת או אחרת בפרסומים יותר מפעם אחת, והמוקדמת שבהן הייתה עוד בשנת 1934. בדצמבר 2019 הם עדכנו והרחיבו את המאמר שלהם למהדורה בת 26 עמודים, הכוללת 24 עקבות היסטוריים של אזכורי הזהות או צורות שונות שלה למטרות שונות, יחד עם שבע הוכחות שונות והכללות. באותו מאמר הם דנים גם בסיבות לכך שעד 2019 הזהות לא זכתה למעמד מוכר כמו אחרות באלגברה ליניארית (כגון חוק קרמר, נוסחת קושי). הבולטת שביניהן היא השימוש בנוסחה ככלי להשגת תוצאות

4. ראו למשל הרצאת המליאה של פרופ' זיגלר בכנס הבינלאומי ה-13 של ICME בהמבורג, יולי 2016 (Ziegler, 2016).

אחרות, תוך הזנחת חשיבותה כשהיא לעצמה. כמו כן הם עומדים על שימושיותה ובפרט על השימוש החדש שהתגלה בה בפיזיקה של חלקיק בשם ניוטרינו.[5] כדי להקל בעתיד על המחפשים אותה, הם גם נותנים לזהות שם "The eigenvector-eigenvalue identity" שנבחר מפאת התאמתו. הזהות קושרת בין וקטורים עצמיים של מטריצה (שהם קשים לחישוב) לערכים עצמיים של מטריצה (שהם קלים יחסית לחישוב) ומאפשרת לחשב את הווקטורים העצמיים מתוך הערכים העצמיים (ראו תרגיל פשוט במטריצות מסדר 3x3 כאן). משום כך הדעת נותנת שבעתיד יימצאו לה עוד הרבה מאוד שימושים, שכן תורת המטריצות היא עתירת יישומים במיוחד בתחום הטרנספורמציות של מתיחה, כיווץ, סיבוב, שיקוף ועוד אשר פועלות על עצמים בשלמותם. כדאי לקרוא עוד הרבה פרטים נוספים המלווים באיורים והסברים כאן או כאן.

השערת קולאץ (Collatz Conjecture)

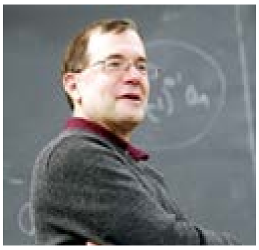
השערת קולאץ – אחת הבעיות הפתוחות המשקפות בדרך אלמנטרית את מהותה וטבעה של המתמטיקה, קיבלה "זריקת עידוד" מטרנס טאו, שהוזכר לעיל כאחד המתמטיקאים הפוריים ביותר של ימינו.

מה אומרת ההשערה? אם בוחרים במספר טבעי כלשהו, ונוהגים על פי הכלל הבא שוב ושוב, התהליך מגיע בהכרח ל-1 ונעצר שם. לא חשוב באיזה מספר מתחילים. הכלל הוא:
אם המספר זוגי – מחלקים אותו ב-2;
אם המספר אי-זוגי, כופלים ב-3 ומוסיפים 1 (ואז מתקבל מספר זוגי שמחלקים ב-2 וממשיכים הלאה על פי התוצאה). כך למשל: אם מתחילים ב-2 ברור שמגיעים בצעד הבא מייד ל-1 (לאמיתו של דבר ממשיכים הלאה לפי הכלל ל-4 ומשם ל-2 ושוב ל-1 וחוזר חלילה); אם מתחילים ב-3 עוברים במספרים 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. קל לראות מהסדרה האחרונה מה קורה אם מתחילים ב-4 או ב-5. אם מתחילים ב-6 מגיעים מייד ל-3 וחוזרים אל הדרך שלעיל המסתיימת ב-1, ואם מתחילים ב-7 מקבלים: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, ומכאן ל-1 כמו שראינו. זהו שעשוע די ממכר ומסקרן. האם גם מספר פתיחה גדול מאוד יביא בסופו של דבר ל-1? לגמרי לא ברור שההתנהגות של סדרת התוצאות איננה תלויה בגודלו של מספר הפתיחה. ההשערה היא כאמור שהתהליך מגיע בהכרח ל-1 ונעצר שם אבל אף על פי שכל מתכנת מתחיל יכול לכתוב תוכנית מחשב לבדיקת ההשערה, עדיין איש לא מצא הוכחה לכך שהתהליך לא רק שאינו מתבדר בחלק מהמקרים, אלא שהוא חייב תמיד להגיע ל-1 (ושם ייעצר).[6]

אפשר להסביר שהחוקיות הנתונה מחייבת שהסדרה לא תגדל, שכן כל מספר זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-1/2 וכל מספר אי-זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-3, מוסיפים 1 וגם כן מחלקים ב-2. במילים אחרות מספר אי-זוגי מוכפל בערך ב-3/2. אם מניחים שיש אותה הסתברות להגיע למספר זוגי או למספר אי-זוגי על פי הכלל הנזכר, אז אפשר לומר שבממוצע כופלים כל מספר בממוצע הגאומטרי[7] של 1/2 ו-3/2, היינו ב-$\sqrt{3}/2$. זהו מספר קטן מ-1 ולכן המספרים בסדרה הולכים וקטנים. אבל הנימוק הזה אין בו כדי להוכיח שסדרת מספרים הנוצרת על פי הכלל הנזכר, תמיד מגיעה ל-1, שלא לדבר על כך שההנחה של שוויון ההסתברויות איננה ברורה מאליה. עוד קושי הוא שמספר הצעדים בסדרה עד שמגיעים ל-1 משתנה במידה לא שיטתית בהתאם לנקודת ההתחלה וקשה עד מאוד לגלות איזה שהוא דפוס לכך. כך למשל דרושים 3 צעדים כדי להגיע ל-1 מ-8 אבל 19 צעדים כדי להגיע ל-1 מ-9. אם מתרחקים עד 871, דרושים 178 צעדים כדי להגיע ל-1, אבל הרבה פחות (כמה?) אם מתחילים מ-1024. (עוד פרטים מופיעים באנציקלופדיה של סדרות מספרים. כדאי גם לצפות בסרטון יוטיוב הממחיש את הדברים כאן).

אפשר להסביר שהחוקיות הנתונה מחייבת שהסדרה לא תגדל, שכן כל מספר זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-1/2 וכל מספר אי-זוגי שמגיעים אליו כופלים ב-3, מוסיפים 1 וגם כן מחלקים ב-2. במילים אחרות מספר אי-זוגי מוכפל בערך ב-3/2

המתמטיקאי ג'פרי לאגריאס (Jeffrey C. Lagarias, 1949-) ממדינת מישיגן ארה"ב, מעיד על עצמו במאמר משנת 1985 כי התוודע אל השערת קולאץ בשנת 1967 בהיותו תלמיד תיכון ומאז עבד עליה מדי פעם בפעם. מתוך סקרנות מצד אחד ותסכול מצד אחר הפך ל"היסטוריון" שלה. כך בשנת 2003, כשהוא כבר מתמטיקאי מוכר, הוא מפרסם ביבליוגרפיה



מוערת על חקירת הבעיה החל משנת 1963. מאז ועד שנת 2011 הופיעו 13 מהדורות מתעדכנות שלה.

את הבעיה העלה כנראה בשנות השלושים של המאה העשרים סטודנט גרמני באוניברסיטת המבורג, לותהר קולאץ (Lothar Collatz, 1910-1990), ועברה מפה לאוזן. במסעותיה היא גם זכתה לכינויים מגוונים מפי אנשים שעסקו בה. בשנות השבעים היא כבר הופיעה בספרים ובכתבי עת רבים. ההשערה נבדקה בטווח רחב מאוד של מספרים טבעיים (מעל 2^{60} ערכי התחלה שונים!) אבל הוכחה להשערה עדיין לא נראית לעין. המתמטיקאי הפורה של המאה העשרים, פול ארדש שהוזכר לעיל בקטע על בעיית הסוף הטוב, הציע למי שיוכיח את השערת קולאץ פרס בסך 500 דולר.

בשל טבעה האיטרטיבי (חזורי בעברית, מלשון חזרה על אותה פעולה), השערת קולאץ מעסיקה את קהיליית מדעי המחשב ומהווה אתגר שיש המשווים אותו לאתגר שהציב פרמה לפני המתמטיקאים עם "המשפט האחרון" שלו (ראו מדור החדשות בגיליון 4). רבים מנסים את כוחם בהוכחת ההשערה. חלקם חובבים, אחרים מקצועיים. בחלק ניכר מהמקרים נמצאות טעויות או מה שהמתמטיקאים קוראים לו "נפנופי ידיים", ואולם פה ושם יש כמובן גם התקדמות (להרחבה נוספת ראו בוויקיפדיה באנגלית). ב-10 בספטמבר 2019 פרסם טרנס טאו (שהוזכר כבר לעיל) מאמר בן 48 עמודים שכותרתו מכילה פעמיים את המילה "כמעט" (במשמעותה ההסתברותית):[8]

5. ניוטרינו הוא חלקיק מוזר מאוד בהתנהגותו – אין לו כמעט מסה ואין לו מטען חשמלי, הוא נע בכל תווך ומשנה את עצמו במהלך תנועה בין שלושה אבות-טיפוס שונים שלו, והפיזיקאים חוקרים אותו כי הוא עשוי להסביר את היווצרות היקום. ראו עוד כאן.
6. ראוי לשים לב שבשפת היום-יום מקובל לומר "תמיד" כאשר הכוונה היא ל"בכל מקרה". "תמיד" הוא תואר זמן, והכוונה כמובן איננה לכך שבכל עת זה יקרה. הכוונה היא שזה קורה לכל בחירה של מספר שמתחילים בו.
7. הממוצע הגאומטרי של שני מספרים הוא השורש הריבועי של מכפלתם (הממוצע החשבוני של שני מספרים הוא מחצית סכומם).
8. המילה "כמעט" במתמטיקה מופיעה בדרך כלל כסייג לטענות אוניברסליות

."Almost all Collatz orbits attain almost bounded values" כשמתמטיקאי בעל שיעור קומה כמו טאו מפרסם מאמר, ובפרט שהוא בעל כותרת מסוג זה, הקהילייה המתמטית נרגשת. טאו עצמו לא מתיימר לומר שהוא מוכיח את השערת קולאץ, אבל הוא מצביע על תוצאות חלקיות חדשות שטאו השיג בהשראת גישתו לפתרון בעיות בתחום התמחותו – משוואות דיפרנציאליות חלקיות (ראו פרשנות על הממצאים של טאו כאן).

פרסום מסוג זה מעורר כמובן בקרב עמיתיו המתמטיקאים הרהורי התפעלות ו... גם ערעורים. אולם זה טבעה של המתמטיקה. בעיות קשות לא נפתרות בן לילה, אלא בצעדים מדודים ושקולים, שכל אחד מהם בדרך כלל נבנה על קודמו. ההתמדה, התעוזה והבקרה הן מעמודי התווך של התחום התוסס ששמו מתמטיקה.

שמתקיימות כמעט לכל מקרה, כלומר להוציא אולי מספר סופי של מקרים. ההסבר להלן על המשמעות המדויקת של המילה "כמעט" על פי המאמר של טרנס טאו לקוח מתוך **https://www.quora.com/How-big-of-an-improvement-is-the-latest-paper-from-Terence-Tao-for-proving-the-Collatz-Conjecture**: “The term 'almost all' actually has an exact definition here, but for our purposes it’s sufficient to think of the concept as “If I pick some $n \in N$ at random (i.e. following some random distribution, a logarithmic one in our case), then our result will hold with probability 1".

רשימת מקורות

אלכסנדרוביץ, ג' (2018א, 10 בנובמבר). **משפט ארבעת הצבעים (חלק א')** [רשומה ביומן רשת]. אוחזר מתוך https://gadial.net/2018/11/10/four_color_theorem_intro/

אלכסנדרוביץ, ג' (2018ב, 4 בדצמבר). **משפט ארבעת הצבעים (חלק ב')** [רשומה ביומן רשת]. אוחזר מתוך https://gadial.net/2018/12/04/four_color_theorem_kempe_proof/

Erdős, P., & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica, 2*, 463-470. Retreived from http://www.numdam.org/article/CM_1935__2__463_0.pdf

Erdős, P., & Szekeres, G. (1960-1961). On some extremum problems in elementary geometry. *Annales Universitatis Scientarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica, 3-4*, 53-62. Retrieved from http://bsmath.hu/~p_erdos/1960-09.pdf

Hartnett, K. (2017, June 5). *Cash for math: The Erdős prizes live on. Quanta magazine*. Retrieved from https://www.quantamagazine.org/cash-for-math-the-erdos-prizes-live-on-20170605/

National Academies Press. (2013). *The mathematical sciences in 2025*. Washington, DC: Author.

Suk, A. (2017). On the Erd˝os-Szekeres convex polygon problem. *Journal of the American Mathematical Society, 30*, 1047-1053. doi:10.1090/jams/869

Ziegler, G. M., & Loos, A. (2017). “What is Mathematics?” and why we should ask, where one should experience and learn that, and how to teach it. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education: ICME-13 Monographs* (pp. 69-77). Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-62597-3_5