אבי סיגלר, שולה וייסמן ומשה סטופל

השימוש במשפטים ובנוסחאות שמוכרים פחות ככלי להשגת פתרונות אלגנטיים בגאומטריה אוקלידית

תקציר

היכולת להתמודד עם משימות למיניהן, מקצתן קשות או מורכבות, בגאומטריה אוקלידית, תלויה במידה רבה ב״ארגז הכלים המתמטי״ העומד לרשותו של התלמיד. ככל שהוא רחב יותר ועשיר יותר במשפטים ובנוסחאות שמוכרים פחות, גדלה במידה ניכרת יכולת ההתמודדות של התלמיד וסביר מאוד שהוא יצליח להשיג פתרונות אלגנטיים קצרים ויפים. להמחשת החשיבות של ״ארגז הכלים המתמטי״ מוצגות שבע משימות מעניינות בגאומטריה אוקלידית שלצורך ההתמודדות איתן זקוקים למשפטים ולנוסחאות שבדרך כלל אינם נמצאים במאגר הידע של התלמידים. לשש מהמשימות הוצגו יותר מפתרון אחד. בדרך כלל הפתרון שהוצג באמצעות משפט או נוסחה שאינם מוכרים, מפתיע, קצר ויפה מהפתרונות האחרים.

מילות מפתח: *השבחת הוראת גאומטריה; משפטים בגאומטריה שידועים פחות; פתרון משימות גאומטריה בדרכים מגוונות.*

הקדמה

פתרונות של בעיות הוכחה ובעיות חישוב בגאומטריה מחייבים הכרת תכונות יסוד של צורות גאומטריות, הכרת משפטים והכרת נוסחאות למיניהן. ככל ש״ארגז הכלים המתמטי״ של התלמיד רחב יותר והוא יודע להשתמש בו, יהיה לו קל יותר להתמודד עם משימות למיניהן. ב״ארגז הכלים המתמטי״ יש לכלול גם ידע בענפי המתמטיקה האחרים, כגון אלגברה, טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ועוד, כי ענפי המתמטיקה הם ענפים של ״עץ״ רחב שמשתלבים זה בזה. לעיתים קרובות אפשר לפתור בעיות גאומטריות בעזרת כלים של ענף מתמטיקה אחר, וכמובן להפך. האוסף העשיר של הכלים במתמטיקה מאפשר להתמודד עם בעיה מסוימת ולמצוא לה פתרון בדרכים מגוונות, כמה מהן קצרות ביותר ומפתיעות, ובכך הן מבליטות את היופי של המתמטיקה. די אם נציין שלהוכחת משפט פיתגורס נמצאו מאות הוכחות מגוונות, מקצתן קרובות זו לזו אך גם כאלו ששונות זו מזו במידה רבה.

לכל מדינה יש תוכנית הלימודים שלה ובתוכנית מפורטים נושאי הלימוד ורמותיהם, וכן מאגר משפטים ונוסחאות שעל התלמידים להכיר ושרק בהם יוכלו להשתמש להוכחה ולפתרון תרגילים. מצד אחר ישנם מקומות שמטפחים מאוד את לימודי המתמטיקה הן באמצעות

הגדלת מספר שעות הלימוד הפרונטלי והן באמצעות חוגי העשרה, חוגי חידות מתמטיות וחוגים המשלבים העשרה עם חקר מלווה בשימוש בטכנולוגיה ממוחשבת. במקומות אלה מעשירים את הידע של התלמידים במשפטי גאומטריה שמוכרים פחות: משפט שטיינר לטרפז, משפט תלמי למרובע, משפט ברייט-שניידר למרובע, שלא לדבר על משפטים אלה: סטיוארט, צ׳בה, מנלאוס, פסקל ואחרים, שעוסקים בכל מיני נוסחאות לחישוב גדלים בצורות גאומטריות מסוימות, וכן אי-שוויונים בין גדלים גאומטריים למיניהם. מידע על משפטים, נוסחאות ואי-שוויונים, שלרוב אינם מוכרים לתלמידי החינוך העל-יסודי ולרוב המורים שלהם, אפשר למצוא בספרי העשרה בגאומטריה ובמאמרים מסוימים (Coxeter & Greitzer, 1967; Grünbaum & Shepard, 1995; Smith, 1959). לדוגמה את ההוכחה לכך שאם במשולש שניים מחוצי הזוויות שלו שווים באורכיהם, אז המשולש הוא שווה שוקיים (נקרא משפט שטיינר-למוס, Beran, 1992; Parry, 1992). אפשר להוכיח באמצעות נוסחאות בשילוב מניפולציות אלגבריות.

מי שקיבל נושאי העשרה אלו ובקיא בהם, מסוגל להגיע לפתרונות מרהיבים ביופיים וקצרים בדרכם, משימות שמהתלמיד הרגיל ידרשו מאמץ וזמן רב. אכן, במאמרים למיניהם שהתפרסמו בשנים אחרונות, הודגשה החשיבות של יכולת ההוכחה או פתרון משימה באמצעות שימוש בכלים מגוונים או באינטגרציה של מספר כלים (Leikin, 2009; Levav-Waynberg & Leikin, 2009; Stupel & Ben-Chaim, 2013b).

כדי להראות עד כמה חשובה העשרת הידע, נציג שש משימות גאומטריות ולכל אחת מהן נציג שני פתרונות או יותר ואין לנו צל של ספק מי מהם ייבחר כפתרון העדיף והיפה יותר.

משימה 1: חישוב שטח משולש בדרכים מגוונות

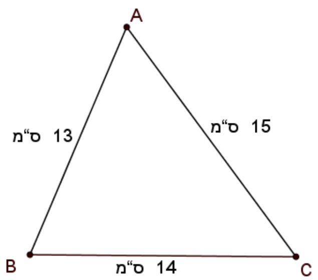
משימה זו פשוטה ואפשר לפתור אותה בכל מיני דרכים על פי הידע של התלמידים.

המושג שטח נלמד בגילים 11-10 ואחריו לומדים לחשב שטח של צורות גאומטריות פשוטות ובהן חישוב שטח משולש שהוא מחצית מכפלת אורך צלע באורך הגובה לצלע זו.

לתלמידים בגילים שונים זה מזה ניתנה משימה לחשב את שטחו של משולש שאורכי צלעותיו 13, 14 ו-15 ס״מ (ראו איור 1).

א. חישוב שטח המשולש על ידי תלמידים בני 13-10

בגילים אלו התלמידים יודעים להשתמש בסרגל מדידה ובמשולש ישר-זווית. בעזרת סרגל משולש הם מסרטטים את הגובה AD ובעזרת סרגל הם מודדים את אורכו ומחשבים את השטח. הדיוק של התוצאה מותנה בדיוק המדידות.



איור 1

ב. חישוב שטח המשולש על ידי תלמידים בני 15-14

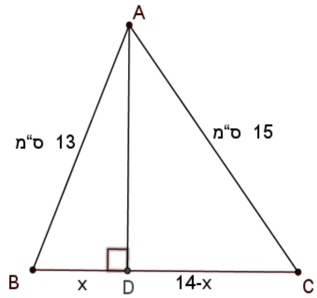
בגילים אלו התלמידים מכירים את משפט פיתגורס ויודעים לפתור משוואות ריבועיות. הם מסרטטים את הגובה AD ומסמנים:

BD = x ו-DC = 14 - x (ראו איור 2).

מתקבלות שתי משוואות ריבועיות:

$$\left.\begin{aligned}(AD)^2 &= 13^2 - x^2\\ (AD)^2 &= 15^2 - (14-x)^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow AD = 12\text{ס"מ}$$

מכאן מקבלים: S = 84 סמ"ר.



איור 2

ג. חישוב שטח המשולש על ידי תלמידים בני 16-18

תלמידים אלו יודעים טריגונומטריה ובעזרת משפט הקוסינוסים הם מוציאים את הגודל של אחת הזוויות ובעזרת הנוסחה S = 0.5·a·b·sinγ מוצאים את שטח המשולש.

ד. חישוב שטח המשולש באמצעות נוסחת הרון

נוסחת הרון לחישוב שטח משולש היא $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

כאשר a,b,c צלעות המשולש ו-p מחצית היקפו ($p = \dfrac{a+b+c}{2}$).

הנוסחה מאפשרת חישוב שטח המשולש לכל גיל של תלמידים שיודעים להציב בנוסחה ולחשב את הערך המספרי של הביטוי המתקבל. אין צורך במדידת גובה, בשימוש במשפט פיתגורס או במשפט הקוסינוסים.

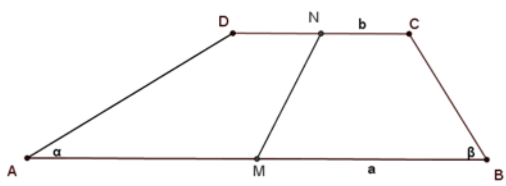
הצגת דרך ד באה להדגיש את העובדה שהכרת נוסחה אלגברית מאפשרת להגיע לערך השטח בדרך הקצרה ביותר.

הערה: כשנתון משולש במערכת צירים ויש לחשב את שטחו אז ברור שחישוב שטח המשולש בעזרת דטרמיננטה עדיפה על חישוב בדרך גאומטרית, או באמצעות גאומטריה אנליטית או בשילוב של גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה.

משימה 2: חישוב אורך הקטע המחבר את נקודות האמצע של בסיסי טרפז

נתון טרפז ABCD שסכום זוויות הבסיס שלו $\alpha + \beta = 90°$ ואורכי בסיסיו הם: $AB = a$ ו-$DC = b$ $a > b$ (ראו איור 3).

יש לבטא את אורך הקטע MN כאשר הנקודות M ו-N הן נקודות האמצע של הבסיס התחתון ושל הבסיס העליון בהתאמה.



איור 3

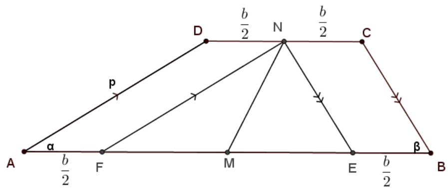
דרך א: גאומטריה עם בניית עזר

בונים $NF \parallel DA \; , \; NE \parallel CB$. נוצרו שתי מקביליות ADNF ו-NCBE כמתואר באיור 4.

מחישוב מתקבל $FE = a - b$.

משולש FNE הוא ישר זווית $\angle FNE = 90^\circ$,

NM הוא תיכון ליתר שלו לכן $MN = \dfrac{a-b}{2}$.



איור 4

המשפט ההפוך:

נתון טרפז ABCD שאורכי בסיסיו הם: $AB = a$ ו- $DC = b$. כמו כן נתון שאורך הקטע המחבר את נקודות האמצע של בסיסיו M ו-N הוא $MN = \dfrac{a-b}{2}$ כמתואר באיור 3. יש להוכיח שסכום הזוויות שליד הבסיס התחתון הוא $\alpha + \beta = 90^\circ$.

דרך א: גאומטריה

על פי הבנייה המתוארת בדרך א (איור 4 להלן) עם העברת המקבילים לשוקיים מתקבל $FM = ME = \dfrac{a-b}{2}$, ומאחר שנתון $MN = \dfrac{a-b}{2}$, הרי ש-MN הוא תיכון לצלע FE במשולש NFE ושווה למחצית אורכה ולכן המשולש הוא ישר זווית: $\angle FNE = 90^\circ$, לפיכך $\angle NFE + \angle NEF = 90^\circ$. מכאן לפי המקבילות של קווי העזר NF ו-NE לשוקי הטרפז נובע שסכום זוויות הבסיס שלו 90° .

דרך ב: בעזרת משפט שטיינר

על פי משפט שטיינר ולפי הסימון באיור 5 להלן מתקיים:

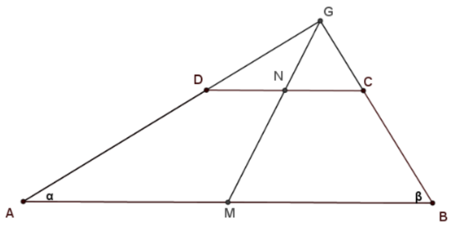
$GM - GN = \dfrac{a-b}{2}$ ו- $\dfrac{GN}{GM} = \dfrac{b}{a}$ (דמיון משולשים).

משני קשרים אלו מקבלים $GN = \dfrac{b}{2}$.

GN הוא תיכון לצלע DC במשולש GDC ושווה למחצית אורך הצלע DC ולכן $\angle CGD = 90^\circ$ ולכן סכום זוויות הבסיס של הטרפז הוא 90° .

דרך ב: גאומטריה עם משפט שטיינר

המשכי השוקיים נחתכים בנקודה G (ראו איור 5).



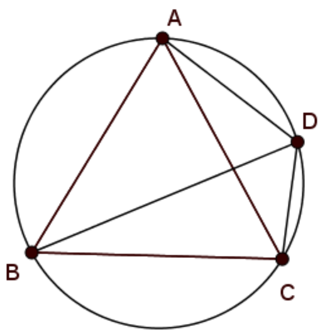
איור 5

על פי משפט שטיינר (Stupel & Ben-Chaim, 2013a): נקודות האמצע של בסיסי הטרפז, נקודת חיתוך אלכסוני הטרפז ונקודת חיתוך המשכי שוקיו נמצאים על קו ישר אחד. לכן,

$$GM=\frac{a}{2}\,,\;GN=\frac{b}{2}\quad\Rightarrow\quad MN=\frac{a-b}{2}\,.$$

משימה 3: תכונת שימור אורכי מיתרים

נתון משולש שווה צלעות ABC החסום במעגל, נעביר מיתר כלשהו BD, יש להוכיח כי $BD=AD+DC$ (ראו איור 6).



איור 6

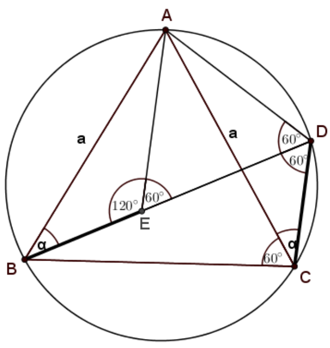
להדגמת התכונה של שימור סכום אורכי שני המיתרים לאורכו של המיתר השלישי הוכן יישומון ג׳אוג׳ברה שבו אפשר לגרור את הנקודה D על קשת המעגל ובכך לשנות את אורכי שלושת המיתרים. בכל שלב מופיעים על צג היישומון אורכי שלושת המיתרים וכן סכום אורכי המיתרים AD+DC.

אל היישומון אפשר להגיע באמצעות הקישור:

Link: https://www.geogebra.org/m/dwybrhe9

דרך א: גאומטריה בעזרת בניית עזר

על המיתר BD מסמנים נקודה E כך ש- $AD=DE$ (ראו איור 7). מסמנים: $\angle ABD=\alpha$ ונשתמש במשפט: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו. המשולש שמתקבל AED הוא משולש שווה צלעות (משולש שווה שוקיים בעל זווית ראש של $60°$). המשולשים ABE ו-ADC שווים בזווית α (זווית היקפית) והם בעלי זווית של $120°$ $(\angle AEB=ADC)$ ולכן שווים גם בזווית השלישית.



איור 7

כמו כן הם בעלי צלע שווה a, ולכן על סמך ז.צ.ז הם חופפים. מהחפיפה נובע $EB=DC$.

מכאן, $BD=DE+EB=AD+DC$.

דרך ב: טריגונומטריה – משפט הסינוס

שימוש במשפט הסינוס במשולש BDC נותן:

$$\frac{BD}{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}=\frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow BD=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)$$

$$\frac{DC}{\sin\left(60-\alpha\right)}=\frac{a}{\sin 60} \Rightarrow DC=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\left(60-\alpha\right)$$

שימוש במשפט הסינוס במשולש ADB נותן:

$$\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AD=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\alpha$$

מכאן,

$$AD+DC=\frac{2a}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(60^\circ-\alpha\right)+\sin\alpha\right]=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin 30^\circ\cos\left(30^\circ-\alpha\right)=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)=BD$$

דרך ג: טריגונומטריה – משפט הקוסינוס

שימוש במשפט הקוסינוס במשולש ADB נותן:

$$a^2=\left(AD\right)^2+\left(BD\right)^2-2AD\cdot BD\cos 60^\circ=\left(AD\right)^2+\left(BD\right)^2-AD\cdot BD$$

שימוש במשפט הקוסינוס במשולש ADC נותן:

$$a^2=\left(DC\right)^2+\left(BD\right)^2-2DC\cdot BD\cos 60^\circ=\left(DC\right)^2+\left(BD\right)^2-DC\cdot BD$$

חיסור שני הקשרים נותן:

$$0=\left(AD\right)^2-\left(DC\right)^2-BD\left(AD-DC\right)=\left(AD-DC\right)\left(AD+DC-BD\right)$$

אם $AD-DC=0$ אז $AD=DC$ ולכן $\angle ABD=\angle DBC=30^\circ$.

המשולשים BDC ו-BAC הם בעלי זוויות 90°, 60°, 30°, ולכן מתקיים

$$BD=2DC=2AD$$

או $BD=AD+DC$ מ.ש.ל.

אם $AD+DC-BD=0$ אז $BD=AD+DC$ מ.ש.ל.

בטרם תוצג דרך ד מוסיפים ל"ארגז הכלים" את משפט תלמי (פטולמיאוס) (Coxeter & Greitzer, 1967; Smith, 1956).

משפט תלמי (פטולמיאוס): בכל מרובע ABCD קיים $ac+bd\geq mn$ כאשר a,c זוג צלעות נגדיות, b,d הזוג השני של צלעות נגדיות ו-m,n אלכסוני המרובע. שוויון מתקיים כאשר המרובע ABCD הוא מרובע ציקלי (מרובע בר-חסימה במעגל).

דרך ד: שימוש במשפט תלמי

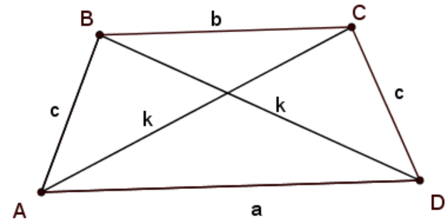
המרובע ABCD חסום במעגל, ולכן מתקיים

$$AB\cdot DC+AD\cdot BC=BD\cdot AC$$
$$\Downarrow$$
$$a\cdot DC+AD\cdot a=BD\cdot a$$
$$\Downarrow$$
$$DC+AD=BD$$

למשימה זו הוצגו ארבעה פתרונות בדרכים מגוונות. הקורא מוזמן לבחור את הפתרון הפשוט והיפה ביותר. סביר שיבחר בפתרון ד שאינו מחייב בניית עזר או ידע טריגונומטרי.

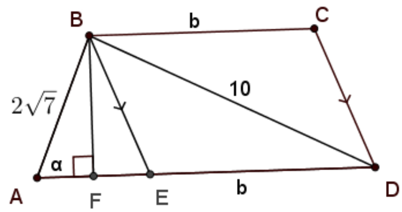
משימה 4: חישוב אורך בסיסו העליון של טרפז

נתון טרפז שווה שוקיים שאורך בסיסו $a=12$ ס"מ, אורך השוק $c=2\sqrt{7}$ ס"מ ואורך אלכסונו $k=10$ ס"מ, יש לחשב את בסיסו השני b (ראו איור 8).



איור 8

דרך א: שימוש בטריגונומטריה



איור 9

מסמנים: $\angle BAD=\alpha$. באמצעות שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש ΔBAD מקבלים $\cos\alpha=\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$. בונים מקביל $BE\parallel CD$ (ראו איור 9). נוצר משולש שווה שוקיים ΔBAE $\left(AB=BE\right)$.

במשולש זה בונים את הגובה BF ומקבלים $AF=\dfrac{a-b}{2}$.

בהצגת $\cos\alpha$ ממשולש ΔBAF מקבלים $\cos\alpha=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{\frac{a-b}{2}}{2\sqrt{7}}\Rightarrow a-b=6\Rightarrow b=6$

דרך ב: שימוש במשפט פיתגורס

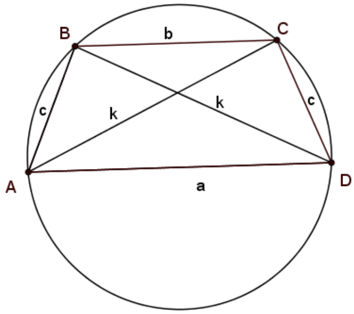
משיקולים שהוזכרו בדרך א מקבלים $FD=\dfrac{a+b}{2}$, $AF=\dfrac{a-b}{2}$.

על פי משפט פיתגורס במשולש ΔBAF מקבלים $\left(BF\right)^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$.

על פי משפט פיתגורס במשולש ΔBDF מקבלים $\left(BF\right)^2=10^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

מהשוואת שני הביטויים מקבלים $b=6$ ס"מ $\Rightarrow$ $ab=72$.

דרך ג: שימוש במשפט תלמי



איור 10

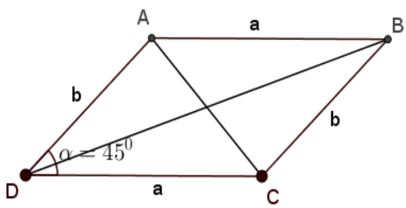
אפשר לחסום את הטרפז הנתון במעגל משום שהוא שווה שוקיים (ראו איור 10).

על פי משפט תלמי $c^2+ab=k^2$.

מכאן 6 ס"מ $=\dfrac{100-28}{12}=\dfrac{k^2-c^2}{a}=b$.

לא קשה לומר מהו הפתרון האלגנטי והפשוט ביותר מבין שלוש הדרכים שהוצגו.

משימה 5: קשר מתמטי בין צלעות מקבילית לאלכסוניה



איור 11

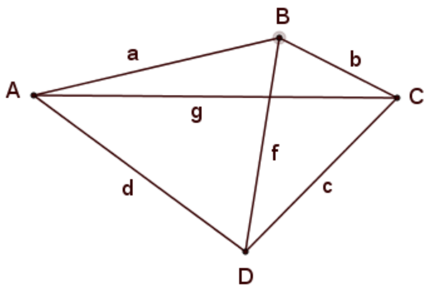
נתונה מקבילית ABCD בעלת זווית חדה בת 45°. יש להוכיח שמכפלת ריבועי האלכסונים שלה שווה לסכום החזקות הרביעיות של צלעות המקבילית.

כלומר יש להוכיח $(AC)^2\cdot(BD)^2=a^4+b^4$ (ראו איור 11).

דרך א: שימוש במשפט הקוסינוסים

$$(AC)^2=a^2+b^2-2ab\cos 45^\circ=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$$
$$(BD)^2=a^2+b^2-2ab\cos 135^\circ=a^2+b^2+\sqrt{2}ab$$
$$(AC)^2\cdot(BD)^2=\left(a^2+b^2-\sqrt{2}ab\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{2}ab\right)=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=a^4+b^4$$

דרך ב: שימוש במשפט ברייט-שניידר



איור 12

להעשרת ארגז הכלים המתמטי, יוצג משפט ברייט-שניידר (מוגילבסקי וסטופל, 2005).

לכל מרובע קמור שצלעותיו $a,\ b,\ c,\ d$, אלכסוניו $g,\ f$ ושתי זוויות נגדיות שלו הן $(\angle A\ ,\ \angle C)$ מתקיים, (ראו איור 12)

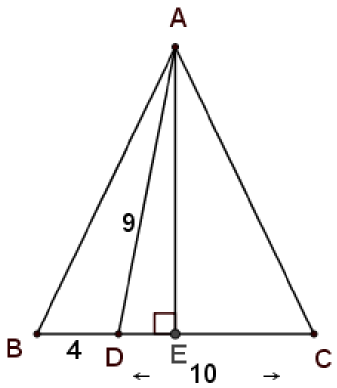
$$g^2f^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos\left(\angle A+\angle C\right)$$

הבעיה הנתונה היא מקרה פרטי של משפט ברייט-שניידר. כאן הצלעות הנגדיות שוות וסכום הזוויות הנגדיות הוא 90° ולכן מתקבל $g^2\cdot f^2=a^4+b^4$.

הערה: משפט תלמי הוא מקרה פרטי של משפט ברייט-שניידר עבור מרובע בר-חסימה (מרובע המקיים: $\angle A+\angle C=180^\circ$).

משימה 6: חישוב אורך השוק של משולש שווה שוקיים

נתון משולש שווה שוקיים ΔABC $(AB = AC)$.
D נקודה על הבסיס BC כך ש: $DC =$ 10 ס"מ , $BD =$ 4 ס"מ . כמו כן נתון ש- $AD =$ 9 ס"מ . יש למצוא את אורך השוק של המשולש (ראו איור 13).



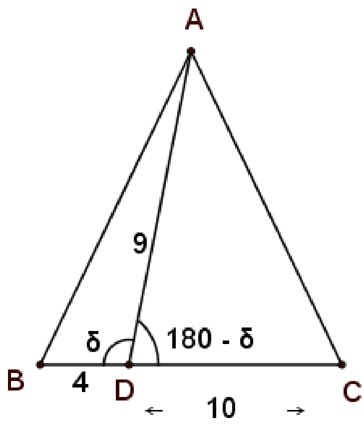
איור 13

דרך א: שימוש במשפט פיתגורס

בונים את הגובה AE לבסיס ומחשבים $DE =$ 3 ס"מ .

על פי משפט פיתגורס במשולש ΔADE מקבלים $AE =$ $\sqrt{72}$ ס"מ . על פי משפט פיתגורס במשולש ΔABE מקבלים $AB = AC =$ 11 ס"מ .

דרך ב: שימוש במשפט הקוסינוסים



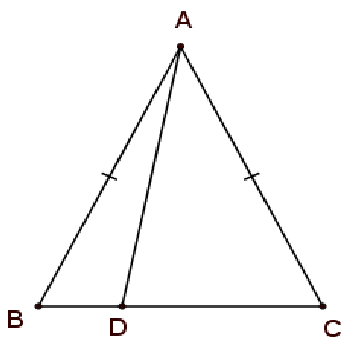
איור 14

נסמן $\angle ADB = \delta$ (ראו איור 14).
על פי משפט הקוסינוסים במשולשים ΔADC , ΔABD מקבלים:

$$(AB)^2 = 4^2 + 9^2 - 2\cdot 4\cdot 9\cos\delta$$
$$(AC)^2 = 10^2 + 9^2 - 2\cdot 10\cdot 9\cos(180-\delta) =$$
$$= 10^2 + 9^2 + 2\cdot 10\cdot 9\cos\delta$$

על ידי חילוץ $\cos\delta$ ממשוואה הראשונה והצבתו בשנייה מקבלים $AB =$ 11 ס"מ .

דרך ג: שימוש במשפט Hoehn (שהתגלה בשנת 2000)



איור 15

על פי משפט הויהן (Hoehn, 2011) למשולש שווה-שוקיים קיים: $(AB)^2 = (AD)^2 + BD\cdot DC$

כאשר AD קטע היוצא מזווית הראש אל הבסיס (ראו איור 15).

באמצעות הצבת הנתונים במשפט הנ"ל מקבלים

$$(AB)^2 = 9^2 + 4\cdot 10 = 121 \quad\Rightarrow\quad AB = \text{11 ס"מ}$$

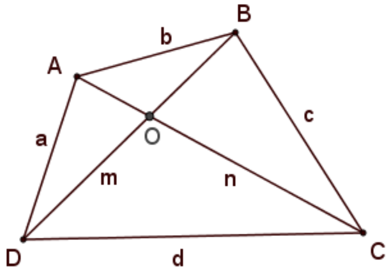
משפט זה מאפשר מציאה מיידית של אחד הגדלים אם נתונים שלושת הגדלים האחרים.

משימה 7: מרובע שמתפתחות בו שאלות

במשימה זו כדי לפתור את השאלות צריך בכל שלב לתגבר את מאגר המידע של הפותר.

נתון מרובע קמור שבו אורכי זוג צלעות נגדיות הם a ו-c. אורכי זוג הצלעות הנגדיות האחרות הם b ו-d ואורכי אלכסוניו m ו-n.

תהא O נקודת פגישת האלכסונים (ראו איור 16).



איור 16

שאלה א

יש להוכיח שאורכי הקטעים:

$a+c$, $b+d$ ו- $m+n$ מקיימים את אי-שוויון המשולש (סכום אורכי כל זוג צלעות גדול מאורך הצלע השלישית).

שלב 1: מוכיחים ש- $m+n > a+c$

$$\left.\begin{aligned} m &= DO+OB \\ n &= AO+OC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m+n = (DO+AO)+(OB+OC)$$

מאי-שוויון המשולש במשולש ΔAOD מקבלים $DO+AO>a$.

מאי-שוויון המשולש במשולש ΔBOC מקבלים $OB+OC>c$.

מכאן: $m+n > a+c$.

שלב 2: מוכיחים $m+n > b+d$ באותו אופן שהוכח שלב 1.

שלב 3: מוכיחים $(a+b)+(b+d) > (m+n)$.

מאי-שוויון המשולש במשולש ΔABD מקבלים $a+b>m$.

מאי-שוויון המשולש במשולש ΔBCD מקבלים $c+d>m$.

מכאן: $a+b+c+d > 2m$. מאי-שוויון המשולש במשולש ΔABC מקבלים $b+c>n$.

מאי-שוויון המשולש במשולש ΔABC מקבלים $a+d>n$.

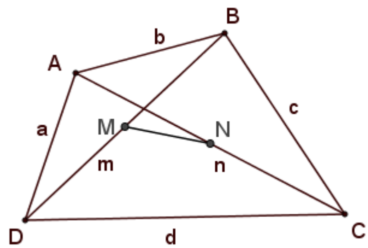
מכאן, $a+b+c+d > 2n$. ומכאן נובע:

$$2(a+b)+2(b+d) > 2(m+n)$$
$$\Downarrow$$
$$(a+b)+(b+d) > (m+n)$$

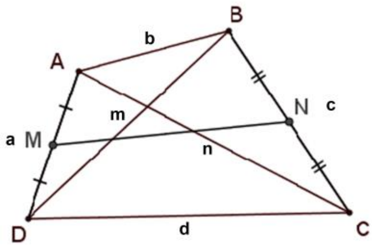
לפני הצגת שאלות ב ו-ג יוספו ל"ארגז הכלים המתמטי" שני משפטים: משפט אוילר המוכלל למרובע ומשפט הקוסינוסים למרובע.

משפט אוילר המוכלל למרובע

תהיינה M ו-N נקודות האמצע של האלכסונים BD ו-AC בהתאמה (כנראה באיור 17 א), ונקודות האמצע של צלעות נגדיות כנראה באיורים 17 ב-ג, הדרושים לרישום הקשרים בין אורכי צלעות המרובע, אורכי אלכסוניו והמרחק בין נקודות האמצע M ו-N, על פי משפט אוילר המוכלל למרובע (Hoehn, 2011; Kandall, 2002).



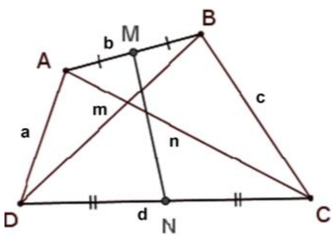
איור 17 א



איור 17 ב

לפי המשפט קיימים הקשרים 3-1:

1. $\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)=m^2+n^2+4\left(MN\right)^2$ (איור 17 א)
2. $\left(b^2+d^2\right)+\left(m^2+n^2\right)=a^2+c^2+4\left(MN\right)^2$ (איור 17 ב)
3. $\left(a^2+c^2\right)+\left(m^2+n^2\right)=b^2+d^2+4\left(MN\right)^2$ (איור 17 ג)

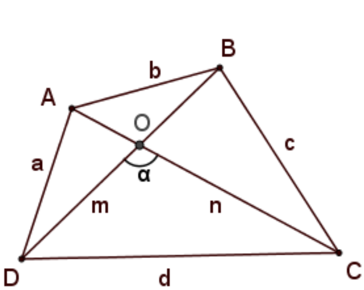


איור 17 ג

משפט הקוסינוסים למרובע:

$\left(a^2+c^2\right)-\left(b^2+d^2\right)=2mn\cos\alpha$ כאשר הזווית α היא הזווית בין האלכסונים (ראו איור 18).

הערה: תלמיד שמכיר את משפט הקוסינוסים במשולש ואת הזהות $\cos\alpha=-\cos\left(180°-\alpha\right)$ יוכל להוכיח בקלות את משפט הקוסינוסים למרובע.



איור 18

שאלה ב

בהינתן אותם הנתונים יש להוכיח שהקטעים שאורכיהם $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+d^2}$, $\sqrt{m^2+n^2}$ יוצרים משולש חד-זוויות.

ברור שאורכי קטעים אלו מקיימים את אי-השוויון של המשולש ונשאר להוכיח שזוויותיו קטנות מ-$90°$.

משלושת הקשרים של משפט אוילר המוכלל למרובע נובעים האי-שוויונים האלה:

$$1.\ \left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{b^2+d^2}\right)^2-\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2>0$$
$$2.\ \left(\sqrt{b^2+d^2}\right)^2+\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2-\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2>0$$
$$3.\ \left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2-\left(\sqrt{b^2+d^2}\right)^2>0$$

כל אחד משלושת האי-שוויונים מבטא את קוסינוס של אחת מזוויות המשולש ומאחר שכל אחד מהביטויים הוא חיובי הרי שכל הזוויות של המשולש חדות.

הערה 1: הקטעים יוצרים משולש חד-זוויות להוציא את המקרה שהמרובע ABCD הוא מקבילית (ריבוע, מלבן, מעוין) שאז נוצר משולש ישר זווית משום שאורך הקטע שבין נקודות האמצע של האלכסונים הוא MN=0.

הערה 2: את השאלה אפשר להוכיח גם בעזרת משפט הקוסינוסים למרובע.

שאלה ג

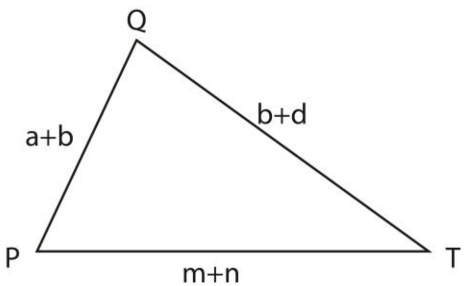
יש להוכיח כי $a+c$, $b+d$, $m+n$ יוצרים משולש חד-זוויות.

הוכחה: על פי נוסחת אוילר: $\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)>m^2+n^2$

על פי משפט תלמי $2ac+2bd\geq 2mn$

באמצעות צירוף שני האי-שוויונים מקבלים $(a+c)^2+(b+d)^2>(m+n)^2$

אבל בשאלה א הוכחנו ש-$m+n>a+c$ ו-$m+n>b+d$.



איור 19

כלומר $m+n$ היא הצלע הארוכה ביותר במשולש ומולה נמצאת הזווית הגדולה ביותר $\angle PQT$ (כנראה באיור 19).

ולכן $(a+c)^2+(b+d)^2-(m+n)^2>0$, ומכאן על פי משפט הקוסינוסים למשולש ΔPQT , $\cos\angle PQT>0$, כלומר הזווית הגדולה ביותר במשולש היא זווית חדה.

סיכום

הוצגו שבע משימות הדגמה לחשיבות ולתרומה הרבה של הכרת משפטים ונוסחאות ידועים פחות, שהשימוש בהם להוכחה ופתרון משימות בגאומטריה אוקלידית מאפשר להתמודד איתן ביתר קלות ולקבל הוכחות ופתרונות אלגנטיים יפים וקצרים.

רשימת מקורות

מוגילבסקי, ר׳ וסטופל, מ׳ (2005). משפטים שנשכחו בהנדסת מישור והדגמת השימוש בהם לפתרון בעיות. **שאנן, י**, 231-252.

Beran, D. (1992). SSA and the Steiner-Lehmus Theorem. *The Mathematics Teacher, 85*(5), 381- 383.

Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Grünbaum, B., & Shepard, G. C. (1995). Ceva, Menelaus, and the area principle. *Mathematics Magazine, 68*(4), 254-268. doi:10.1080/0025570X.1995.11996330

Hoehn, L. (2000). 84.03 A neglected Pythagorean-like formula. *The Mathematical Gazette, 84*(499), 71-73. doi:10.2307/3621478

Kandall, G. A. (2002). Euler's theorem for generalized quadrilaterals. *The College Mathematics Journal, 33*(5), 403-404. doi:10.2307/1559015

Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hana, & M. De Villiers (Eds.), *The proceeding of the 19th ICMI Study conference: Proofs and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 31-36). Taiwan: National Taipei University.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth conference of the European society for research in mathematics education – CERME-6 Working Group 5: Geometrical thinking* (pp. 776-785). Lyon, France: INRP.

Parry, C. F. (1992). A variation on the Steiner-Lehmus theorem. *The Mathematical Gazette, 62*(420), 89-94. doi:10.2307/3617662

Smith, D. E. (1959). *A source book in mathematics*. New York: Dover Publications.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013a). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezoids-Geometric constructions using straightedge alone. *The Australian Senior Mathematics Journal, 27*(2), 6-24.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013b). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *The Far East Journal of Mathematical Education, 11*(2), 129-161.