"כפל מקטין, אבל חילוק מקטין יותר..." - הבנות חלקיות ותפיסות שגויות של כפל וחילוק בשבר פשוט[1]

1. מאמר זה נכתב על רקע עבודת הדוקטור של פירחה חמו (2014) בהנחייתם של פרופ' מאיר בוזגלו וד"ר בת שבע אילני.

פירחה חמו
בת שבע אילני
מאיר בוזגלו

ד"ר פירחה חמו
ראש המסלול לגיל הרך ומרצה להוראת מתמטיקה במכללת אפרתה. עוסקת בחינוך מתמטי בגן, בבית-הספר היסודי ובחטיבת הביניים.

ד"ר בת שבע אילני
עוסקת בייעוץ מתמטי, פיתוח חומרי למידה ופרסום מאמרים וספרים בנושאים מתמטיים מגוונים. עובדת עם המכללה האקדמית חמדת הדרום והאוניברסיטה העברית בירושלים. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, ייעוץ ועריכה של חומרים וספרים המיועדים לגנים, לבתי ספר, להכשרת מורים למתמטיקה בנושאים מגוונים. בין הספרים: פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך - תיאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; שימור ושינוי - תובנות אלגבריות בעולם המספרים.

פרופ' מאיר בוזגלו
החוג לפילוסופיה באוניברסיטה העברית. עוסק בפילוסופיה של המתמטיקה ובחינוך מתמטי.

תקציר

מחקר זה מצטרף למחקרים שעסקו בקושי להרחיב את משמעות הפעולות כפל וחילוק ממספרים שלמים למספרים רציונליים, ומתמקד בביטויים שלו במספרים רציונליים המבוטאים כשבר פשוט. במאמר זה אנו מציגים השוואה בין פתרונות של אותו תלמיד, מכיתה ו' או ח', ב-4 זוגות של פריטים משאלון המחקר. בעזרת השוואה בין פריטי כפל עם כופל קטן מ-1, או בין פריטי חילוק עם מחלק קטן מ-1, זיהינו דרכים שבהן התלמידים מפרשים כפל וחילוק בשבר פשוט, והצבענו על רמות ביניים בהבנת כל פעולה. למשל מצאנו כי תלמיד עשוי להבין ש'כפל בשבר מקטין' ולא להבין שהוא עשוי לייצג סיטואציה של 'מציאת חלק מכמות'. שלא כמחקרים שדנו בתפיסות התלמידים בכפל בנפרד מחילוק, במחקר הנוכחי השווינו בין תשובות התלמידים למשימות כפל ובין תשובותיהם במשימות חילוק. מתוך השוואה זו מצאנו את התפיסה השגויה הזו: תלמידים קישרו את מודל "חלק מ-" של כפל ואת תכונת ההקטנה, הן לכפל בשבר (קישור נכון) והן לחילוק בשבר (קישור שגוי). תפיסה זו לא נמצאה במחקרים על מספרים עשרוניים, ונראה כי היא מושפעת מההקשר של מציאת חלק מכמות וממשמעות השבר הפשוט כאופרטור. הממצאים תורמים להבנת מרכיבי השינוי המושגי הנדרש במעבר ממספרים שלמים לשברים פשוטים. להימצאות אותן שגיאות הן בכיתה ו' והן בכיתה ח' יש השפעות על הכשרת מורים.

מילות מפתח: כפל וחילוק שברים פשוטים; גישת שינוי מושגי; רמות ביניים של הבנה.

פתח דבר

כאשר מיכאל מכיתה ו' כתב את הסימן ">" כדי להשלים את הביטוי המתמטי $72:\frac{3}{4}\ \square\ 72\times\frac{3}{4}$, נראה היה שהוא מחזיק בו בזמן בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין". השערה זו הופרכה על פי ההסבר שלו: "גם לתרגיל הכפל וגם לתרגיל החילוק תוצאה קטנה מ-72, אבל החילוק מקטין יותר...". על אף שהסבר זה, הנכון בחלקו, נראה כמשקף

תפיסות על סדר גודל, הטענה "החילוק מקטין יותר" מעוררת תהייה על המובן שבו הקטנה של חילוק נבדלת בעיניו מהקטנה של כפל.

הקטע על מיכאל ממחיש את המניע לחקור כיצד תלמידים מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים, ואת הצורך לשלב במחקר משימות בשתי פעולות החשבון האלה.

רקע תאורטי

ההרחבות של פעולות מתמטיות נידונו בספרות, הן בהיבט הסמנטי (Buzaglo, 2002) והן בהיבט הפסיכולוגי. מחקרים שעסקו בהרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים (אי-שליליים) למספרים רציונליים בחנו אותה בשני ממדים: אנכי ואופקי (Greer, 1994).

הממד האנכי כולל התקדמות לאורך מערכות מספרים. למשל, תרגיל כפל מתאים לבעיה מילולית עם כופל שהוא מספר שלם כמו לבעיה עם כופל שאיננו שלם. חוקרים מצאו כי בהינתן לתלמידים בעיה מילולית עם כופל קטן מ-1, בעיית חילוק עם מחלק קטן מ-1, או בעיית חילוק עם מחלק גדול מהמחולק – הם מתקשים לתת תרגיל המתאים להן (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Hardiman & Mestre, 1989; Prediger, 2008b).

הממד האופקי של ההרחבה כולל טווח רחב של סיטואציות שהפעולות הן מודל מתמטי שלהן. למשל, סיטואציית כפל בעלת מבנה של חיבור חוזר מתאימה לתרגיל כפל במספרים שלמים, אך לתרגיל כפל עם גורמים קטנים מ-1 נדרשת היכרות עם סוגים אחרים של סיטואציות בעיה – למשל שטח. במחקרים מגוונים נמצא כי תלמידים מתקשים לכתוב סיטואציות בעיה מתאימות לתרגילים נתונים של כפל או חילוק במספרים רציונליים (Barlow & Drake, 2008; De Corte & Verschaffel, 1996; Prediger, 2008a).

לצד מחקרים על שברים פשוטים נציג גם מחקרים על מספרים עשרוניים, הן משום שבמשך שנים רבות עסקו המחקרים בהרחבת משמעות כפל וחילוק למספרים רציונליים המבוטאים כמספר עשרוני, והן כדי להבליט היבטים העשויים להיות ייחודיים לשברים פשוטים.

גישת שינוי מושגי, ורמות ביניים של הבנה

לפי גישת שינוי מושגי (conceptual change approach), סתירות או חוסר התאמה בין המושגים המתמטיים שהתלמיד צריך לרכוש ובין תפיסות אינדיווידואליות הם שלבים טיפוסיים בתהליך של בניית ידע מחדש (Stafylidou & Vosniadou, 2004). לפי גישה זו, "כפל מגדיל" היא לא רק תפיסה שגויה ידועה אלא גם מכשול בלתי נמנע במעבר ממספרים טבעיים למספרים רציונליים (Prediger, 2008b).

סטפילידואו ווסניאדו (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ערכו רשימה של מושגים על מספרים טבעיים שצריכים להשתנות בנושא שברים פשוטים, בהם הייצוג הסימבולי, סידור, והתפיסות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין". פרדיגר (Prediger, 2008b) הוסיפה לרשימה זו את המודלים המנטליים של כפל – אלה שיש בהם רציפות ממספרים טבעיים לשברים פשוטים ואלה שלא. למשל, לבעיות acting-across quantity[2] ולבעיות שטח במספרים טבעיים יש בעיות מקבילות בשברים פשוטים. לעומת זאת, לבעיות part-of בשברים פשוטים אין מקבילה ישירה במספרים טבעיים.

2. גורם אחד בתרגיל הכפל המתאים לבעיות מסוג זה הוא קצב (rate), כמו בנוסחה "מהירות x זמן = דרך" או "מחיר ליחידה x כמות = מחיר כולל". ה-rate פועל על פני (acting-across) הכמות האחרת שבבעיה (Usiskin, 2008).

פרדיגר (Prediger, 2008b) בדקה את הבנת כפל שברים פשוטים בקרב תלמידים בכיתות ז' ו-ט' במגוון משימות המצריכות שינוי מושגי: בחירת תרגיל לבעיה מילולית נתונה, כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון והערכת סדר גודל של תוצאת תרגיל. היא בנתה מודל המאפשר לעמוד על המיקום של מכשולים אפיסטמולוגיים בתהליך השינוי המושגי ממספרים טבעיים לשברים פשוטים. המודל כולל רבדים שונים של הידע האינטואיטיבי שיש לתלמידים, ומפריד בין רובד הכללים האינטואיטיביים (כמו "כפל מגדיל") לרובד המשמעויות הכולל מודלים של הפעולות (למשל "כפל פירושו חיבור חוזר") ומודלים של שברים (למשל "$\frac{3}{4}$ הוא תמיד 3 מתוך שלם המחולק ל-4").

לפי הגישה המחקרית של שינוי מושגי, הבנה של רעיונות מדעיים או מתמטיים שמתנגשים עם רעיונות קודמים איננה בבחינת "הכול או לא כלום". אדרבה, יש לצפות למצוא רמות ביניים של הבנה, שבהן התלמידים משלבים מרכיבים של הידע הקודם במרכיבים של הידע החדש (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013). נציג להלן מחקרים שחשפו הבנות חלקיות של תלמידים, שבאו לידי ביטוי ב"חוסר שימור של פעולות", כלומר בבחירה של פעולות חשבון שונות לבעיות מילוליות בעלות אותו מבנה מתמטי. לאחר מכן נעסוק בקשיים בכיוון הפוך – בכתיבה של בעיה מילולית לתרגיל נתון.

חוסר שימור של פעולות בבעיות מילוליות עם מאפיינים מספריים שונים זה מזה

במשימות של בחירת פעולה לבעיה מילולית נמצא הבדל באחוזי ההצלחה בין בעיות כפל עם כופל גדול מ-1 (ובפרט שלם) ובין בעיות עם כופל קטן מ-1. לדוגמה, רק 29% מהנבדקים, בני 12-13, במחקר של אקנסטם וגרגר (Ekenstam & Greger 1983,) בחרו את תרגיל הכפל במשימה הזו:

משקל חתיכת גבינה 0.923 ק"ג. מחיר 1 ק"ג הוא 27.50kr. מצא את מחיר הגבינה. באיזו פעולה תשתמש?

27.50×0.923	$\frac{27.50}{0.923}$
$27.50 - 0.923$	$27.50 + 0.923$

רוב השוגים בחרו את תרגיל החילוק, $\frac{27.50}{0.923}$, כשההסבר הנפוץ הוא:

חתיכת הגבינה חייבת לעלות פחות מ-27.50, אז אנחנו חייבים לחלק כדי לקבל מספר קטן יותר.

שמונים ושלושה אחוזים מתלמידים אלה ענו נכון על בעיה מילולית דומה עם כופל שהוא מספר שלם. בראיונות הם לא מצאו דמיון בין שתי הבעיות, גם כאשר המראיין ניסה להסב את תשומת ליבם לכך.

במחקר של תירוש וגרבר (Tirosh & Graeber, 1989) על פרחי הוראה נמצאה השפעה של גודל המחלק בבעיות חילוק להכלה על בחירת הפעולה. הנבדקים שלהן קיבלו את הבעיה המילולית הזו, בעלת מחלק עשרוני קטן מ-1:

אורזים 0.65 פאונד עוגיות בקופסה. כמה קופסאות אפשר למלא ב-5 פאונד של עוגיות?

כמה מהנבדקים הסבירו בראיונות כי הם בחרו בתרגיל הכפל 5×0.65 (או 0.65×5) משום שהתשובה לבעיה צריכה להיות גדולה מ-5. הם דחו את ההנחה שחילוק מתאים, משום שלדעתם חילוק מקטין.

אם כן, יחסי הסדר בין הכמויות הנתונות בבעיה מילולית ובין התוצאה הצפויה, יחד עם התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין", עלולים לגרום לבחירת פעולה חשבונית שגויה. המודלים האינטואיטיביים של הפעולות במספרים שלמים (בכפל – מודל החיבור החוזר, ובחילוק – מודל החילוק לחלקים ומודל החילוק להכלה) ממשיכים להשפיע על התלמידים גם אחרי שהם נחשפים לפן הפורמלי שלהן במספרים רציונליים (Fischbein et al., 1985).

את הבחירה בפעולות שונות במחקרים האלה – פעולה נכונה במספרים שלמים ושגויה במספרים רציונליים – כינה גריר (Greer, 1987) "חוסר שימור של פעולות" (nonconservation of operations).

חוסר שימור של פעולות בבעיות מילוליות עם מאפיינים מספריים דומים

חוסר שימור של הפעולות נמצא גם בקרב בעיות מילוליות בעלות מאפיינים מספריים דומים. ממצא זה עודד את החוקרים לעסוק לא רק בהשפעת המספר על בחירת הפעולה, אלא גם בהשפעה של המבנה הסמנטי והקשר הבעיה. לדוגמה, בשתי בעיות החילוק המופיעות במחקר של בל, פישביין וגריר (Bell, Fischbein, & Greer, 1984) המחלק קטן מ-1, ובכל זאת נמצא הבדל באחוזי ההצלחה של התלמידים:

1. אני מכין כיסויי כרית. בכל כיסוי משתמשים ב-0.48 מטר בד. יש לי 2.4 מטר בד. כמה כיסויי כרית אני יכול להכין?
2. מְכל של טנק מכיל 5.5 גלון. כמה זה בליטרים? (ליטר אחד הוא 0.22 גלון)

לבעיה 2 נמצאו במחקר 12 שגיאות של תרגיל כפל, לעומת אחת בבעיה 1. החוקרים הסבירו שבעיה 1 היא בעיית חילוק להכלה קלסית, ואילו 2 היא בעיית המרת מידות. אומנם גם עליה אפשר לשאול "כמה חלקים של 0.22 גלון יש ב-5.5 גלון?", אך לדברי החוקרים המספר 5.5 והפתרון הם גדלים של המְכל במידות שונות – ולכן המידע שהפתרון גדול מ-5.5 הוא בולט. בשל כך התלמידים עלולים לבחור כפל כדי להגדיל.

בדומה, פרדיגר (Prediger, 2011) מצאה שלא כל בעיות הכפל עם כופל שבר קטן מ-1 קשות באותה מידה. במחקר שלה על תלמידים בכיתות ז' ו-ט', יותר תלמידים בחרו תרגיל כפל נכון לבעיית acting-across quantity שיש לה מקבילה במספרים טבעיים, מאשר לשאלת part-of:

1. בעיית acting-across quantity (35% הצלחה בבחירת הפעולה):
   א. קילוגרם אחד של מנדרינה עולה €1.50. קייט רוצה לקנות $\frac{3}{4}$ ק"ג. איך היא יכולה לחשב את המחיר שעליה לשלם? (סמן תשובה אחת או יותר)

$\frac{3}{4}\cdot 1.5$	$1.5:\frac{3}{4}$	$1.5-\frac{3}{4}$	אף אחד מאלה, אלא זה _____

   ב. הצדק את תשובתך בסעיף א.

2. משימת part-of (14% הצלחה בבחירת הפעולה):
   א. איך אפשר לחשב $\frac{2}{3}$ של 36? (סמן תשובה אחת או יותר)

$\frac{2}{3}\cdot 36$	$36-\frac{2}{3}$	$36:\frac{2}{3}$	אף אחד מאלה, אלא זה _______

   ב. הצדק את תשובתך בסעיף א.

פרדיגר (Prediger, 2011) מצאה הבדלים גם בין סוגי הנימוקים שהתלמידים כתבו בסעיף ב' של כל משימה. למשל, 43% מהנימוקים לתרגיל החילוק השגוי שנבחר לבעיה 1 עסקו ביחסי סדר ("כי חילוק מקטין"), לעומת 6% במשימה 2.

אף על פי שאפשר לראות בשתי הבעיות האלה שמופיעות במחקר של הרדימן ומסטר (Hardiman & Mestre, 1989) בעיות part-of, החוקרות מצאו הבדלים בין הפעולות השגויות שבחרו סטודנטים באוניברסיטה:

1. ישנם 36 סוגים של דייסה במדף בחנות המכולת. $\frac{2}{3}$ מהם מכילים סוכר. כמה סוגים של דייסה מכילים סוכר? (התרגיל השגוי הנפוץ שהם כתבו היה תרגיל החילוק $36:\frac{2}{3}$, ב-21 מתוך 27 השגיאות)
2. $\frac{7}{8}$ מהצנצנת מלאים במיונז. אנשי הפיקניק השתמשו ב-$\frac{1}{4}$ מהמיונז לסנדוויצ'ים שלהם. כמה מיונז הם אכלו? (התרגיל השגוי הנפוץ שהם כתבו היה תרגיל החיסור $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$, ב-31 מתוך 39 השגיאות).

לא הוצע במחקרן הסבר להבדל זה, מלבד תיאור המספרים שבבעיה 2 כקרובים זה לזה, כלשונן, לעומת המספרים שבבעיה 1.

קשיים בכתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון

לתלמידים בגילים למיניהם, ואף לפרחי הוראה, יש קשיים בכתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון של כפל או חילוק מספרים רציונליים (Barlow & Drake, 2008; De Corte & Verschaffel, 1996; Koichu, Harel, & Manaster, 2013;Prediger, 2008a). דה-קורט וורצ'פל (De Corte & Verschaffel, 1996) מצאו כי בבעיות המילוליות שהתלמידים כתבו לתרגיל כפל של מספר שלם במספר עשרוני (למשל 0.9×8) הם נמנעו מלהשתמש במספר העשרוני ככופל. לתרגיל חילוק עם מחלק שאינו שלם (למשל $6:4.8$) תלמידים שגו וכתבו בעיה מילולית עם היפוך המחלק והמחולק. שני-שלישים מהבעיות המילוליות הנכונות שהתלמידים כתבו היו מסוג "קבוצות שוות" ו"מידות שוות", שלא משקפות את ההרחבה של משמעות כפל וחילוק לטווח רחב יותר של סיטואציות בעיה.

במחקר של ברלו ודרייק (Barlow & Drake, 2008), על שברים פשוטים, נמצאו שגיאות למיניהן. למשל, לתרגיל $6:\frac{1}{2}$ תלמידים בכיתה ו' כתבו בעיות מילוליות המייצגות את $6:2$, ובעיות המייצגות את $6\times\frac{1}{2}$ – שמוצאים בהן $\frac{1}{2}$ של 6. לדברי החוקרות, השוגים בשגיאה הראשונה מבלבלים "מחולק ל-$\frac{1}{2}$" (divided by one-half) עם "לחצות" (divide in half) – שמשמעו לחלק ל-2 קבוצות שוות. השוגים בשגיאה השנייה מבלבלים "מחולק ל-$\frac{1}{2}$" (divided by one-half) עם "חצי של המספר" (half of a number). גרבר וטננהאוס (Graeber & Tanenhaus, 1993) עמדו על בלבול הנגרם בגלל השפה הטבעית (באנגלית), למשל בבעיה הזו: "סו ואני חילקנו את שלוש העוגיות הגדולות 'in half'. כמה (עוגיות) כל אחת מאתנו קיבלה?". גם בעברית אפשר למצוא אנשים שאומרים "אני מחלק את החבל ל-$\frac{1}{2}$", כשהם מתכוונים לחצייה שלו, לחלוקה לשניים.

נוסף על כך, ניתוח בעיות מילוליות שהנבדקים כתבו לתרגיל נתון נעשה במחקרים בדרכים למיניהן (De Corte & Verschaffel, 1996; Koichu, Harel, & Manaster, 2013; Luo, 2009; Ma, 1999; Osana & Royea, 2011; Prediger, 2008b). למשל, חוקרים בדקו האם קיים בבעיה משפט שאלה, והאם מופיע המידע הנחוץ כדי לענות עליה? האם הבעיה תיפתר באמצעות התרגיל הנתון, או בעזרת תרגיל אחר – ומהו? האם לצורך הפתרון ייעשה שימוש מיידי בתרגיל הנתון, או צריך תרגיל נוסף? נעשה גם מיון של הבעיות שנכתבו לפי מודלים שונים של הפעולה. למשל, בכפל נעשתה הבחנה בין בעיות סימטריות (שבהן לשני הגורמים תפקיד זהה, כמו בבעיות שטח) ובין בעיות א-סימטריות, ובחילוק –

בין בעיות חילוק לחלקים וחילוק להכלה.

מטרת המחקר הנוכחי על פי הרקע התאורטי

מטרת המחקר הנוכחי היא לברר כיצד תלמידים בכיתה ו' מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים. לעומת מחקרים על מספרים עשרוניים, ביקשנו לבחון האם וכיצד השבר הפשוט משפיע על אי ההבנה של כפל וחילוק, ולפתח פדגוגיה להוראת כפל וחילוק של שברים פשוטים לתלמידים בכיתה ו'. במאמר זה נעסוק באבחון ולא בפיתוח הפדגוגי.

על פי הגישה המחקרית של שינוי מושגי הגורסת כי יש לצפות למצוא רמות ביניים של הבנה במקרה של התנגשות רעיונות מתמטיים או מדעיים עם רעיונות קודמים (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013), אנו מבקשים במאמר זה לעמוד על רמות ביניים בהבנת כפל או חילוק בשבר, ועל מרכיבים מהידע הקודם שהתלמידים משלבים במרכיבים של הידע החדש.

הקושי לקבוע תרגיל לבעיה מילולית של כפל או חילוק בשברים פשוטים לעומת אלו עם מספרים שלמים הוא ידוע ממחקרים קודמים. לפיכך לא נשווה למשל בין היכולת לכתוב תרגיל לבעיית כפל עם כופל שלם לעומת בעיה עם כופל קטן מ-1. כל הבעיות המילוליות בשאלון המחקר כללו שבר בתרגיל המתאים לבעיה, או בתוצאה שלו. כדי להדגיש מאפיינים הייחודיים לתחום השבר הפשוט, נדון בהבדלים בביצועי התלמידים בין בעיות כפל עם כופל קטן מ-1 או בין בעיות חילוק עם מחלק קטן מ-1. השוואה בין ביצועי התלמיד בשתי משימות מהשאלון – בפרט כאשר הוא עונה נכון רק על אחת מהן – עשויה לסייע לזיהוי רמות ביניים של הבנה ולייצר מדרג קושי של בעיות בשברים פשוטים. חקירת ההסברים שהנבדקים נותנים לביצועים הנכונים, ולא רק לשגיאות כפי שנפוץ במחקרים, עשויה לסייע לאפיון הרמות השונות של הבנה ואף להבנה טובה יותר של השגיאות.

בדומה לפרדיגר (Prediger, 2008a, 2008b, 2011), גם בשאלון המחקר שלנו שולבו משימות למיניהן, אך הוא כולל גם משימות על חילוק שברים, ולא רק כפל. במחקר חלוץ זיהינו קשר בין התפיסות של שתי הפעולות, וביקשנו לבדוק את ממדי התופעה.

באוכלוסיית המחקר נמצאים תלמידים בכיתה ו' – הכיתה שבה על פי תוכנית הלימודים לומדים כפל וחילוק שברים פשוטים, ותלמידים בכיתה ח' – שנתיים לאחר שלמדו נושאים אלה בכיתה ו'. אף על פי שמצופה מתלמידים בחטיבת הביניים להבין כפל וחילוק מספרים רציונליים אי-שליליים, שיערנו שהתלמידים בכיתה ח' לא יציגו ביצועים טובים מאלה של כיתה ו'. זאת משום שבכיתה ח' חסרות הזדמנויות לחזק את ההבנות הראשוניות שנלמדו בכיתה ו'. מטרת ההשוואה היא להסיק מסקנות על היכולת של תלמידים לעשות את השינוי המושגי הנדרש בטווח הזמן הזה, ולהציע הצעות לקידום ההוראה של נושאים אלה.

השיטה

הממצאים המוצגים במאמר זה הם חלק מממצאי מחקר גדול יותר, שכלל את המרכיבים האלה: העברת שאלון מחקר, ביצוע ראיונות, סקירת ספרי לימוד על סמך הממצאים, עיצוב דינמי של יחידות לימוד לכפל וחילוק שברים בכיתה ו' ובחינת התרומה של יחידות הלימוד בניסוי הוראה בכיתות ו'. במחקר חלוץ, שהתקיים במשך שנתיים ב-5 כיתות ו', פותחו שאלון המחקר ויחידות הלימוד בו בזמן – כשממצאי השימוש בפריטי ההערכה ובפריטי ההוראה מזינים זה את זה שוב ושוב. שאלון המחקר בעיצוב הסופי הועבר ברמה ארצית בכיתות ו' ו-ח', ובהמשך גם בכיתות הניסוי והביקורת לאחר ניסוי ההוראה בכיתות ו'. המתודולוגיה המוצגת להלן רלוונטית להעברת השאלון בכיתות ו' ו-ח' ברמה הארצית, בסיוע ראיונות עומק שהתקיימו עם תלמידים בכיתה ו' על רקע הכניסה שלנו לבתי ספר במחקר החלוץ ובניסוי ההוראה.

אוכלוסיית המחקר והמדגם

אוכלוסיית המחקר שבה הועבר השאלון ברמה הארצית כוללת תלמידים בכיתות ו' ו-ח' בישראל, כשתלמידי כיתה ו' למדו כבר כפל וחילוק שברים פשוטים. המדגם כלל 5 בתי ספר יסודיים ו-5 חטיבות ביניים מחמישה יישובים מגוונים – קיבוץ מבוסס אחד, עיירת פיתוח אחת, ו-3 ערים ברמות סוציואקונומיות מגוונות. כל אחד מבתי הספר היסודיים האלה נמנה על בתי הספר המזינים את אחת מחטיבות הביניים האלה. מכאן שאוכלוסיית תלמידי כיתות ו' ואוכלוסיית תלמידי כיתות ח' שבמדגם הן בנות השוואה, אף שהנבדקים מכיתה ח' הם תלמידים אחרים. בסך הכול השתתפו 20 כיתות אם, עם תלמידים מכל הרמות במתמטיקה, 10 כיתות ו' ו-10 כיתות ח' – ובסך הכול 213 תלמידים בכיתה ו' ו-267 תלמידים בכיתה ח'.

כלי המחקר

שאלון המחקר

השאלון המלא כלל 31 פריטים הבודקים הבנה מושגית של כפל וחילוק שברים פשוטים, העשויים לחשוף תפיסות הקשורות לממד האינטואיטיבי של הידע. נוסף על משימות של התאמת תרגיל לבעיה מילולית (מבעיה לתרגיל ומתרגיל לבעיה) ניתנו משימות של הערכת סדר גודל של תוצאת תרגיל ומשימות השוואה בין תרגילים. הבעיות המילוליות שהופיעו בשאלון דומות לאלה שהתלמידים פוגשים בכיתה ו' בשלבים הראשונים של הרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים.

תיקוף תוכן השאלון נעשה בשלוש דרכים:

1. תהליך עיצוב: כאמור, עיצוב פריטי ההוראה ועיצוב פריטי ההערכה הושפעו זה מזה במהלך מחקר החלוץ. פריטי הערכה שלא אבחנו את תפיסות התלמידים במחקר החלוץ לא נכללו בשאלון המחקר.
2. פיתוח השאלון: נבנה אוסף מייצג של משימות בטווח רחב של מיומנויות. ניסוח המשימות וההוראות לתלמיד הושפע מההתנסויות במחקר החלוץ.
3. שיפוט חיצוני: שלושה מומחים בחינוך מתמטי העריכו את שאלון המחקר בגרסה הסופית. הם התבקשו לקבוע האם המשימות מתאימות לבדיקת הבנה של כפל וחילוק בשברים, והאם הן מתאימות לתלמידים בכיתה ו' על פי תוכנית הלימודים של כיתה ו'. הם מצאו את השאלון מתאים משתי הבחינות.

עורכת המחקר העבירה את השאלון, ובכיתה נכחה גם המחנכת. התלמידים לא התכוננו מראש, ולא הורשו להשתמש במחשבון. משך הזמן שהוקדש לפתרון השאלון היה שני שיעורים רצופים.

במאמר זה נתמקד ב-8 מתוך 31 הפריטים, ונסדר אותם לצורך הניתוח ב-4 זוגות. כאמור, בניתוח נעסוק בעיקר בתלמידים שענו נכון על אחד משני הפריטים בכל זוג, כדי להבחין ברמות ביניים של הבנה ובמאפייני הקושי. בכל אחד מ-8 הפריטים משתתפים מספר שלם ושבר פשוט קטן מ-1.

פריטים 2-1:
כתיבת תרגיל לבעיה מילולית של כפל (הכופל קטן מ-1)

כתבו תרגיל המתאים לפתרון השאלה.
בתרגיל שתכתבו צריכים להשתתף המספרים המופיעים בשאלה.
אם לדעתכם אי אפשר לכתוב תרגיל מתאים עם המספרים שבשאלה,
כתבו "אי אפשר" ונמקו!
(1) המחיר של מטר בד אחד הוא 30 שקלים. מה המחיר של $\frac{3}{5}$ מטר בד?
(2) לרינה יש 30 שקלים. היא קנתה קלמר ב-$\frac{3}{5}$ מהכסף שיש לה.
כמה עלה הקלמר?

בעיה 1 היא בעיית acting-across quantity, ואילו בעיה 2 היא בעיית part-of. בשתי בעיות הכפל האלה משתתפים אותם מספרים, שלא כפרדיגר (Prediger, 2011) שהשוותה בין תשובות התלמידים בבעיות עם מספרים שונים זה מזה. התלמידים התבקשו לכתוב תרגיל מתאים עם המספרים שבשאלה: 30 ו-$\frac{3}{5}$. למעשה מצופה מהם לכתוב בין המספרים האלה את אחת מארבע פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל או חילוק. משימה זו עשויה להיות שקולה לבחירת תרגיל מבין תרגילים נתונים (פורמט נפוץ במחקרים קודמים), אך היא נוסחה כך כדי לבחון את המחשבה הראשונה שעולה בראש הילד. הצענו לתלמיד את היכולת לטעון כי לדעתו "אי אפשר לכתוב תרגיל עם המספרים שבבעיה" – תשובה שהתקבלה מתלמידים שידעו לכתוב תרגיל עם המונה והמכנה של השבר (30:5x3) אך לא עם השבר כולו. בהעדר אופציה כזו לתשובה, התלמידים עלולים לבחור בפעולה חשבונית שגויה כברירת מחדל של הפעולות האחרות, ולא משום שלדעתם היא מתאימה.

נדגיש כי המטרה אינה לבדוק אם התלמידים יודעים לענות על הבעיות המילוליות, אלא אם הם מבינים שתרגיל כפל בשבר הוא ייצוג מתמטי שלהן. לפיכך כאמור, ייתכן שתלמיד ידע לענות על השאלה בעזרת החישוב 30:5x3, אך לא בהכרח ידע שמתאים לה תרגיל כפל של המספרים 30 ו-$\frac{3}{5}$.

פריטים 4-3: כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון

(3) כתבו שאלה מילולית שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $40:\frac{2}{5}$
(4) לפניכם התחלה של שאלה מילולית.
השלימו את השאלה כרצונכם כך שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $\frac{2}{3}\times 60$
השאלה: לרונן 60 שקלים ________________

במשימה הראשונה התבקשו התלמידים לכתוב בעיה מילולית לתרגיל חילוק, ובשנייה לכפל. במתן התחלה של בעיה לתרגיל הכפל ביקשנו לבדוק אם הם מצליחים להמשיך אותה באופן שלא תהיה מסוג חיבור חוזר. מכיוון שהמשימות מנוסחות אחרת, היכולת להשוות בין הביצועים בשני הפריטים היא מוגבלת.

נציין כי מבין ארבעת זוגות הפריטים, פריטים 3 ו-4 הופיעו בזה אחר זה גם בשאלון המחקר.

פריטים 6-5: הערכת תוצאת תרגיל

(5) הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $63:\frac{3}{7}$
א. גדולה מ-63 ב. קטנה מ-63 ג. שווה ל-63
(6) הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $96\text{x}\frac{5}{8}$
א. גדולה מ-96 ב. קטנה מ-96 ג. שווה ל-96

פריטים 8-7:
כתיבת תרגיל לבעיה מילולית של חילוק (המחלק קטן מ-1)

כתבו תרגיל המתאים לפתרון השאלה.
בתרגיל שתכתבו צריכים להשתתף המספרים המופיעים בשאלה.
אם לדעתכם אי אפשר לכתוב תרגיל מתאים עם המספרים שבשאלה,
כתבו "אי אפשר" ונמקו!
(7) משך האפייה של עוגה אחת הוא $\frac{3}{4}$ שעה.
כמה עוגות ניתן לאפות במשך 24 שעות, אם אופים אותן בזו אחר זו?
(8) למסיבה הביאו 24 פיצות שלמות. כל ילד אכל $\frac{3}{4}$ פיצה.
לכמה ילדים הספיקו הפיצות, אם כל הפיצות נגמרו?

בשתי בעיות החילוק האלה משתתפים אותם מספרים. גם כאן המטרה אינה לבדוק אם התלמידים יודעים לענות עליהן, אלא אם הם מבינים שתרגיל חילוק בשבר הוא ייצוג מתמטי שלהן.

ראיונות

מטרת הראיונות הייתה להציג הסברים לביצועי התלמידים בשאלון מנקודת המבט שלהם. בחרנו בראיונות ולא בכתיבה של נימוקים כדי לא להאריך את שאלון המחקר וכדי להשיג גישה ישירה לחשיבת התלמידים.

התקיימו ראיונות, הן עם תלמידים בכיתה ו' והן עם תלמידים בכיתה ח', מייד אחרי העברת השאלון. ראיונות אלה היו קצרים, ובמהלכם קיבלנו הסברים נקודתיים על התשובות שלהם לשניים עד ארבעה פריטים. לעומת זאת, בשהות הארוכה שלנו בבתי הספר היסודיים בעת מחקר החלוץ ובעת ניסוי ההוראה בכיתות ו', קיימנו ראיונות עומק עם 46 תלמידים שענו על השאלון.

רוב ראיונות העומק התקיימו לאחר שבוע בערך ממילוי השאלון, במשך 45-30 דקות כל אחד. המרואיינים, בטווח רחב של יכולות (על פי עדות מורותיהם), נבחרו על סמך ביצועים מסוימים שלהם בשאלון – נכונים או שגויים. דוגמאות למטלות ריאיון נפוצות: הצדקת הבחירה בתרגיל מסוים לבעיה מילולית נתונה ונימוק לאי הבחירה בתרגילים אחרים; השוואה בין ביצועים במשימות שונות בשאלון; ובחינה של תשובה אחרת שהמראיינת הציעה – למשל כזו שנצפתה אצל תלמיד אחר.

לפי אסיאלה ועמיתיו (Asiala et al., 1996), ראיונות מסייעים להתמקד בספקטרום של מבנים מנטליים אצל כלל התלמידים – החל בתלמידים שבנו מעט מהמושג הנחקר, עבור אלה שבנו חלקים ממנו וכלה באלה שבנו את כל המבנים הנדרשים. לפיכך ב-4 זוגות הפריטים לעיל, ראיינו תלמידים שענו נכון על שני הפריטים בכל זוג, תלמידים שענו על שניהם תשובה שגויה ותלמידים שענו נכון רק על אחד מהם.

שיטת ניתוח הנתונים

תשובות התלמידים לכל אחד מפריטי השאלון נותחו בנפרד. לכל תלמיד ניתן ציון על כל פריט וציון על השאלון כולו. חושב ממוצע הציונים של כלל תלמידי כיתות ו' והוא הושווה סטטיסטית לממוצע הציונים של כלל תלמידי כיתות ח'.

במאמר זה נתמקד בשיטת הניתוח העיקרית הרלוונטית ל-8 הפריטים: השוואה בין הביצועים של אותו תלמיד בכל שני פריטים מזווגים. בזוגות הפריטים 2-1 ו-7-8 נשווה בין הפעולות החשבוניות שהתלמידים בחרו לבעיות המילוליות הנתונות בכל זוג. יעניינו אותנו במיוחד התלמידים שלא בחרו את אותה פעולה לשתי הבעיות המילוליות, וניעזר בראיונות עם תלמידים שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בעזרת השוואה בין ביצועי התלמידים לשני הפריטים בכל זוג מהזוגות 4-3 ו-6-5 נברר האם התלמידים מבחינים בין פעולת הכפל לפעולת החילוק בשבר.

בזוג הפריטים 4-3 התבקשו התלמידים לכתוב בעיות מילוליות לתרגילים הנתונים. סיווגנו את הבעיות האלה בהליך שנועד לאפיין את סוג/מודל הבעיה ולקבוע אם היא מייצגת את התרגיל הנתון. נעזרנו בשש מדריכות למתמטיקה המלמדות בכיתה ו' – שלוש מדריכות לכל פריט. הצגנו לפני כל אחת מהן 20 בעיות מילוליות המייצגות טווח רחב של בעיות שהתלמידים כתבו. בשלב הראשון לא סיפרנו להן שהבעיות האלה נכתבו לתרגיל מסוים אלא רק שתלמידים כתבו אותן, וביקשנו מהן לכתוב את התרגיל המתאים לכל בעיה. פעלנו כך ולא הפוך כדי שסיווג הבעיה יהיה אובייקטיבי ככל האפשר. במקרה של ספק, למשל בגלל חוסר דיוק בניסוח הבעיה, הן התבקשו להציע תרגילים מתאימים. בשלב השני סיפרנו כי את הבעיות המילוליות שהן קיבלו, כתבו תלמידים לתרגיל מסוים, והצגנו אותו. ביקשנו מהן לקרוא שוב את הבעיות ולתת לכל אחת מהן ציון בין 0 ל-100, על פי הרמה המתאימה לדעתן לתרגיל הנתון. בשלב השלישי קיימנו ריאיון עם כל מדריכה, שבו היא הסבירה את השיקולים למתן הציונים, ונידונו מקרי הספק. כל קטגוריה של בעיות מילוליות נקבעה לפי התרגיל המתאים להן (בין שהוא התרגיל הנתון ובין לאו), לאחר הסכמה של לפחות שתי מדריכות מתוך השלוש. לדוגמה: אם לפריט 3 (תרגיל החילוק $40:\frac{2}{5}$) התלמיד כתב את הבעיה "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?", הבעיה נכנסה לקטגוריית "בעיות מציאת ערך החלק המשלים". מתאים לה התרגיל $40-\frac{2}{5}\times40$, שאינו התרגיל הנתון במשימה. תהליך שיפוט זה היה נחוץ בעיקר לבעיות המילוליות שלא היה ברור חד-משמעית לאיזו קטגוריה הן שייכות.

ממצאים

נדון תחילה בתוצאות ההשוואה הסטטיסטית בין הציון שניתן על השאלון כולו (31 הפריטים) לכלל תלמידי כיתות ו' ובין הציון של תלמידי כיתות ח'. כפי ששיערנו, תלמידי כיתות ח' לא השיגו ציונים גבוהים יותר משל תלמידי כיתות ו'. יתרה מכך, הציון הממוצע של כלל תלמידי כיתות ו' היה גבוה במובהק מהציון הממוצע של כלל תלמידי כיתות ח' (48.70, ס"ת 20.32 לעומת 39.42, ס"ת 20.42). אותן שגיאות שנמצאו בכיתות ו' הופיעו במינון זה או אחר גם בכיתות ח'. אף על פי שהציון של כיתה ו' גבוה משל כיתה ח', בכל זאת הוא נמוך – מה שמעיד על הקושי בהבנת כפל וחילוק שברים פשוטים בשתי שכבות הגיל.

כעת נציג את הממצאים של שמונת הפריטים שאנו דנים בהם במאמר זה:

פריטים 2-1: כתיבת תרגיל לבעיה מילולית של כפל (הכופל קטן מ-1)

1. המחיר של מטר בד אחד הוא 30 שקלים. מה המחיר של $\frac{3}{5}$ מטר בד?
2. לרינה יש 30 שקלים. היא קנתה קלמר ב-$\frac{3}{5}$ מהכסף שיש לה. כמה עלה הקלמר?

פעולות החשבון שבחרו התלמידים לבעיות אלה הן כפל, חילוק (של הנכפל בכופל) או חיסור. לפני שנשווה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, נסביר את שגיאת החילוק בכופל ($30:\frac{3}{5}$) שהייתה השגיאה השכיחה בשתי הבעיות, ואת שגיאת החיסור ($30-\frac{3}{5}$) שהופיעה בבעיה 2 יותר מבעיה 1.

שגיאת החילוק (בכופל)

כ-24% מתלמידי כיתות ו' וכ-32% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק לבעיה 1. בבעיה 2 עשו כן כ-35% מתלמידי כיתות ו' וכ-29% מתלמידי כיתות ח'. ההסבר השכיח מודגם בשני הראיונות להלן, ריאיון לכל בעיה (התיאורים שלנו משולבים בסוגריים):

תלמיד א (כתב את תרגיל החילוק $30:\frac{3}{5}$ לבעיה 1):

ת: מטר בד אחד זה 30 שקלים, אז זה $\frac{3}{5}$ ממטר בד, זה לא מטר בד מלא. אז צריך 30 לחלק ב-5 ולהכפיל פי 3.
30 לחלק ל-5 זה 6. 6 כפול 3 זה 48. אז 48 זה $\frac{3}{5}$ מטר בד.

ח: אתה אומר שצריך לעשות 30 לחלק ל-5 כפול 3...

ת: כדי להגיע לתוצאה של התרגיל הזה
(מצביע על $30:\frac{3}{5}$, התרגיל שהוא כתב)

ח: איזה? של $30:\frac{3}{5}$?

ת: כן

ח: כלומר, אתה טוען ש-30 לחלק ל-5 כפול 3, זה כמו $30:\frac{3}{5}$...?

ת: כן

תלמידה ב כתבה לבעיה 2 את שני התרגילים האלה: $30:\frac{1}{5}=6$ ו-$6\times3=18$. כאשר החוקרת ביקשה ממנה לכתוב רק תרגיל אחד, היא כתבה $30:\frac{3}{5}$. הנה ההסבר שלה:

אנחנו עושים $30:\frac{1}{5}$, וזה כמו $30:5$ שזה 6. לכן 6 הוא חמישית מ-30. כפול 3, זה 48. זו (מצביעה על $30:\frac{1}{5}=6$, $6\times3=18$) הדרך שאני חושבת וקלה בשבילי, אבל באמת זה (מצביעה על $30:\frac{3}{5}$) איך שמלמדים. אבל זה (מצביעה שוב על $30:\frac{1}{5}=6$, $6\times3=18$) יותר קל. לוקחים תרגיל קשה (מצביעה על $30:\frac{3}{5}$), ומפרקים אותו.

אם כן, לדעת תלמידים אלה תרגיל החילוק $30:\frac{3}{5}$ נועד כדי למצוא '$\frac{3}{5}$ של 30'. הם חישבו את התרגיל $30:\frac{3}{5}$ בסדרת הפעולות בשלמים 30:5x3 (חילוק ב-5 ואחר כך כפל ב-3) המוכרת מכיתה ד' לצורך מציאת חלק מכמות. נשים לב שהנימוק "כדי למצוא חלק מ-" שונה מהנימוק "כדי למצוא תוצאה קטנה יותר". הוא מעניק לתרגיל החילוק כולו משמעות (שגויה), ולא נוגע רק לפעולת החילוק שבו.

שגיאת החיסור

תרגיל החיסור $30-\frac{3}{5}$ נכתב לבעיה 2 יותר מבעיה 1. בקרב תלמידי כיתה ו', כ-14% מהתלמידים בחרו חיסור לבעיה 2 לעומת כ-1% לבעיה 1. בקרב תלמידי כיתה ח', כ-23% מהתלמידים בחרו חיסור לבעיה 2 לעומת כ-5% לבעיה 1. בראיונות עם תלמידים שכתבו

תרגיל חיסור לבעיה 2 מצאנו את שני ההסברים האלה, כשהראשון היה השכיח:

1. החיסור נועד למצוא את ערך החלק המשלים. התלמידים נימקו: "כי צריך למצוא כמה כסף נשאר לרינה". בכותבם את התרגיל $30-\frac{3}{5}$ הם התכוונו ל-'30 פחות $\frac{3}{5}$ של 30'. הצורך לחשב "כמה נשאר?" היה אינסטינקטיבי, ונכשלו בו גם תלמידים שנחשבים חזקים במתמטיקה. אלה תיקנו את עצמם בריאיון מייד ואמרו: "לא, לא צריך למצוא כמה נשאר לרינה, אלא כמה עלה הקלמר".
2. החיסור נועד להוציא את החלק מתוך השלם. הסיבה לתרגיל החיסור הייתה להוריד מהכסף כדי לקנות את הקלמר.

בשני ההסברים האלה אפשר לראות השפעה של מאפיינים של בעיות חיסור דינמיות במספרים שלמים הנקראות גם "בעיות שינוי מסוג הוצאה", כמו "למיכל 12 שקלים. היא קנתה מחברת ב-5 שקלים. כמה כסף נשאר למיכל?". בבעיה 2 מתוארת התרחשות – קנייה של הקלמר, ויש צורך לגרוע את ערך החלק, להוציאו מהשלם. השאלה "כמה נשאר?" עשויה להיות המשך טבעי לחלק הראשון

טבלה 1: שכיחויות יחסיות (באחוזים), ביצועים דומים או שונים אצל אותו תלמיד בפריטים 1 ו-2

קטגוריה	א **כפל** בשתי הבעיות (נכון)	ב **חילוק** בשתי הבעיות	ג **חיסור** בשתי הבעיות	ד **חילוק** בבעיה (1) **וחיסור** בבעיה (2)	ה **כפל** בבעיה (1) **וחיסור** בבעיה (2)	ו **חילוק** בבעיה (1) **וכפל** בבעיה (2)	ז **כפל** בבעיה (1) **וחילוק** בבעיה (2)	ח **אחר**
כיתות ו' (N=213)	31.9	11.7	.5	4.7	6.6	6.6	20.7	17.3
כיתות ח' (N=267)	20.2	18.0	3.0	8.6	7.5	2.2	6.0	34.5

של בעיה 2, בדומה לבעיה בשלמים לעיל. לעומת בעיה 2, לבעיה 1 יש מבנה סמנטי סטטי.[3]

ניגש כעת להשוואה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, ונתמקד במיוחד בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בטבלה 1 מוצגת התפלגות התלמידים באחוזים לפי צירופים מגוונים של תרגילים שאותו תלמיד כתב לשתי הבעיות מבין הפעולות כפל, חילוק וחיסור.

קטגוריות א-ג בטבלה נוגעות לכתיבת אותה פעולה לשתי הבעיות המילוליות, כשקטגוריה א מייצגת את הפתרון הנכון – כפל לשתי הבעיות. קטגוריות ד-ז נוגעות לבחירה של פעולות למיניהן (עם 5% מהתלמידים בכיתה ו' או ח' בכל קטגוריה לפחות). שאר התלמידים נכנסים לקטגוריה ח ("אחר"), ובכללם תלמידים שענו רק על אחת משתי הבעיות.

מהנתונים בטבלה 1 עולים הממצאים האלה:

1. כ-32% מתלמידי כיתות ו' וכ-20% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל נכון לשתי הבעיות (קטגוריה א). נראה כי תלמידים אלה מבינים כי בעיית acting across ובעיית part-of הן מודלים של כפל.
2. כ-39% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגילים שונים לשתי הבעיות (קטגוריות ד-ז). מתוכם, כ-27% מתלמידי כיתות ו' וכ-14% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל (נכון) לבעיה 1 ולא לבעיה 2 (קטגוריות ה+ז). מכאן שתלמידים אלה מתקשים לראות בבעיית part-of מודל של כפל. אחוז קטן הרבה יותר של תלמידים כתבו תרגיל כפל דווקא לבעיה 2 ולא לבעיה 1 (קטגוריה ו).
3. רוב התלמידים בכיתה ו' שכתבו תרגיל כפל לבעיה 1 ולא לבעיה 2, כתבו לה תרגיל חילוק (קטגוריה ז). השאר כתבו לה תרגיל חיסור (קטגוריה ה). בכיתה ח' ההתפלגות לשגיאות אלה הייתה דומה.

3. בניתוח זה אפשר להסביר את הבחירה בחיסור לבעיה 2 במחקר של הרדימן ומסטר (Hardiman & Mestre, 1989) שהוצג ברקע התאורטי, שאף היא בעלת מאפיינים של בעיה דינמית שמתוארת בה גריעה.

הבנה חלקית: בחירת כפל לבעיה 1 וחילוק לבעיה 2

כ-21% מתלמידי כיתות ו' ו-6% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל כפל (נכון) לבעיה 1 ותרגיל חילוק לבעיה 2 (טבלה 1, קטגוריה ז). בריאיון להלן מובא נימוק של אחת התלמידות:

תלמידה ג:

> כי $\frac{3}{5}$ (בבעיה 1) זה האורך, ואז כפול הכסף של מחיר הבד השלם, וזה כופל את זה, וזה נהיה יותר קטן כי זה שבר קטן יותר, וזה פשוט מראה לך כמה זה עולה. כאן (בעיה 1), 30 זה כמה מטר בד עולה, זה לא כמה כסף יש לה וכמה היא קנתה... אני חושבת שההבדל היחיד (בין בעיה 1 לבעיה 2) הוא שכאן (בעיה 2) זה $\frac{3}{5}$ מהכסף שלה, מתוך הכסף שלה, וכאן (בעיה 1) אנחנו רוצים לדעת כמה הבד עולה.

בבעיה 1 נתון הערך ליחידה ומבקשים למצוא את הערך של x יחידות, בדומה לבעיות acting-across במספרים שלמים. לבעיה 2, בעיית part-of, אין מקבילה במספרים שלמים. ההסבר של תלמידה ג מסייע לאפיין את ההבדל בין המודלים האלה של כפל, ואת הסיבות לקושי. היא נותנת למספר 30 תפקידים מגוונים בבעיות למיניהן: בבעיה 1, 30 הוא **הערך** המתאים ל-1 מטר בד, ואילו בבעיה 2 הוא **כמות** שצריך לחלק. בטבלה הממדית של ורניו (Vergnaud, 1983) נוכל להציג את הערכים שבבעיה 1 כך:

אורך הבד במטרים	מחיר
1	30
$\frac{3}{5}$	?

השלם (1 **מטר** בד) והחלק ($\frac{3}{5}$ **מטר** בד) הם בעלי אותו כינוי. תלמידה ג בחרה בכפל כי הוא מתאים ליחס הסדר בין **המחיר** של $\frac{3}{5}$ מטר בד ל**מחיר** של 1 מטר בד – הוא נותן את המחיר הקטן יותר. עוד נשים לב כי מטר בד אחד ו-$\frac{3}{5}$ מטר בד עשויים להיות אורכים של חתיכות בד שונות, ולכן נימוקים שעניינם יחסי סדר מתאימים במיוחד. לעומת זאת, בבעיה 2 היא חישבה את ה-$\frac{3}{5}$ **מתוך** ה-30 ("זה $\frac{3}{5}$ **מהכסף** שלה, **מתוך** הכסף שלה"). יש גודל אחד (30 שקלים), ואופרטור (מספר ללא כינוי) הפועל עליו במובן של

מציאת חלק **ממנו**. לפי ההסבר שהצגנו קודם לשגיאת החילוק, תרגיל החילוק מייצג פעילות זו של "מציאת חלק מ-" (ייצוג שגוי).

בדומה להסברים שהצגנו לשגיאת החיסור, גם בהסבר של תלמידה ג מודגש המבנה הסמנטי הסטטי של בעיה 1 ("כמה זה עולה") והמבנה הסמנטי הדינמי של בעיה 2 ("כמה כסף?" ו"כמה היא קנתה?"). מציאת חלק מכמות המודגשת בבעיה 2 היא אקטיבית, יש כאן פעולה על הכמות ההתחלתית.

לסיכום, בעיה 1 עשויה לעודד חשיבה פרופורציונית עם שני ממדים בסיסיים (מטרים ושקלים) ועם ארבעה מספרים, בעוד בעיה 2 מעודדת חשיבה על פעולה ישירה בין שני המספרים הנתונים בבעיה.[4]

פריטים 3-4: כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון

3. כתבו שאלה מילולית שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $40:\frac{2}{5}$.
4. לפניכם התחלה של שאלה מילולית. השלימו את השאלה כרצונכם כך שהתשובה עליה מתקבלת מפתרון התרגיל $\frac{2}{3}\times 60$.
השאלה: לרונן 60 שקלים ________________

הממצאים להלן נוגעים לבעיות המילוליות שנוסחו בבירור, כך שהיה אפשר לקבוע להן תרגיל כלשהו. בהמשך נדון בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שענו נכון רק על אחד הפריטים:

1. אחוז התלמידים שכתבו בעיה מנוסחת היטב שנקבע לה תרגיל: בפריט 3 – כ-39% מתלמידי כיתות ו' וכ-45% מתלמידי כיתות ח', ובפריט 4 – כ-48% מתלמידי כיתות ו' וכ-40% מתלמידי כיתות ח'.
2. מתוכם אחוז התלמידים שכתבו בעיה מילולית המתאימה לתרגיל הנתון (ובלי צורך בתרגילים נוספים): פריט 3 ($40:\frac{2}{5}$) – כ-13% מתלמידי כיתות ו' וכ-8% מתלמידי כיתות ח'. כמעט כל הבעיות המילוליות היו מסוג חילוק להכלה, שבודקים בהן "כמה פעמים $\frac{2}{5}$ נכנסות ב-40?". פריט 4 ($\frac{2}{3}\times 60$) – כ-28% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח'. בעיות אלה היו מסוג part-of שבהן $\frac{2}{3}$ משמש אופרטור על 60. לדוגמה: "לרונן 60 שקלים. הוא קנה חולצה ב-$\frac{2}{3}$ מהכסף שלו. כמה הוא שילם?".
3. השגיאה הנפוצה בפריט 3 ($40:\frac{2}{5}$) היא כתיבת בעיה מילולית חד-שלבית או דו-שלבית, הכוללת מציאת $\frac{2}{5}$ של 40. כ-26% מתלמידי כיתה ו' וכ-37% מתלמידי כיתה ח' עשו כן. דוגמאות: "בכיתה 40 תלמידים. $\frac{2}{5}$ מהם יצאו לטיול. כמה תלמידים יצאו לטיול?"; "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?".

הבנה חלקית: בעיה נכונה לתרגיל הכפל (במלואה או בחלקה) ובעיה שגויה לתרגיל החילוק

כ-15% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו הן לתרגיל הכפל ($\frac{2}{3}\times 60$) והן לתרגיל החילוק ($40:\frac{2}{5}$) בעיית כפל חד-שלבית או דו-שלבית, שבה השבר ($\frac{2}{3}$ או $\frac{2}{5}$) משמש אופרטור כפלי הפועל על המספר השלם (60 או 40 בהתאמה), ולרוב במשמעות "חלק מ-". כלומר הם העניקו לשתי הפעולות את מודל part-of של כפל. דוגמאות לבעיות חד-שלביות: "בכיתה 40 תלמידים. $\frac{2}{5}$ מהם יצאו לטיול. כמה תלמידים יצאו לטיול?"; "לרונן 60 שקלים. הוא קנה חולצה ב-$\frac{2}{3}$ מהכסף שלו. כמה עלתה החולצה?". בפעמים אלה של בעיות חד-שלביות התלמידים ענו נכון על פריט 4 אך שגו בפריט 3. דוגמאות לבעיות דו-שלביות: "לגיא 40 שקלים. הוא נתן לחברו $\frac{2}{5}$ מכספו. כמה כסף נשאר לגיא?"; "לרונן 60 שקלים. הוא בזבז $\frac{2}{3}$ מה-60 שקלים שלו. כמה כסף נשאר לו?"; "לרונן 60 שקלים. הוא שם בבנק את הכסף. כל יום הריבית היא $\frac{2}{3}$ מה-60. כמה שקלים יהיה לו לאחר יום?". בבעיות הדו-שלביות נצרך יותר מהתרגיל הנתון במשימה, הן לשיטת המעניקים משמעות נכונה לתרגיל הנתון והן לשיטת השוגים.

ייתכן שההתחלה הנתונה לבעיית הכפל בפריט 4 עודדה לכתוב בטבעיות בעיית part-of נכונה. מכל מקום, כתיבת בעיה כזו גם לתרגיל החילוק עשויה להעיד על חוסר הבנה שלמה של שתי הפעולות.

פריטים 5-6: הערכת תוצאת תרגיל

5. הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $63:\frac{3}{7}$
א. גדולה מ-63 ב. קטנה מ-63 ג. שווה ל-63
6. הקיפו את התשובה הנכונה: התשובה לתרגיל $96\times\frac{5}{8}$
א. גדולה מ-96 ב. קטנה מ-96 ג. שווה ל-96

ממצאים:

1. אחוז התלמידים שענו נכון על פריט 6 גדול מאחוז התלמידים שענו נכון על פריט 5, הן בכיתה ו' והן בכיתה ח' (כ-66% לעומת כ-55% בכיתה ו' וכ-59% לעומת כ-34% בכיתה ח'). מכאן שההבנה כי תרגיל הכפל נותן תוצאה "קטנה מ-" קלה מההבנה שתרגיל החילוק נותן תוצאה "גדולה מ-".
2. הבנה חלקית: כ-22% מתלמידי כיתות ו' וכ-31% מתלמידי כיתות ח' בחרו את סעיף ב ("התוצאה קטנה מ-") הן בפריט 5 (בחירה שגויה) והן בפריט 6 (בחירה נכונה). בדומה למיכאל שהוצג בפתיח למאמר, תלמידים אלה לא שוגים בו בזמן בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין".

לטענת התלמיד מיכאל "גם לתרגיל הכפל וגם לתרגיל החילוק תוצאה קטנה מ-72, אבל החילוק מקטין יותר...". לא נערך עימו ראיון במשך כדי לברר באיזה מובן ההקטנה של חילוק נבדלת בעיניו מההקטנה של כפל. על סמך הממצאים בפריטים 1-3 החושפים את הפרשנות השגויה של תרגיל חילוק בשבר כ"מוצא חלק מ-", אפשר לשער שזוהי גם התפיסה של מיכאל, וכי היא נבדלת מהתפיסה של תרגיל כפל בשבר כנותן תוצאה "קטנה מ-". לפי שתי התפיסות האלה (האחת שגויה והאחרת נכונה) "התוצאה קטנה יותר", אך לא באותו מובן.

פריטים 7-8: כתיבת תרגיל לבעיה מילולית של חילוק (המחלקן קטן מ-1)

7. משך האפייה של עוגה אחת הוא $\frac{3}{4}$ שעה. כמה עוגות אפשר לאפות במשך 24 שעות, אם אופים אותן בזו אחר זו?
8. למסיבה הביאו 24 פיצות שלמות. כל ילד אכל $\frac{3}{4}$ פיצה. לכמה ילדים הספיקו הפיצות, אם כל הפיצות נגמרו?

פעולות החשבון הנפוצות שהתלמידים בחרו הן כפל (של המחלק והמחולק) וחילוק. לפני שנשווה בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, נסביר את שגיאת הכפל.

שגיאת הכפל

הבחירה של כפל לבעיות חילוק עם מחלק רציונלי קטן מ-1 (הקטן מהמחולק) הוסברה בספרות (למשל אצל Tirosh & Graeber, 1989) כך: תרגיל הכפל נבחר מכיוון שהתשובה לבעיה צפויה להיות גדולה מהמחולק, ומכיוון ש"כפל מגדיל". אף על פי שבשתי הבעיות 7 ו-8 במחקר שלנו התוצאה גדולה מ-24, כשליש

4. פרדיגר (Prediger, 2011) מצאה כי בעוד 43% מההסברים לתרגיל החילוק שהתלמידים במחקר שלה בחרו לבעיית acting-across עסקו ביחסי סדר, רק 6% מההסברים לשגיאה זו בבעיית part-of היו כאלה. אפשר להסתייע בראיונות במחקר שלנו כדי להבין את הפער הזה.

מהתלמידים בכיתה ו' וכרבע מהתלמידים בכיתה ח' כתבו תרגיל כפל שגוי רק לאחת מהן (טבלה 2 להלן, קטגוריות ג-ד). מכאן ששיקול סדר הגודל של התוצאה הצפויה אינו בלעדי בבחירת הפעולה. יתרה מכך, לא שמענו בראיונות את ההסבר "כפל, משום שהתוצאה צריכה להיות גדולה מ-24".

מצאנו את שני הסוגים האלה של הסברים לכתיבת תרגיל כפל לבעיה 7 (היכן ששגיאה זו הייתה נפוצה), כשההסבר השני הוא השכיח. בשני ההסברים הכפל משמש קיצור של חיבור חוזר של $\frac{3}{4}$:

1. הסבר שביסודו הבנה שגויה של הסיטואציה. התלמידים חשבו שמדובר ב-24 עוגות ולא ב-24 שעות. לפי הבנה זו, כדי לחשב כמה זמן לוקח לאפות 24 עוגות, אכן נכון לכפול את $\frac{3}{4}$ ב-24.

תלמיד ד:

קחי $\frac{3}{4}$, תכפילי אותו ב-24. $\frac{3}{4}$ שעה לוקח לעוגה אחת. יש 24 עוגות. עברה $\frac{3}{4}$ שעה - גמרתי עוגה אחת, ואני רוצה להכניס עוד אחת ל-$\frac{3}{4}$ שעה. ככה $\frac{3}{4}$ שעה ועוד $\frac{3}{4}$ שעה עד שאני גומר הכול.

2. הסבר שביסודו הבנה נכונה של הסיטואציה. התלמידים הבינו שצריך למצוא "כמה $\frac{3}{4}$ יש ב-24?", אך תרגמו שאלה זו לכפל.

תלמידה ה:

צריך למצוא כמה $\frac{3}{4}$ יש ב-24. צריך כפל כי צריך $\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$... וזה אומר שצריך לכפול.

תלמיד ו:

ת: מה ששואלים אותנו פה זה 'פעמים', ו'פעמים' זה כפל. כי אומרים לנו שמשך אפייה של עוגה אחת זה $\frac{3}{4}$ שעה, ואז שואלים 'כמה עוגות אפשר לאפות ב-24 שעות?'. וזה אומר שזה 'פעמים', כי זה עוגה אחרי עוגה אחרי עוגה.

ח: מה פעמים מה?

ת: פעמים של עוגות ב-24 שעות.

תלמידים ה ו-ו השתמשו באסטרטגיית "בנייה" (building up), מהמחלק עד שמגיעים למחולק. אסטרטגיה זו נמצאה במחקרים על בעיות כפל וחילוק מספרים שלמים (Mulligan, 1992). הקושי של תלמידים אלה היה לקשר בין אסטרטגיה זו לתרגיל חילוק עם המספרים שבבעיה.

ניגש כעת להשוות בין הפעולות שאותו תלמיד בחר לשתי הבעיות, ונתמקד במיוחד בתלמידים בעלי הבנה נכונה חלקית – אלה שבחרו פעולה נכונה רק לאחת מהן. בטבלה 2 מוצגת התפלגות התלמידים באחוזים לפי צירופים שונים של תרגילים שאותו תלמיד כתב לשתי הבעיות מבין הפעולות כפל וחילוק.

טבלה 2: שכיחויות יחסיות (באחוזים), ביצועים דומים או שונים אצל אותו תלמיד בפריטים 7 ו-8

קטגוריה	א **חילוק** בשתי הבעיות (נכון)	ב **כפל** בשתי הבעיות	ג **חילוק** בבעיה (7) **וכפל** בבעיה (8)	ד **כפל** בבעיה (7) **וחילוק** בבעיה (8)	ה **אחר**
כיתה ו' (N=213)	22.5	18.3	6.6	26.3	26.3
כיתה ח' (N=267)	23.6	9.7	5.2	21.7	39.8

קטגוריות א-ב בטבלה נוגעות לכתיבת אותה פעולה לשתי הבעיות המילוליות, כשקטגוריה א מייצגת את הפתרון הנכון – חילוק בשתי הבעיות. קטגוריות ג-ד מייצגות בחירה של פעולות שונות (עם לפחות 5% מהתלמידים בכיתה ו' או ח' בכל קטגוריה). שאר התלמידים נכנסים לקטגוריה ה ("אחר"), ובכללם תלמידים שענו רק על אחת משתי הבעיות.

מהנתונים בטבלה 2 עולים הממצאים האלה:

1. כ-23% מתלמידי כיתות ו' וכ-24% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק נכון לשתי הבעיות (קטגוריה א).
2. כ-33% מתלמידי כיתות ו' וכ-27% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגילים שונים לשתי הבעיות (קטגוריות ג-ד). מתוכם כ-26% מתלמידי כיתות ו' וכ-22% מתלמידי כיתות ח' כתבו תרגיל חילוק נכון לבעיה 8 ותרגיל כפל שגוי לבעיה 7 (קטגוריה ד). אחוז קטן הרבה יותר של תלמידים כתבו תרגיל חילוק נכון דווקא לבעיה 7 ולא לבעיה 8 (קטגוריה ג).

הבנה חלקית: חילוק לבעיה 8 וכפל לבעיה 7

כ-26% מתלמידי כיתות ו' וכ-22% מתלמידי כיתות ח' כתבו לבעיה 8 תרגיל חילוק (נכון), ולבעיה 7 תרגיל כפל (טבלה 2, קטגוריה ד). להלן ההסברים של שתי תלמידות:

תלמידה ז:

(כפל בבעיה 7) כי זה 'כמה פעמים נכנס' אז זה ועוד ועוד ועוד. זה כמו כפל, במקום. (חילוק בבעיה 8) הבנתי שמתוך ה-24 כל ילד אכל $\frac{3}{4}$ של פיצה. אז לכמה ילדים? כמה ילדים אכלו? אז צריך לחלק את זה ל-$\frac{3}{4}$ כדי לדעת כמה ילדים אכלו. כי מתוך ה-24 כל ילד... אז אם מחלקים אז מקבלים את התשובה של 'כמה ילדים'.

התלמידה זיהתה בבעיה 8 את המבנה המוכר של חלוקה לקבוצות שוות: ידועה הכמות הכוללת (סך הכול), ידוע כמה כל ילד קיבל (הגודל של כל קבוצה) ושואלים לכמה ילדים זה יספיק (מספר הקבוצות).

תלמידה ח:

(בבעיה 8) חילקו את הפיצות בין הילדים וכל ילד אכל $\frac{3}{4}$ פיצה, אז זה אומר שזה חילוק. (הסיבה לכפל בבעיה 7 וחילוק בבעיה 8) כי פה (בעיה 7) אופים ושם (בעיה 8) אוכלים, וזה יוצא ששם (בעיה 8) חותכים ופה (בעיה 7) עושים.

האקט של החלוקה בבעיה 8 ברור ("חותכים"). נקודת המוצא היא המחולק – אותו מחלקים. לעומת זאת בבעיה 7 "אופים", "עושים", מתחילים מהמחלק – הוא נאסף עד למחולק. כל המרואיינים שהשתמשו באסטרטגיית "בנייה" (building-up) בבעיה 7 ($\frac{3}{4}$ ועוד $\frac{3}{4}$ ועוד...), לא השתמשו בה בבעיה 8, שנראתה להם בעיה שבה "פשוט מחלקים". מהסברים אלה נראה שלמחלק השברי לא הייתה השפעה על בחירת הפעולה, ואף לא לעצם היותו מספר קטן מ-1. בפרט, נימוקי התלמידים לא עסקו כלל בתוצאה הצפויה.

עוד מצאנו כי ההצלחה בבחירת חילוק לבעיה 8 לא מעידה בהכרח על הבנת המשמעות או התכונות של תרגיל חילוק בשבר. לראיה, כ-$\frac{1}{4}$ מהתלמידים בכל אחת משכבות הגיל כתבו תרגיל נכון ($24:\frac{3}{4}$) לבעיה 8 אך שגו בקובעם שתוצאת התרגיל $63:\frac{3}{7}$ קטנה מ-63 (פריט 5). נוסף על כך, כ-43% מהתלמידים בכל אחת משכבות הגיל כתבו תרגיל נכון ($24:\frac{3}{4}$) לבעיה 8, אך לא כתבו בעיה מילולית נכונה לתרגיל $40:\frac{2}{5}$ (פריט 3). נתונים אלה מעוררים אותנו לתהות שמא המודל של חילוק העומד לנגד עיני תלמידים אלה הוא חילוק לחלקים – גם כשהם עונים על בעיית חילוק להכלה.

דיון

מטרת המחקר העיקרית הייתה לברר כיצד תלמידים בכיתה ו' מפרשים כפל וחילוק עם שברים פשוטים מתוך התמקדות באי הבנות הייחודיות למספרים רציונליים המבוטאים כשבר פשוט.

בדיון זה נעסוק בממצאים המראים את ההשפעה של השבר הפשוט על אי ההבנה של כפל או חילוק בשבר, נתאר רמות ביניים של הבנה שעלו מהשוואת ביצועי התלמידים בכל שני פריטים מזווגים, ונשווה בין ממצאי המחקר הנוכחי לממצאי מחקרים על מספרים עשרוניים.

סיטואציות "מציאת חלק מכמות" ייחודיות לשברים פשוטים. עד כיתה ו' התלמידים עונים עליהן בסדרת פעולות עם המכנה והמונה של החלק. למשמעות השבר כאופרטור – בעיקר זו שמיושמת בחילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו – יש חלק בביצועים ובהסברים שונים של התלמידים במחקר הנוכחי. בבעיות שבהן צריך למצוא $\frac{3}{5}$ של 30, התלמידים קישרו בין התרגיל השגוי שהם כתבו ($30:\frac{3}{5}$) לסדרת הפעולות בשלמים שאכן מתאימה למציאת $\frac{3}{5}$ של 30 ($30:5\times3$). מתן משמעות שגויה זו לתרגיל החילוק בשבר מעידה על חוסר הבנה שהסיטואציה היא מודל של כפל ולא של חילוק, ובעצם על חוסר הבנה שלמה של שתי הפעולות.

ההשפעה של משמעות השבר הפשוט כאופרטור נמצאה במחקר במשימות של כתיבת תרגיל לבעיות כפל עם כופל קטן מ-1 (פריטים 2-1) ובמשימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל חילוק בשבר קטן מ-1 (פריט 3), אך לא במשימות של כתיבת תרגיל לבעיות חילוק עם מחלק קטן מ-1 (פריטים 8-7). במיומנות זו, האחרונה, לא נמצאה למחלק השברי שבבעיה השפעה שלילית על הבחירה של פעולה – ואף לא לעובדה שהוא מספר קטן מ-1. עם זה ההצלחה בבחירת חילוק לבעיות אלה לא שיקפה בהכרח הבנה של משמעות תרגיל חילוק בשבר או הערכה של סדר הגודל שלו.

בבעיות כפל במספרים עשרוניים הכופל מוצג על פי רוב כגודל (למשל 0.65 ק"ג) ולא כמספר ללא כינוי ("0.65 מ-"), כמו בבעיה הזו: "המחיר של ק"ג אורז הוא 40 שקלים. מה המחיר של 0.65 ק"ג אורז?". לבעיה 1 מזוג הפריטים הראשון במחקר שלנו יש מבנה סמנטי דומה לבעיה זו במספרים עשרוניים – גם בה הכופל מייצג גודל ($\frac{3}{5}$ מטר בד). ואכן, מצאנו בקרב התלמידים שבחרו לה כפל נימוק העוסק ביחסי סדר ("כי צריך תשובה הקטנה מ-30") – כמו הנימוק שהיה נפוץ במחקרים על מספרים עשרוניים. כפי שלמדנו מהראיונות, התלמידים ביקשו להסדיר את יחס הסדר בין הערך של הגודל המיוצג בשלם/נכפל ובין הערך של הגודל המיוצג בחלק/כופל, ובחרו פעולה חשבונית שתיתן את סדר הגודל הרצוי. בבעיות part-of הייחודיות לשברים פשוטים, ההסבר הנפוץ לתרגיל החילוק השגוי שנכתב היה "כי צריך למצוא חלק מ-".

גריר (Greer, 1994) עסק בקשר שבין שבר יחידה לחילוק. השברים הראשונים המוצגים לתלמידים הם מהצורה $\frac{1}{n}$ (n שלם חיובי), והדגש הוא בחילוק ב-n. לדבריו, הקישור הזה בין $\frac{1}{n}$ ובין חילוק משתקף בטעות המצויה כדוגמת $6:\frac{1}{2}=3$. ייתכן שהפרשנות השגויה של תרגיל חילוק בשבר שאינו שבר יחידה כ"חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו" היא הרחבה של השגיאה שהציג גריר במקרה של שבר יחידה. ייתכן גם שיש כאן הרחבה של השימוש השגוי בשפה הטבעית במקרה של שבר יחידה: כאמור, אפשר למצוא אנשים שאומרים (גם בעברית) "אני מחלק את החבל ל-$\frac{1}{2}$", כשהם מתכוונים לחצייה שלו, לחלוקה שלו ל-2, למציאת $\frac{1}{2}$ ממנו. תפיסות שגויות אלה מתקשרות להצגה של השבר הפשוט כמנה של שני מספרים שלמים, להבדיל מהמספר העשרוני שנראה כמספר אחד.

בשל הקושי לבחור פעולה לבעיות כפל עם כופל קטן מ-1 לעומת ההצלחה בבעיות עם כופל גדול מ-1, השתמשו במחקרים קודמים במונח "אפקט הכופל" (Bell et al., 1984). אנו מציעים כי במקרה של כופל שהוא שבר פשוט הקטן מ-1, אפשר להשתמש במונח "אפקט האופרטור".

המשימות שהצגנו במאמר זה נותחו בזוגות, כשמענה נכון רק על אחת מהן סייע לשפוך אור על ההבנות החלקיות שיש לתלמידים ולחשוף הבדלים דקים בין תפיסות של הפעולות. ניתוח הביצועים וההסברים של התלמידים שהצליחו רק באחת משתי משימות כפל, או רק באחת משתי משימות חילוק, סייע לזיהוי רבדים שונים בהבנת כל פעולה. כמו כן, במקרים שבהם התלמידים הצליחו רק באחת משתי משימות עם פעולות חשבון שונות זו מזו נחשף בלבול ביניהן, שבא לידי ביטוי בהאחדה של תכונות ומשמעויות.

שתי ההבנות החלקיות הבאות נמצאו אצל תלמידים שכתבו תרגיל נכון רק לאחת משתי בעיות מילוליות בעלות אותם מבנים מתמטיים ואותם מספרים. התלמידים דלו מהבעיות המילוליות משמעויות או תכונות של הפעולה החשבונית הנכונה, אך לא בהכרח בחרו בה.

1. **כפל כ'מקטין' אך לא כמוצא 'חלק מ-':** באחת מבעיות הכפל עם כופל קטן מ-1 (בעיית acting across) התלמידים הסבירו נכון שכפל מתאים "כי הוא נותן תוצאה קטנה יותר". הסבר זה מעיד על שינוי בתפיסת הכפל כמגדיל תמיד. לעומת זאת לבעיה האחרת (בעיית part-of), שבה לטענתם (הנכונה) "צריך למצוא חלק מ-", הם כתבו תרגיל חילוק. מכאן אפשר ללמוד כי ההבנה שכפל מקטין לא גוררת בהכרח הבנה שכפל יכול לייצג סיטואציה של מציאת חלק מכמות, וכן שההבנה הראשונה קלה מהשנייה.
2. **חילוק כמייצג חלוקת כמות קלסית, ולא כמייצג את השאלה "כמה פעמים נכנס x בתוך y?":** באחת מבעיות החילוק להכלה התלמידים הסבירו שמתאים חילוק כי מחלקים בה כמות ("מחלקים פיצה לילדים"/"חותכים"). לעומת זאת, לבעיה האחרת שבה לטענתם (הנכונה) "צריך למצוא כמה פעמים $\frac{3}{4}$ נכנס ב-24?", הם כתבו תרגיל כפל. התלמידים שהצליחו רק באחת משתי בעיות החילוק לא הבינו לגמרי את משמעות החילוק להכלה כמשמעות של חילוק.

ברמות ביניים אלה של הבנה, שבהן נמצא חוסר שימור של הפעולה אף בבעיות מילוליות עם אותם מספרים בדיוק, התלמידים הושפעו ממאפיינים סמנטיים שונים של הבעיות, ולא הצליחו לזקק את המבנה המתמטי המשותף להן. למשל, בכפל הם לא הבחינו במבנה המתמטי המשותף לבעיות acting across quantity ולבעיות part-of. בבעיות part-of השבר משמש אופרטור במפורש ("מ-"), ולעיתים הקשר שלהן דינמי ("קנו/שתו" חלק מ-). מאפיינים אלה השפיעו על הבחירה השגויה בחילוק, אך גם בחיסור – שגיאה שלא נמצאה במחקרים על מספרים עשרוניים שעל פי רוב משתתפים בבעיות מילוליות בעלות מבנה סמנטי סטטי. בבעיות חילוק להכלה – התלמידים הבחינו בין בעיות בעלות הקשר שהוצג בהן בפירוש מצב של חלוקת כמות ובין בעיות המנוסחות באופן שמעודד לבדוק "כמה פעמים נכנס המחלק במחולק?", ולא זיהו ששתיהן בעיות חילוק.

אסטרטגיות חישוב מהידע הקודם של התלמידים נמצאו אף הן מתערבות בתהליך הבחירה של פעולה לבעיה מילולית: התלמידים שכתבו תרגיל חילוק בשבר כדי למצוא חלק מכמות היו מושפעים מהאסטרטגיה המוכרת מכיתה ד' למציאת חלק מכמות: חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו. כאמור, תרגיל חילוק כמו $30:\frac{3}{5}$ שקול בעיניהם לחישוב $30:5\times3$. לפי גישת שינוי מושגי, ברמות ביניים

של הבנה התלמידים משלבים מרכיבים של הידע הקודם במרכיבים של הידע החדש (Vamvakoussi, Vosniadou, & Van Dooren, 2013). אם כן, אפשר לומר שתלמידים במחקר הנוכחי שילבו בתהליך ההרחבה שלהם את הידע החישובי הקודם על מציאת חלק מכמות, ולא רק את הידע על חילוק כמקטין כפי שהוצע במחקרים קודמים. הראל (Harel, 1995) הזכיר שלב ביניים זה, שבו תלמידים לא מצליחים להשתמש בשבר כולו ככופל. הוא טען כי התלמיד עובר שלושה שלבים בהבנה שלו של כפל ממספרים שלמים לשברים פשוטים. בשלב הראשון הוא לומד לחשוב על מספרים שלמים ככופלים (מתוך דמיון של מספר מסוים של קבוצות שוות בעלות גודל מסוים). בשלב השני הוא רואה בשברים "פסאודו כופלים", כלומר הוא משתמש בשברים כהרכבה של כופל שלם ומחלק שלם (למשל, הוא מחלק את הנכפל במכנה של השבר הכופל ואז כופל במונה שלו). השלב האחרון הוא רכישת המושג של שברים ככופלים, כלומר השבר כולו משמש כופל. גם התלמידים ששגו וכתבו תרגיל כפל לבעיית חילוק להכלה "כי צריך למצוא כמה פעמים $\frac{3}{4}$ נכנסים ב-24?" שילבו בנימוק שלהם אסטרטגיית חישוב מהידע הקודם: building-up. הקושי בשתי הפעמים, בעיות הכפל ובעיות החילוק, היה לתרגם את האסטרטגיות הנכונות האלה לתרגיל אחד עם המספרים שבבעיה, ובמילים אחרות: לראות בבעיות האלה מודלים של כפל או של חילוק.

שתי התפיסות השגויות להלן נמצאו אצל תלמידים שענו נכון רק על פריט הכפל ולא על פריט החילוק (שהיו בעלי אותה מטלת ביצוע), באופן שהם שייכו לשתי הפעולות את אותה תכונה או משמעות:

1. **יישום של מודל 'חלק מ-' לכפל וגם לחילוק בשבר:** במשימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון נמצאו תלמידים שכתבו הן לתרגיל הכפל בשבר והן לתרגיל החילוק בשבר בעיה מילולית שצריך למצוא בה חלק מכמות.
2. **'כפל מקטין' וגם 'חילוק מקטין':** במשימות של הערכת תוצאת תרגיל נמצאו תלמידים שטענו כי התוצאה של תרגיל כפל בשבר "קטנה מ-" אך גם של תרגיל החילוק בשבר. תלמידים אלה לא שבויים בשתי התפיסות השגויות "כפל מגדיל" ו"חילוק מקטין", אלא רק באחת מהן.

בלבול זה בין הפעולות לא הופיע במחקרים על מספרים עשרוניים, ונראה קשור לפירוש השגוי של תרגיל חילוק בשבר כ"מוצא חלק מ-" ולהקשרים של חלק מכמות הייחודיים לשברים פשוטים.

אפשר לומר שאצל תלמידים אלה ההבחנה הברורה בין כפל לחילוק שהייתה קיימת במספרים שלמים היטשטשה במהלך ההרחבה לשברים פשוטים. חוסר ההבחנה בין המשמעויות או התכונות של הפעולות עשוי ללמד על העדר הבנה מלאה של שתיהן, ולא רק אחת מהן (Hamo, Ilany, & Buzaglo, 2018).

בהבנות החלקיות ובתפיסות השגויות שמנינו לעיל אפשר לראות כי עיקר הקושי של התלמידים בהבנת כפל וחילוק בשבר נמצא ברובד של משמעויות של הפעולות ולא ברובד של יחסי סדר, בהתאם למִדרג העומק במודל של פרדיגר על מכשולים אפיסטמולוגיים (Prediger, 2008b). הן משמעות הכפל כמוצא 'חלק מ-' והן משמעות החילוק להכלה אינן נגישות מספיק לתלמידים כמשמעויות של הפעולות.

התלמידים בעלי הבנה חלקית מעניינים במיוחד משום שהם כבר עשו כמה צעדים בתוך תהליך ההרחבה של כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים, ואפשר ללמוד מהם על צעדים אחרים הקשים יותר לביצוע.

אצל תלמידים אלה מצאנו חוסר עקיבות, וגם שהם לא מזהים את הסתירה בביצועים שלהם.

הממצאים שהצגנו נוגעים לתשובות התלמידים לבעיות מילוליות ותרגילים פשוטים יחסית, שכללו מספר שלם ושבר קטן מ-1. קשיים שמתעוררים כבר ברמות הנמוכות של לימוד כפל וחילוק שברים פשוטים מעידים על מורכבות השינוי המושגי. העדר היתרון לתלמידים בכיתה ח' על פני התלמידים בכיתה ו' אפילו במשימות אלה ממחיש את עוצמת הקושי. הימצאות רמות הביניים בהבנת כפל וחילוק בשבר גם בקרב התלמידים מכיתה ח' מעידה על כך שהם לא הגיעו לתפיסה המדעית גם בחלוף שנתיים מלימוד נושאים אלה. מכאן שהשינוי המושגי הנדרש הוא רדיקלי, ובשל כך יש להמשיך ולעסוק בו גם בחטיבת הביניים.

השלכות להוראה

מהממצאים והדיון מתברר כי לתפיסה של תלמידים את כפל וחילוק יש מאפיינים, שגיאות והסברים ייחודיים לשברים פשוטים. לפיכך על הפדגוגיה לכלול התמקדות בייחודיות זו, לצד עקרונות כלליים המשותפים לכלל המספרים הרציונליים.

לפי גישת שינוי מושגי יש לעסוק בחוסר התאמה בין המושגים המתמטיים שהתלמיד צריך לרכוש ובין תפיסות אינדיווידואליות כשלבים טיפוסיים בתהליך של בניית ידע מחדש. היא מאפשרת למורה לראות בשגיאות שמצאנו שגיאות צפויות ולהתכונן לקראתן. המורה יכול להיעזר ברמות הביניים של הבנה שנמצאו כדי לדון ברבדים שונים של הבנת הפעולות ולזהות את רמת התלמיד. ההבחנה בין סוגים מגוונים של בעיות מילוליות ומדרג הקושי שלהן חשובים כדי לתכנן את סדר ההוראה וכדי להביא בחשבון שהתלמיד עשוי להגיב בדרכים מגוונות על בעיות שזהות מבחינה מתמטית.

כאשר תלמיד כותב תרגילים שונים זה מזה לבעיות מילוליות דומות, הוא בעצם לא מצליח לזקק את המבנה המתמטי שלהן, קרי – הוא לא השיג חשיבה כפלית שלמה. הראל (Harel, 1995) טען שלהיות פרשן נאיבי של בעיה מילולית הוא שלב קונספטואלי מחויב המציאות שילד חייב לעבור בו במעבר מחשיבה חיבורית לחשיבה כפלית. אחרי שהוא משיג את החשיבה הכפלית, הוא מסוגל לזהות בשתי בעיות מילוליות דומות את המבנה המתמטי הזהה לשתיהן. דיונים מפורשים על משמעויות של הפעולות עשויים לסייע לתלמיד בשלב הפרשנות הנאיבית. אפשר לעשות זאת בעזרת משימות של בחירת פעולה לבעיה מילולית נתונה, ולהפך באמצעות משימות של כתיבת בעיה מילולית לתרגיל נתון. ספרי הלימוד בישראל לא כוללים מספיק משימות כאלה (חמו, בוזגלו ואילני, 2017). אם המורה מזהה הבדלים בין הפעולות שהתלמיד בוחר לבעיות מילוליות בעלות אותו מבנה מתמטי, עליו לדון איתו על כך.

לנוכח הבלבול בין כפל לחילוק בשבר, יש צורך לקיים תרגול מעורב של משמעויות שתי הפעולות – גם זה חסר בספרי הלימוד בישראל. כמו כן, לנוכח ההטמעה הלא נכונה של אסטרטגיות חישוב קודמות בתוך הידע החדש על כפל וחילוק, אנו ממליצים לשלב את האסטרטגיות הלא פורמליות עם הכתיבה של תרגיל עם שברים. כך למשל אפשר לבקש מהתלמידים לענות על בעיה מילולית של כפל שבה מוצאים חלק מכמות, הן בעזרת הידע שלהם מכיתה ד' (חילוק במכנה של השבר וכפל במונה שלו) והן בעזרת תרגיל כפל בשבר, ולבדוק אם התקבלה אותה תוצאה. בדומה – לעודד את התלמידים לענות על בעיית חילוק להכלה, הן בעזרת השאלה "כמה פעמים נכנס המחלק בתוך המחולק?" והן בעזרת תרגיל חילוק בשבר, ולבדוק אם התקבלה אותה תוצאה.

יש להמשיך ולעסוק בכפל וחילוק שברים פשוטים גם בחטיבת

הביניים, הן בהקשר של בעיות מילוליות במספרים, והן בהקשר של ביטויים אלגבריים ובעיות מילוליות באלגברה.

תרומת המחקר

תרומת המחקר באה לידי ביטוי בתחומים האלה:

1. תהליך המחקר: הצגת כלי מחקר ודרכי ניתוח המאפשרים חשיפה של האופי הספציפי של תפיסות שגויות בשברים פשוטים וזיהוי רמות ביניים של הבנה. הוצגו גם דרכים לניתוח תוכן ומבנים סמנטיים של בעיות מילוליות. כלים אלה יכולים לשרת מחקרים אחרים שעניינם תפיסת משמעות של פעולה חשבונית.
2. קידום הוראת המתמטיקה: הבנת תפיסות של תלמידים בשברים פשוטים, והבחנה שלהן ממספרים עשרוניים. זיהוי שגיאות חדשות ומתן הסברים חדשים לשגיאות ידועות. המכשולים שזוהו, כמו רמות הביניים בהבנת משמעות כפל וחילוק בשבר, מספקים מידע על שלבים בתהליך של בניית ידע מחדש ועל מדרג קושי של בעיות מילוליות. בהבחנה בין בעיות מילוליות המחקר תרם לאפיון השדה המושגי הכפלי בשברים פשוטים.
3. היבט יישומי: כלי המחקר, דרכי הניתוח, הממצאים וההשלכות להוראה יכולים לשמש בהכשרת מורים, בפיתוח מקצועי ולכותבי ספרי לימוד. מאגר השאלות מהשאלון יכול לשמש גם לדיון בכיתה.

מגבלות המחקר והמלצות למחקר עתידי

מניתוח הממצאים למדנו כי אי אפשר להבין את תפיסות התלמידים על כפל שברים מבלי להבין את תפיסתם על חילוק שברים, וכי הכרחי לקיים מחקרים על שתי הפעולות יחד. במחקרים קודמים על כפל וחילוק מספרים רציונליים לא נמצא דיון על הקשר בין תפיסות שגויות של שתי הפעולות, למעט התפיסה בו בזמן של הכפל כמגדיל והחילוק כמקטין. אנו ממליצים להמשיך ולבצע מחקרים על שתי הפעולות יחד.

למחקר ישנן לפחות שתי המגבלות האלה, ועל פיהן נמליץ על מחקר עתידי:

1. בכל פריטי השאלון שהוצגו במאמר השתתפו מספר שלם ושבר קטן מ-1, כשהמספר השלם מתחלק במכנה של השבר. תיתכן לכך השפעה על התוצאות שקיבלנו. אומנם בזכות מגבלה זו נחשפנו לעוצמתה של תפיסה מסוימת, אך מומלץ לבדוק במחקר עתידי בעיות מילוליות ותרגילים עם מספרים נוספים, בשיטות חקירה וניתוח דומות.
2. הבעיות המילוליות משאלון המחקר הן בעיות פשוטות יחסית, וכאמור כבר בהן זיהינו את מאפייני הקושי להרחיב את משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים. עם זאת, השדה המושגי הכפלי כולל טווח רחב יותר של בעיות מילוליות, עם מבנים סמנטיים נוספים, ומן הראוי לחקור את ההשפעה של השבר הפשוט על אי ההבנה של כפל וחילוק גם בבעיות אלה. גם שם מומלץ לערוך השוואה בין הממצאים שיתקבלו לבין ממצאי מחקרים דומים על בעיות במספרים עשרוניים.

לסיכום נציג לפני הקוראים את השאלה להלן למחשבה, ואף למחקר, על נושאים אחרים במתמטיקה שיש בהם הרחבה של עולם המספרים: האם לאחר הרחבת הפעולות מתחום מספרי אחד למשנהו עלולה להיטשטש האבחנה ביניהן, כפי שמצאנו במחקר הנוכחי? למשל, במספרים מכוונים פותרים תרגילי חיסור בעזרת חיבור המספר הנגדי. האם התלמידים מבחינים בין חיבור לבין חיסור של מספרים מכוונים, ובאיזה מובן?

רשימת מקורות

חמו, פ' (2014). **הרחבת משמעות כפל וחילוק ממספרים שלמים לשברים פשוטים: אבחון תפיסות תלמידים ויישום לפדגוגיה** (עבודת דוקטור). האוניברסיטה העברית בירושלים.

חמו, פ', בוזגלו, מ' ואילני, ב"ש (2017). סקירת ספרי לימוד מונחית ממצאי מחקר על תפיסות של תלמידים: המקרה של כפל וחילוק שברים פשוטים בכיתה ו'. בתוך מ' איילון וג' עדין (עורכות), **כנס ירושלים החמישי למחקר בחינוך מתמטי: ספר הכנס** (עמ' 72-74). ירושלים: JCRME5.

Asiala, M. E., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, 1-32. doi:10.1090/cbmath/006/01

Barlow, A. T., & Drake, J. M. (2008). Division by a fraction: Assessing through problem writing. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(6), 326-332.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 129-147. doi:10.1007/BF00305893

Buzaglo, M. (2002). *The logic of concept expansion*. Cambridge: Cambridge University Press.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. An empirical test. *Learning and Instruction, 6*(3), 219-242. doi:10.1016/0959-4752(96)00004-7

Ekenstam, A., & Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 369-384. doi:10.1007/BF00368235

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Graeber, A. O., & Tanenhaus, E. (1993). Multiplication and division: From whole numbers to rational numbers. In D. T. Grouws (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grade mathematics* (pp. 99-117). New York: Macmillan.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45. doi:10.2307/749535

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.

Hamo, P., Ilany, B., & Buzaglo, M. (2018). Which is smaller…? Partial understandings and misconceptions about multiplication and division by fractions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the International Groups for the* learninstruc.2006.08.001

Prediger, S. (2008b). Discontinuities for mental models: A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. G. Alfonso, B. Gómez, & C. C. C. Litwin (Eds.), *Proceeding of ICME-11-Topic Study Group* (Vol. 10, pp. 29-45). Monterrey, Mexico: ICME-11.

Prediger, S. (2011). Why Johnny can't apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. International electronic *Journal of Mathematics Education, 6*(2), 65-88.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20*(1), 79-96. doi:10.1007/BF00356042.

Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. G. Alfonso, B. Gómez, & C. C. C. Litwin (Eds.), *Proceeding of ICME-11-Topic Study Group* (Vol. 10, pp. 125-130). Monterrey, Mexico: ICME-11.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., & van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (2nd ed., pp. 305-321). New York, USA: Routledge.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Psychology of Mathematics Education (PME 42) (Vol. 3, pp. 11-18). Umea, Sweden: PME.

Hardiman, P. T., & Mestre, J. P. (1989). Understanding multiplicative contexts involving fractions. *Journal of Educational Psychology, 81*(4), 547-557. doi:10.1037/0022-0663.81.4.547

Harel, G. (1995). From naive-interpretist to operation-conserver. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 143-164). New York: State University of New York Press.

Koichu, B., Harel, G., & Manaster, A. (2013). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problems posing in the context of division of fractions. *Instructional Science, 41*(4), 681-698. doi:10.1007/s11251-012-9254-1

Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education, 2*(1), 83-98.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 24-42. doi:10.1007/BF03217230

Osana, H. P., & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behaviour, 30*(4), 333-352. doi:10.1016/j.jmathb.2011.07.001

Prediger, S. (2008a). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3-17. doi:10.1016/j.