יצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות בהוראת המתמטיקה והשימוש בהן אצל פרחי ההוראה

אסמעיל אלמחדי

אסמעיל אלמחדי
מורה למתמטיקה ומדריך פדגוגי למתמטיקה, מכללת קיי, באר-שבע.

תקציר

עניינו של מאמר זה הוא יצירת דוגמאות למושג מתמטי. אפשר ליצור דוגמאות משני סוגים עיקריים: דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. תכלית הדוגמאות הנגדיות להפריך טענות מתמטיות שגויות, ותכלית אי- הדוגמאות להבהיר מהי תכונה חיונית ומהי תכונה שאינה חיונית למושג מסוים. במאמר זה יוצגו ממצאי מחקר התערבות שבו נבדקה היכולת של פרחי ההוראה ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות לאחר חשיפה רלוונטית לנושא. ממצאי המחקר הראו שלמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות אינה משפרת בהכרח את היכולת של פרחי ההוראה ליצור דוגמאות נגדיות, ואילו חשיפה ללמידה באמצעות אי-דוגמאות משפרת את יכולתם ליצור אי-הדוגמאות.

מילות מפתח: הכשרת מורים; הוראת מתמטיקה; דוגמאות נגדיות; אי-דוגמאות.

מבוא

בעשור האחרון התמקדו מחקרים רבים בתחום הוראת המתמטיקה בשימושים האפשריים של דוגמאות ותרומתן (Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002; Ko & Kunth, 2013; Potari, Zachariades, & Zaslavsky, 2009; Leung, & Lew, 2013; Zodik & Zaslavsky, 2008), ונמצא שלדוגמאות תפקיד חשוב ומרכזי בהוראת המתמטיקה, הן בתהליכי ההצדקה וההנמקה והן בתהליכי ההסבר והשכנוע. אי-דוגמה היא דוגמה מסוג מסוים ותכליתה להקל על הלומדים ליצור מושג מתמטי (Tsamir & Tirosh & Levenson, 2008). על אף חשיבותו נושא השימוש באי-דוגמה בהוראת מתמטיקה נחקר מעט.

בהוראת מתמטיקה מומלץ לשלב דוגמאות ואי-דוגמאות בלמידה כדי להסב את תשומת הלב של הלומדים לתכונות הרלוונטיות של המושג המתמטי הנלמד (Bills et al., 2006). שילוב דוגמאות ואי-דוגמאות יכול לעזור ללומדים ליצור רעיונות או תובנות בתהליך בניית הוכחה מתמטית, ואכן נמצא ששילוב מערכות של דוגמאות ואי-דוגמאות בלמידה מעמיק אצל הלומדים את הבנת המושגים המתמטיים והגדרותיהם (Salam & Dost, 2016). זאת ועוד,

בהוראת מתמטיקה מורים צריכים להיות מסוגלים להפריך טענות מתמטיות שגויות שהתלמידים מעלים בשיעור. לעיתים התלמידים עושים הכללות בלתי תקפות ושגויות, ואחת הדרכים להתמודד עם הכללות אלה היא לספק להם דוגמה נגדית (Yopp, 2015). ברם, נמצא שמורים רבים למתמטיקה אינם נותנים דעתם על הדוגמאות בדרך מפורשת מושכלת (Zadik & Zaslavsky, 2008), ולדעת חוקרים רבים, יצירת דוגמאות בכלל ודוגמאות נגדיות בפרט בהוראת המתמטיקה היא פעילות מורכבת בשביל מורים, מתכשרים להוראה ותלמידים (Ko & Kunth, 2009; Potari et al., 2009).

בשל חשיבות השימוש בדוגמאות בהוראת מתמטיקה, מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את היכולת של המתכשרים להוראה, לפני כניסתם להוראה בבתי הספר, ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. זאת ועוד, במחקר הזה תיבחן השאלה באיזו מידה מעוררת החשיפה של פרחי הוראה למתמטיקה ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות ובאי-דוגמאות את היכולת שלהם ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות.

רקע תאורטי

מהי דוגמה מתמטית?

דוגמה היא מקרה פרטי מתוך אוסף מקרים רחב וממנה אפשר להסיק מסקנות מתמטיות. על פי גולדנברג ומייסון (Goldenberg & Mason, 2008), דוגמה היא מקרה פרטי שבו משתקף דבר מה כללי. במתמטיקה המושג "דוגמה" הוא כל דבר המשמש אמצעי להכללה, להדגמת מושגים ועקרונות מתמטיים וליישום פרוצדורות (Watson & Mason, 2005).

בשל חשיבות השימוש בדוגמאות בהוראת מתמטיקה, מטרת המחקר הנוכחי לבדוק את היכולת של המתכשרים להוראה, לפני כניסתם להוראה בבתי הספר, ליצור דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות.

דוגמאות משמשות בכל סיטואציה שבה דבר ספציפי מוצע כמייצג משהו כללי ושאליו רוצים להפנות את תשומת הלב של הלומדים. למשל, הפונקציה $f(x)= x^2+2x+1$ יכולה להיות:

א. דוגמה לפונקציה ריבועית שיש לה רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-X.

ב. אי-דוגמה לפונקציה זוגית.

ג. דוגמה נגדית לטענה: אם לפונקציה ריבועית יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-X, אז לפונקציה יש נקודת מקסימום.

לדוגמאות במתמטיקה יש חשיבות רבה בהבנה רעיונות מתמטיים, הערכתם ופתרון בעיות מתמטיות (Bills et al., 2006). כאשר מתמטיקאים נתקלים בטענה שאינם מסוגלים להפריך או להוכיח, בדרך כלל הם ישתמשו בדוגמה כדי לבדוק את הטענה. נוסף על כך, לדוגמאות תפקיד בניבוי השערות, כי השערה נוצרת באמצעות בחינת דוגמאות.

במתמטיקה יש דוגמאות מגוונות: דוגמה של מושג, למשל, מספר מושלם; דוגמה של יישום, למשל, מצא מספר המתחלק ב-6 (Bills et al., 2006). ברם, קיימת עוד הבחנה נוספת בין שני סוגי דוגמאות: דוגמה נגדית (counter example) ואי-דוגמה (non example). דוגמה נגדית היא דוגמה המראה שטענה מסוימת אינה נכונה (Antonini, 2003), ואילו אי-דוגמה מבהירה את גבול המושג (Bills et al., 2006). מבחינת המשמעות יש קרבה רבה בין דוגמה נגדית ובין אי-דוגמה, המתמטיקה אין הבדל מהותי בין דוגמה נגדית ובין אי-דוגמה (Rissland, 1991).

ינון ועמיתיו (Iannone, Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, & Weber, 2011) חקרו את ההשפעה של יצירת דוגמאות על היכולת לבנות הוכחה מתמטית בקרב סטודנטים לתואר ראשון במתמטיקה. הם הופתעו לגלות שליצירת דוגמאות לא הייתה השפעה חיובית על היכולת ליצירת הוכחה מתמטית. במחקרם הדגישו החוקרים את המורכבות הכרוכה ביצירת דוגמאות.

דוגמה נגדית

המושג דוגמה נגדית עוסק במבנה הטענה המתמטית. דוגמה נגדית מנוסחת כמשפט תנאי: אם A אז B. כאשר A ו-B הם פסוקים, A הוא תנאי הטענה ו-B הוא תוצאות הטענה. דוגמה נגדית היא דוגמה שעבורה מתקיים תנאי הטענה (A), אך תוצאת הטענה (B) אינה מתקיימת. מיצ'נר (Michener, 1978) הגדיר דוגמאות נגדיות מנקודת מבט תפקודי. לדידו, דוגמאות נגדיות הן כלים העוזרים להפריך הצהרת שווא. על פי ההגדרה של אנטוניני (Antonini, 2003), דוגמאות נגדיות הן דוגמאות הסותרות את הטענה המתמטית; הן אמצעי חשוב בתקשורת מתמטית ועוזרות בקבלת השערות ובהפרכתן, יש להן תפקיד חשוב בתחום המתמטיקה, כיוון שבאמצעותן אפשר להמחיש מדוע טענה מתמטית מסוימת שגויה. השימוש בדוגמאות הוא פעולה יסודית במתמטיקה מתקדמת (Ko & Knuth, 2009). מבחינה לוגית, די בדוגמה נגדית אחת המראה מצב שבו תנאי הטענה מתקיים והתוצאה אינה מתקיימת כדי להפריך את הטענה המתמטית. למשל, דוגמה נגדית לטענה: "כל ריבוע של מספר חיובי גדול מהמספר עצמו" יכולה להיות המספר 0.9, כי הריבוע שלו קטן מ-0.9, דבר הסותר את הטענה.

במחקר של קו וקנות' (Ko & Knuth, 2009) בדקו החוקרים את מידת יכולתם של 16 סטודנטים לתואר ראשון במתמטיקה, הלומדים קורסי אלגברה, אנליזה וגאומטרייה, לקבוע את תוקפן של טענות מתמטיות. ממצאי מחקר הראו שלסטודנטים אין מספיק ידע כדי לקבוע את תוקפן של הטענות המתמטיות.

ווטסון ושיפמן (Watson & Shipman, 2008) ציינו יתרונות לימודיים של יצירת דוגמאות בידי התלמידים. הם טענו שיצירת דוגמאות היא פעילות קוגניטיבית מורכבת הדורשת הבנה של קשרים בין מושגים, לעיתים תהליך זה מלווה בזיהוי הבנות ומשמעויות חדשות. באמצעות בניית דוגמאות הלומדים מפתחים מודעות לממדים האחרים של הדוגמה, למשל ממדים הניתנים לשינוי, דבר העשוי לתרום להרחבת מרחב הדוגמאות האישי שלהם והעשרתו. עוד נמצא שתלמידים משקיעים זמן רב יותר בלמידה מדוגמאות, ולכן כשהם לומדים מדוגמאות קיים סיכוי טוב יותר ללמוד את המושגים המתמטיים היטב.

אי-דוגמה

אי-דוגמה היא דוגמה שאינה תומכת בטענה ואינה סותרת אותה. השימוש באי-דוגמה נועד להבהיר מהי תכונה חיונית ומהי תכונה שאינה חיונית למושג מסוים. למשל, המספר 6 הוא אי-דוגמה לטענה: "מספר ראשוני הוא מספר טבעי המתחלק ללא שארית

בדיוק בשני מספרים", כיוון שהמספר 6 מתחלק ביותר משני מספרים. זסקיס ולייקן (Zazkis & Leikin, 2007) סברו שאי-דוגמאות רלוונטיות להבנת מושגים והגדרות ותפקידן לבדוק אילוצים או תנאים להגדרה ולחקור אותם, ולדעת ווטסון ומייסון (Watson & Mason, 2002), השימוש באי-דוגמאות טוב במיוחד ללימוד מושגים קשים.

במחקרן של צמיר, תירוש ולוינסון (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008) השתתפו 65 תלמידים בני 6. הם התבקשו למיין צורות גאומטריות למשולשים וללא משולשים ולנמק את תשובותיהם. החוקרות דיווחו כי תלמידים זיהו אי-דוגמאות של משולשים במידה רבה יותר מדוגמאות למשולשים.

קשיים של לומדים ביצירת דוגמאות

אף על פי שאנשי חינוך והוראת מתמטיקה מעניקים חשיבות רבה לדוגמאות במתמטיקה, חוקרים רבים דיווחו על הקשיים של התלמידים, של המורים ושל המתכשרים להוראת מתמטיקה ביצירת דוגמאות ושימוש בהן (Bills et al., 2006; Peled & Zaslavsky, 1996 ; Ko & Kunth, 2009). לקשיים אלה כמה סיבות: קושי הנובע מהיבטים לוגיים של שימוש בדוגמאות, למשל דוגמה נגדית המפריכה טענה מתמטית; קושי הנובע מאי הבנת משמעות הדוגמה המוצגת; קושי הנובע משימוש בדוגמאות לצורך הוכחות (Iannone et al., 2011); קושי הנובע מתהליך יצירת הדוגמאות אצל התלמידים, ואי הבנת תנאים שצריכים לקיים דוגמה מסוימת או קושי ביצירת דוגמה, על אף שקיימת הבנת תנאים שהדוגמה צריכה לקיים. זאת ועוד, לפעמים הלומדים נוטים להיתפס למאפיינים ספציפיים של דוגמה מבלי לראות את הכלליות שבה. שימוש חוזר באותן דוגמאות ספציפיות עלול ליצור תפיסות מוטעות אצל הלומדים (Bills et al., 2006), ויותר מכך תלמידים יכולים להסיק הכללות שגויות מאוסף של דוגמאות, במיוחד כאשר ההכללות שהדוגמאות מייצגות אינן זוכות לעיון מפורש, או כשהדוגמאות אינן מספקות את התנאים הדרושים להבנת המושגים, או כשהדוגמאות לא מתאימות. אנטוניני (Antonini, 2011) ציין שרכיב חשוב המשפיע על ייצור דוגמאות הוא היכולת של התלמידים ליצור דוגמאות ואמונתם בקיום דוגמאות העונות על תנאים הנדרשים. חשוב להזכיר שתהליך יצירת דוגמאות הוא תהליך מורכב המביא בחשבון שיקולים מתמטיים ולוגיים כאחד. חשיבה לוגית דדוקטיבית או חשיבה אנלוגית אינן מתפתחות מעצמן ללא תמיכה יזומה של אנשי החינוך וההוראה (Bills et al., 2006).

מטרת המאמר הנוכחי לבדוק את יכולתם של פרחי הוראה ליצור דוגמאות נגדיות לטענות מתמטיות שגויות וליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות. פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר נחשפו ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות ובאי-דוגמאות במשך שלושה חודשים רצופים, פעם בשבוע, במשך כ-10 דקות מהשיעור, כדי לתת להם להתנסות ביצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. לאחר החשיפה הזו נבדקה היכולת של פרחי ההוראה ביצירת דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. במחקר זה בדקתי האם לאחר החשיפה הזו יכולתם של פרחי ההוראה ביצירת דוגמאות ואי-דוגמאות השתפרה, ואם יכולתם השתפרה, מהו סוג הדוגמאות – דוגמה נגדית או אי-דוגמה – שבו ניכר השיפור הזה.

שאלות המחקר

1. באיזו מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות משפיעה על יכולתם להפריך טענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי דוגמאות נגדיות?
2. באיזו מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת באי-דוגמאות משפיעה על יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי אי-דוגמאות?

שיטה

נבדקים

במחקר השתתפו פרחי הוראה המתמחים בהוראת המתמטיקה בשלב החינוך העל-יסודי, הלומדים בשנים ב' ו-ג' באחת ממכללות החינוך בישראל. במחקר היו שתי קבוצות: קבוצת ניסוי שבה היו 16 סטודנטים וקבוצת ביקורת שבה היו 30 סטודנטים. סך הכול 46 סטודנטים השתתפו במחקר וענו על שאלון א שהועבר בתחילת המחקר ועל שאלון ב שהועבר בסוף המחקר. השוני במספר המשתתפים בשתי הקבוצות נובע מכך שרק 16 סטודנטים הסכימו להשתתף במחקר מיוזמתם במשך שלושה חודשים. למחקר הנוכחי נבחרו משתתפי המחקר האלה, משום שבמהלך לימודיהם הם נחשפים בכל מיני קורסים בתחום המתמטיקה לשיטות הוראה מגוונות ויש מקום להניח שהם מכירים את המושגים דוגמה נגדית ואי-דוגמה. בקבוצת הניסוי היו מתכשרים להוראה מהמגזר הערבי בלבד ושפת האם שלהם היא ערבית. בקבוצת הביקורת היו מתכשרים להוראה משני מגזרים: מגזר ערבי ומגזר יהודי. המתכשרים משני מגזרים אלה לומדים יחד את רוב הקורסים בהתמחות מתמטיקה, ושפת ההוראה הרשמית בקורסים אלה היא עברית.

כלי המחקר

לצורך המחקר השתמשתי בשלושה כלי מחקר עיקריים: יחידת לימוד, ראיונות מובנים למחצה ושאלונים. יחידת הלימוד כללה סדרת פעילויות בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות. בכל שבוע סיפק החוקר דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות למשתתפי המחקר כדי לחשוף את משתתפי המחקר לחשיפה ממוקדת לשני סוגי הדוגמאות.

ראיונות מובנים למחצה נעשו עם חמישה סטודנטים מקבוצת הניסוי ועם חמישה סטודנטים מקבוצת הביקורת. החוקר בעצמו ראיין את כל הראיונות מקבוצת הניסוי ומקבוצת הביקורת. כל ריאיון נעשה בנפרד עם כל אחד מפרחי ההוראה ונמשך 35-30 דקות.

למחקר זה נוסחו שני שאלונים: שאלון מקדים (pre test) ושאלון מסכם (post test). השאלונים היו כתובים בעברית, כיוון שהשפה הרשמית שבה לומדים פרחי ההוראה את כל הקורסים בהתמחות היא עברית. השאלונים היו בעלי מבנה אחיד וכללו מספר זהה של שאלות לבדיקת כל קטגוריה. בשני השאלונים הופיעו שאלות שניסח החוקר ושאלות שנלקחו מספרות המחקר.

מטרת השאלון המקדים הייתה לראות אם יש הבדל או אין הבדל בין שתי הקבוצות – קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת – ובקבוצת הניסוי להשוות בין השאלון המקדים ובין השאלון המסכם, כדי לבדוק האם יחידת הלימוד בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות השפיעה על משתתפי המחקר.

בכל שאלון היו שני חלקים: חלק א כלל 10 טענות מתמטיות, 2 טענות נכונות ו-8 טענות שגויות. בחלק ב שתי טענות: לטענה הראשונה היו שלושה סעיפים ובכל סעיף נדרש המשתתף לסמן את התשובה הנכונה, ולטענה השנייה היו שני סעיפים שבהם נדרש המשתתף לתת דוגמה או דוגמה נגדית. משך זמן מילוי כל שאלון בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת היה כשעה אחת. להלן לוח 1 שבו מתוארים חלקי השאלון המקדים והשאלון המסכם.

לוח 1: מבנה שאלון המחקר וחלקיו

חלק	טענה	נתון	מטלה	המטרה
א	1 עד 10	10 טענות מתמטיות, מתוכן, 8 שגויות ו-2 נכונות	לסמן נכון או לא נכון להוכיח את הטענה או להפריך אותה באמצעות דוגמה נגדית	1. להעריך את מידת הצלחת פרחי הוראה בקביעת ערך האמת של טענה מתמטית 2. להעריך את מידת ההצלחה של פרחי הוראה ביצירת דוגמאות נגדיות 3. לזהות אם פרחי הוראה מספקים דוגמאות נכונות לטענה נכונה 4. לבדוק אם פרחי הוראה מספקים דוגמאות במקום דוגמאות נגדיות לטענות שגויות
ב	סעיפים 1, 2	טענה שבה יש צורך לבחור את התשובה הנכונה	1. בשאלה 1 צריך לסמן את התשובה הנכונה בשלושת הסעיפים 2. בשאלה 2 יש להדגים באמצעות דוגמה המקיימת את הטענה ובאמצעות דוגמה הסותרת את הטענה	1. לבדוק מה מידת הצלחת פרחי הוראה לספק אי-דוגמה לטענה 2. לבדוק מה מידת הצלחת פרחי הוראה לספק דוגמה המקיימת את הטענה ודוגמה הסותרת את הטענה

ניתוח נתונים

במחקר הזה נאספו נתונים באמצעות שאלונים (שאלון מקדים ושאלון מסכם) ובאמצעות ראיונות אישיים מובנים למחצה עם סטודנטים מקבוצת הניסוי ומקבוצת הביקורת. להלן אתאר כיצד נותחו הנתונים שנאספו באמצעות כלים אלה.

ניתוח השאלונים

בשני השאלונים היה צורך לקבוע "נכון" או "לא נכון" ולנמק וגם לסמן את התשובה הנכונה. מסיבה זו התוצאות שהתקבלו נותחו בשתי דרכים: ניתוח כמותני וניתוח איכותני. התשובות בחלק א מוינו לכמה קטגוריות המראות את מידת הצלחתם של משתתפי המחקר לספק דוגמאות נגדיות לפי השאלות האלה:

1. האם פרח ההוראה קבע שהטענה שגויה?
2. האם פרח ההוראה סיפק דוגמה נגדית?
3. האם הדוגמה הנגדית נכונה?

ניתוח כמותני

1. חישוב שכיחויות למספר התשובות הנכונות לקביעת נכונות כל טענה.
2. חישוב שכיחויות הנימוקים הנכונים לכל טענה אצל פרחי ההוראה.

מבחנים סטטיסטיים לבדיקת הפרש תוחלת מדגמים בלתי תלויים, לצורך בדיקת שינויים אצל קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת. כל ההשוואות הסטטיסטיות נבדקו ברמת מובהקות 5%.

ניתוח איכותני

במהלך הראיונות היה דיון על נימוקים ותשובות מתוך השאלונים שנאספו:

1. הנימוקים שנגעו לשאלות על מתן דוגמה נגדית נאספו מכל השאלונים.
2. נימוקים נגעו לשאלות על היכולת ליצור אי-דוגמאות לטענה.

הליך המחקר

כדי לענות על שאלה מס' 1 (באיזו מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות משפיעה על יכולתם להפריך טענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי דוגמאות נגדיות?) חשפנו את קבוצת הניסוי להוראה ממוקדת בדוגמאות נגדיות, ואילו קבוצת הביקורת למדה שיעור רגיל ללא חשיפה ממוקדת לדוגמאות נגדיות. חשיפת קבוצת הניסוי נמשכה שלושה חודשים, פעם בשבוע במשך כ-10 דקות ניתנה טענה, והיא הופרכה באמצעות דוגמאות נגדיות. בתום תקופת החשיפה מילאו משתתפי המחקר, הן קבוצת הניסוי והן קבוצת הביקורת, שאלון מסכם שהותאם למבנה השאלון המקדים. לאחר מילוי השאלונים נותחו סטטיסטית הנתונים שנאספו כדי לבדוק האם קיימים הבדלים בין יכולות משתתפי קבוצת הניסוי ובין יכולות משתתפי קבוצת הביקורת. כמו כן בתום הניסוי (תקופת החשיפה שנמשכה שלושה חודשים) התקיימו ראיונות עם חמישה פרחי הוראה שהיו בקבוצת הניסוי כדי לדעת מהן עמדותיהם כלפי נושא דוגמאות נגדיות.

כדי לענות על שאלה מס' 2 (באיזה מידה חשיפת פרחי הוראה לסביבת למידה ממוקדת באי-דוגמאות משפיעה על יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות, ומהן עמדותיהם כלפי אי-דוגמאות?) חשפנו את קבוצת הניסוי להוראה ממוקדת באי-דוגמאות, ואילו קבוצת הביקורת למדה שיעור רגיל ללא חשיפה ממוקדת לאי-דוגמאות. חשיפת קבוצת הניסוי נמשכה שלושה חודשים, פעם בשבוע במשך כ-10 דקות ניתנו למתכשרים בקבוצת הניסוי טענות והגדרות מתמטיות באמצעות דוגמאות תומכות ואי-דוגמאות. בתום תקופת החשיפה מילאו משתתפי המחקר, הן בקבוצת הניסוי והן בקבוצת הביקורת, שאלון מסכם. בשאלון המסכם, כפי שהדבר נעשה בשאלון המקדים, נתבקשו פרחי ההוראה לספק אי-דוגמאות. לאחר מילוי השאלונים נותחו סטטיסטית הנתונים שנאספו כדי לבדוק האם קיימים הבדלים בין יכולות משתתפי קבוצת הניסוי ובין יכולות משתתפי קבוצת הביקורת. כמו כן בתום הניסוי (תקופת החשיפה שנמשכה שלושה חודשים) התקיימו ראיונות עם חמישה פרחי הוראה שהיו בקבוצת הניסוי כדי לדעת מהן עמדותיהם כלפי נושא אי-דוגמאות.

ממצאים

להלן יוצגו תוצאות המחקר וממצאיו, כפי שהתקבלו מניתוח השאלונים והראיונות, מתוך שילוב בין הממצאים הכמותיים ובין הממצאים האיכותניים. הממצאים הכמותיים נותחו באמצעות מבחנים סטטיסטיים של מבחני הפרש תוחלת בין מדגמים בלתי תלויים שנערכו לצורך בדיקת ההבדלים בין קבוצת הניסוי לקבוצת הביקורת, וכן מבחנים סטטיסטיים שבדקו האם קיימים הבדלים בקבוצת הניסוי בין השאלון המקדים (pre) לשאלון המסכם (post). הממצאים האיכותניים נותחו באמצעות ניתוח תוכן.

נעשה מבחן סטטיסטי להשוואה בין קבוצת הניסוי בשאלון מקדים (pre test) לקבוצת ניסוי בשאלון המסכם (post test). מטרת המבחן היא לדעת אם בקבוצת הניסוי חל שינוי כלשהו אחרי העברת יחידת הלימוד אשר ליכולת המתכשרים ליצור דוגמאות נגדיות. להלן לוחות 2-3 שבהם מפורטות התפלגויות תשובות המשיבים מקבוצת הניסוי אשר לטענות שעניינן יצירת דוגמה נגדית. בלוח 2 מתוארות ההתפלגויות מהשאלון המקדים, ובלוח 3 מתוארות ההתפלגויות מהשאלון המסכם.

לוח 2: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לטענות העוסקות ביצירת דוגמה נגדית בשאלון המקדים

	שאלות העוסקות בנכון / לא נכון וביצירת דוגמה נגדית בשאלון מקדים																
קבוצת הניסוי מס' נבדק	Q1 f\t	Q1 Res	Q2 f\t	Q2 Res	Q4 f\t	Q4 Res	Q6 f\t	Q6 Res	Q7 f\t	Q7 Res	Q8 f\t	Q8 Res	Q9 f\t	Q9 Res	Q10 f\t	Q10 Res	Q15
סה"כ ענו נכון	15	10	12	9	12	12	13	9	6	3	7	0	3	3	6	4	0
סה"כ ענו לא נכון	1	5	4	6	4	3	3	5	8	8	8	9	11	10	10	8	3
סה"כ לא השיבו	0	1	0	1	0	1	0	2	2	5	1	7	2	3	0	4	13

לוח 3: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות בקטגוריה דוגמה נגדית בשאלון המסכם

	שאלות הנוגעות לנכון / לא נכון וליצירת דוגמה נגדית בשאלון המסכם																
קבוצת הניסוי מס' נבדק	Q1 f\t	Q1 Res	Q2 f\t	Q2 Res	Q3 f\t	Q3 Res	Q4 f\t	Q4 Res	Q6 f\t	Q6 Res	Q7 f\t	Q7 Res	Q8 f\t	Q8 Res	Q10 f\t	Q10 Res	Q15
סה"כ ענו נכון	15	14	12	11	9	5	9	9	1	0	8	7	5	1	13	10	14
סה"כ ענו לא נכון	1	2	4	5	7	9	7	5	15	12	8	6	11	12	3	4	2
סה"כ לא השיבו	0	0	0	0	0	2	0	1	0	4	0	3	0	3	0	2	0

תוצאת המבחן הסטטיסטי שבדק האם חל שינוי בקבוצת הניסוי אחרי העברת יחידת הלימוד ברמת מובהקות 5% היא 1.59, תוצאה זו קטנה מהקריטי (T=1.679), ולכן ברמת מובהקות של 5% אי אפשר לקבוע שחל שינוי בקבוצת הניסוי בתחום היכולת שלהם ליצור דוגמה נגדית. במילים אחרות, הוראת יחידת הלימוד הייחודית לא שיפרה את יכולות קבוצת הניסוי ליצור דוגמה נגדית. אבל אם נגדיל את רמת המובהקות מ-5% ל-10% מובהקות אזי הסטטיסטי שהוא 1.59 גדול מהקריטי (T=1.301), ולכן ברמת מובהקות זו נמצא שיפור ביכולות קבוצת הניסוי ליצור דוגמאות נגדיות.

קשיים ביצירת דוגמה נגדית

פרחי הוראה מתקשים ליצור דוגמה נגדית לטענות מתמטיות. לטענת הסטודנטית ר': "אני מאמינה שלכל טענה שקרית יש בדרך כלל יותר מדוגמה אחת, אף על פי שאני בטוחה שיש עוד דוגמאות נגדיות, אני לא מחפשת אותן כי זה קשה למצוא אותן, זה דורש יותר זמן ומחשבה."

קושי במציאת דוגמאות נגדיות ניכר היטב בטענה 6: "הפונקציה $f(x)=x^4+12x+12$ אינה מקבלת ערכים שליליים". לטענה זו אף לא אחד מפרחי ההוראה בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת סיפק דוגמה נגדית. אומנם משיבים אחדים קבעו שהטענה הזו אינה נכונה, אבל הם לא נימקו את תשובתם ולא יצרו דוגמה נגדית שיכולה להוכיח מדוע הטענה אינה נכונה. רוב פרחי ההוראה (15 מתוך 16) סברו שהטענה נכונה, והיו משיבים שלא השיבו על טענה זו. מבדיקת תשובות המשיבים עולה שרוב פרחי ההוראה בדקו בדקו מקרים מעטים כמו הצבת מספרים, פעם שליליים ופעם חיוביים, ואז הסיקו בשוגג שהטענה נכונה, וכן ניכר שלפרחי ההוראה אין מספיק ידע תוכן מתמטי כדי לקבוע שטענה זו שגויה. זאת ועוד, רוב המספרים שהיו "חשודים" אצל המשיבים ושהציבו אותם, היו מספרים שלמים. המשיבים לא חשבו כלל על הצבת שבר עשרוני, למשל. משלא הצליחו למצוא דוגמה נגדית, הסיקו המשיבים שהטענה נכונה, מבלי לחשוב על כיוונים אחרים כמו שרטוט פונקציה שיש לה חיתוך עם ציר ה-X, כך עלה גם מהראיונות עם פרחי ההוראה.

אימות טענה מתמטית על סמך בדיקת מקרים בודדים

פרחי הוראה נוטים לקבוע אם הטענה אמיתית או שגויה על סמך בדיקת מעט דוגמאות, ואולם ידע מעמיק בתחום התוכן המתמטי משפיע על היכולת של פרחי הוראה לקבוע אם הטענה אמיתית או שגויה. מניתוח התוצאות העוסקות בקביעת נכונות או אי-נכונות הטענה המתמטית אפשר לראות שפרחי ההוראה התקשו לקבוע אם טענה מסוימת היא נכונה או לא נכונה. למשל, בטענה 7 ("לכל n שלם חיובי, המספר n^2+n+41 הוא ראשוני") רק 11 משיבים (23.9%) קבעו שהטענה שגויה, מהם בדקו רק כמה מספרים טבעיים מעטים כדי לקבוע שהטענה נכונה. בריאיון עם מתכשרת בקבוצת הניסוי על טענה 7 היא סיפרה: "אני בדקתי כמה מספרים טבעיים וכל תוצאה שהתקבלה הייתה מספר ראשוני, לכן חשבתי שטענה זו נכונה." זאת ועוד, נראה שפרחי ההוראה נטו להתעלם ממספרים שליליים, מ-0 וממספרים רציונליים בקביעת ערך האמת של טענה מתמטית זו. ייתכן שהתעלמות זו מקורה בהיעדר ידע תוכן מתמטי מספק. לדברי אחד המרואיינים: "אם מסתכלים על הטענה רואים שהמספר 41 הוא ראשוני, והביטוי n^2+n כל הצבת מספר טבעי בביטוי תיתן מספר זוגי, וגם בדקתי שזה יוצא זוגי, לכן 41+ מספר זוגי נקבל תוצאה מספר ראשוני." מכאן אפשר להסיק שחוסר ידע בתוכן מתמטי הוביל את המרואיין להסיק מסקנה שגויה. כדי

לספק דוגמאות נגדיות ולהשתמש בהן צריך להבין היטב הגדרות מתמטיות ומושגים מתמטיים וכן להבין הנמקה דדוקטיבית. נראה שהמתכשרים מתקשים בנושאים אלה, והדבר משפיע על יכולתם לבנות דוגמאות נגדיות, להבין אותן ולהשתמש בהן בהוראה (Zaslavsky & Peled, 1996).

אי-דוגמאות

לוח 4: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות באי-דוגמה בשאלון המקדים

מספר נבדקים	Q11	Q12
סה"כ ענו נכון	4	7
סה"כ ענו לא נכון	12	9
סה"כ לא השיבו	0	0

ממוצע: (0.68)

סטיית תקן: (SD=0.704)

לוח 5: התפלגות תשובות פרחי ההוראה לשאלות העוסקות באי-דוגמה בשאלון המסכם

מספר נבדקים	Q11	Q12
סה"כ ענו נכון	11	8
סה"כ ענו לא נכון	5	8
סה"כ לא השיבו	0	0

ממוצע: (1.18)

סטיית תקן: (SD=0.54)

ברמת מובהקות עד 5% התוצאה מובהקת, כלומר יש שיפור בתוצאות קבוצת הניסוי בשאלון המסכם. מכאן אפשר להסיק שחשיפת פרחי הוראה ללמידה ממוקדת באי-דוגמאות משפרת את יכולתם ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות.

כאמור, לאחר הוראת יחידת הלימוד הייחודית בנושא דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות ערכתי ראיונות מובנים למחצה עם חמישה פרחי הוראה כדי להעמיק את ההבנה אשר לעמדותיהם כלפי אי-דוגמאות. מתוך הראיונות האלו הולצו הדפוסים שחזרו אצל חלק מפרחי הוראה, והם מוינו לשלוש קטגוריות, כפי שיפורטו להלן.

לא רגיל להשתמש באי-דוגמה

בדרך כלל פרחי הוראה אינם משתמשים במושג אי-דוגמה בלימודיהם, אף שתפקיד המושג הוא להבחין בין תכונה חיונית ובין תכונה שאינה חיונית של מושג מתמטי. מהראיונות עם המתכשרים עולה שרוב הזמן הם "רגילים" ליצור דוגמאות תומכות למושג או לטענה מתמטית, ושבהסברים שהם מקבלים ממרצים בקורסים למיניהם, לרוב הסברי המרצים מבוססים על דוגמאות תומכות המראות מדוע הטענה נכונה. בעבור מקצת המרואיינים המושג אי-דוגמה היה חדש או ששמעו עליו מעט מאוד בלימודיהם.

קטע א מתוך ריאיון עם מ':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: האם אתה זוכר ששמעת על המושג אי-דוגמה במהלך לימודיך במכללה. מ': לא זכור לי המושג אי-דוגמה. מורה: לאחר שלמדנו על אי-דוגמה תוכל להגדיר אותה מחדש? מ': כן, אני יכול?... זה דוגמה שהתפקיד שלה לא לתמוך בטענה וגם לא לסתור אותה... מורה: כלומר? מ': דוגמה שמחדדת מה שייך לטענה ומה שלא שייך לטענה. מורה: האם היו לך שימושים במושג זה בעבר? מ': לא זוכר.	המושג אי-דוגמה חדש יחסית בעבור פרחי הוראה, ברוב הפעמים הם ראו דוגמאות תומכות למושג ונחשפו אליו חשיפה ממוקדת בניסוי שנעשה במחקר הזה.

מעמיק ידע

מתן דוגמאות תומכות ואי-דוגמאות למושג או לטענה כלשהי מעמיק את הידע של הלומדים, כי הבנת מושג בשתי הגישות, בדוגמאות תומכות ואי-דוגמאות, יכול להקנות ללומדים מיומנות של חשיבה ביקורתית ולהעמיק את ההבנה שלהם למושג שלמדו.

קטע ב מתוך ריאיון עם פ':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: אבל אתה אמרת שאתה רגיל ליצור או לראות דוגמאות תומכות וזה עזר לך להבין את מה שלמדת טוב? פ': נכון... אבל אם היו מראים לי גם דוגמאות תומכות וגם אי-דוגמאות הייתי מבין ויודע יותר טוב. מורה: במה אי-דוגמאות עזרו לך? פ': אם אני יכול לספק דוגמאות וגם אי-דוגמאות... זה ברור שאני מבין את המשפט ומה ההגבלות שלו.	יצירת דוגמאות תומכות ואי- דוגמאות עזר למתכשרים להבין את המושג המתמטי ביעילות רבה יותר וגם להבחין אילו סוגי דוגמאות הלומדים מספקים למושג או להגדרה.

קל למצוא אי-דוגמה לטענה מתמטית

רוב פרחי הוראה לא השתמשו באי-דוגמאות בתדירות גבוהה. לאחר הוראת יחידת הלימוד שכללה דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות, ידעו המתכשרים מהו תפקידן של אי-דוגמאות, ולכן היה להם קל יותר ליצור למושגים ולהגדרות אי-דוגמאות. רוב המתכשרים דיווחו בראיונות שיצירת אי-דוגמאות למושגים היא שיטה קלה ואינה מסובכת כמו הדוגמה הנגדית. במילים אחרות, לפרחי הוראה היה יותר קל ליצור אי-דוגמאות מאשר ליצור דוגמאות נגדיות הסותרות את הטענה המתמטית.

קטע ג מתוך ריאיון עם א':

קטע מתוך ריאיון	ניתוח
מורה: למה אתה חושב שעכשיו אתה יכול ליצור אי-דוגמה? א': כי היא לא דורשת הרבה תנאים... כמו הדוגמה הנגדית שצריך לחפש אותה ואולי קשה לי למצוא אותה. מורה: זה יותר קל בהשוואה לדוגמה נגדית? א': זה בכללי יותר קל עבורי למצוא אי-דוגמה...	לאחר הבנת תפקידה של האי-דוגמה, למתכשרים קל יותר למצוא אי-דוגמאות. למתכשרים קשה יותר ליצור דוגמה נגדית, ויצירת אי-דוגמה נתפסת בעיניהם קלה יותר.

סיכום

למחקר הנוכחי היו שתי מטרות עיקריות: האחת, לחשוף את המתכשרים להוראת מתמטיקה במסלול העל-יסודי במכללה לחינוך לסביבת למידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות כדי להעריך את יכולתם להפריך טענות מתמטיות; והשנייה, לחשוף את המתכשרים האלה לסביבה למידה ממוקדת באי-דוגמאות כדי להעריך את יכולתם לספק אי-דוגמאות לטענות מתמטיות.

בעקבות ממצאי המחקר אי אפשר לקבוע ברמת מובהקות של 95% עם דרגת חופש של 5% שהחשיפה ללמידה ממוקדת בדוגמאות נגדיות שיפרה את יכולתם של פרחי הוראה לספק דוגמאות נגדיות. נמצא שבשאלון המסכם קבוצת הניסוי לא קיבלה תוצאות טובות יותר ומובהקות בהשוואה לקבוצת הביקורת. ממוצע קבוצת הניסוי (16 פרחי הוראה) בשאלון המקדים היה 7.75 (סטיית תקן 2.13), ואילו הממוצע של אותה הקבוצה בשאלון המסכם היה 9.0 (סטיית תקן 2.875). אומנם הממוצע לאחר החשיפה היה גבוה יותר, אך לא מובהק סטטיסטית.

אחת הסיבות לאי היכולת ליצור דוגמה נגדית היא תחושת הקושי. ייתכן שקושי זה נובע מחוסר ידע בתוכן מתמטי, דבר המונע מן המתכשרים לספק דוגמה נגדית. למשל, בטענה "הפונקציה f(x)= x4+12x+12 אינה מקבלת ערכים שליליים", מעט מאוד פרחי הוראה השתמשו בשיטת הניתוח כדי לספק את הדוגמה הנגדית. לדעת ינון ועמיתיו (Iannone et al., 2011), שימוש בניתוח עשוי להוביל את המתכשרים לספק דוגמה נגדית, מפני שהניתוח הוא תהליך מתוחכם מאוד המבוסס על ייצור רצף של מסקנות שהלומדים מסיקים כל הזמן.

לאחר חשיפת המתכשרים לדוגמאות נגדיות הם נהיו "חשדניים" יותר כלפי כל טענה ולא מיהרו לקבוע אם היא נכונה או שגויה. לדברי אחד המתכשרים: "בעבר חשבנו שכמעט כל הטענות נכונות. היום לאחר שלמדנו וראיתי כמה טענות שקריות, אני לא מאשר נכונות טענה עד שאני רואה את ההוכחה שלה." כמו כן המתכשרים נעשו זהירים יותר כלפי הטענות. ממצא זה עולה בקנה אחד עם ממצאיו של קלימשוק וקאצ'אפובה (Klymchuk & Kachapova, 2011) שלפיהם לאחר חשיפת הסטודנטים לדוגמאות נגדיות הם היו זהירים יותר ומחושבים כלפי התנאים של הטענות, והבנתם את המושגים הנלמדים השתפרה. זאת ועוד, החשיפה הזו עזרה לסטודנטים לצמצם טעויות נפוצות בלימודי מתמטיקה.

בעקבות חשיפת פרחי הוראה ללמידה ממוקדת באי-דוגמאות ניכר שיפור מובהק ביכולת של מתכשרים בקבוצת הניסוי ליצור אי-דוגמאות לטענות מתמטיות בהשוואה לקבוצת הביקורת. המושג אי-דוגמה מתמטית נוגע לדוגמאות שאינן תומכות בטענה או בהגדרה וגם אינן סותרות את הטענה. מטרת השימוש באי-דוגמה היא להבין את המושג המתמטי טוב יותר ובקלות. אוסף דוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות נחוץ למורים ולתלמידים כדי להבין הגדרות מתמטיות במדויק (Wilson, 1990). ברם, מעט מאוד פרחי הוראה השתמשו באי-דוגמה, כיוון שהם הורגלו ליצור דוגמאות תומכות כדי לחזק את ההבנה שלהם להגדרה או לטענה כלשהי. לטענת אלקוק (Alcock, 2004), תלמידים אינם רגילים לחשוב על אובייקט שלא חל על ההצהרות או על הגדרות. טענתה זו מחזקת את הממצאים שלאחר החשיפה לאי-דוגמאות למדו פרחי ההוראה (בקבוצת הניסוי) ליצור אי-דוגמאות ולהשתמש בהן, והדבר ניכר במובהק בשאלון המסכם שמילאו. ממצא זה עולה בקנה אחד עם מחקרן של צמיר ועמיתותיה (Tsamir et al., 2008) שדיווחו שתלמידים בני 6 הצליחו לזהות אי-דוגמאות של משולשים.

לסיכום, מממצאי המחקר ומסקנותיו עולה שיש חשיבות רבה שפרחי הוראה ייחשפו לדוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות, משום שמיומנויות אלה יסייעו להם במהלך הוראת המתמטיקה בכיתה, כשיצטרכו להתמודד עם טענות שגויות של תלמידים או עם אי הבנה של התלמידים בנושא מסוים. כיוון שאוכלוסיית הניסוי לא הייתה גדולה (16 פרחי הוראה בלבד) טוב ייעשה אם יתקיים מחקר חוזר נוסף, זאת כדי לבסס את תוצאות המחקר ומסקנותיו על קבוצת מחקר גדולה יותר.

רשימת מקורות

Alcock, L. (2004). Uses of example objects in proving. *Proceedings of the 28th Conference of the International group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 17-24). New Jersey, US: Rutgers University press.

Antonini, S. (2003). Non-examples and proof by contradiction. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 49-56.

Antonini, S. (2011). Generating examples: Focus on processes. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(2), 205-217. doi:10.1007/s11858-011-0317-6

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 57-64). Norwich: University of East Anglia.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 1-14. doi:10.1007/s10649-011-9299-0

Klymchuk, S., & Kachapova, F. (2011). Paradoxes and counterexamples in teaching and learning of probability at university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 803-811. doi:10.1080/0020739X.2011.633631

Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68-77. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.005

Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 20-35. doi:10.1016/j.jmathb.2012.09.003

Leung, I. K. C., & Lew, H.-C. (2013). The ability of students and teachers to use counter-examples to justify mathematical propositions: A pilot in South Korea and

Hong Kong. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(1), 91-105. doi:10.1007/s11858-012-0450-x

Michener, E. R. (1978). Understanding mathematics. *Cognitive Science,* 2(4), 361-383. doi:10.1207/s15516709cog0204_3

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2009). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *In Proceedings of CERME 6* (pp. 281-290). Lyon: INRP.

Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 187-208). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Saglam, Y., & Dost, Ş. (2016). A qualitative research on example generation capabilities of university students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(5), 979-996. doi:10.1007/s10763-015-9624-7

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 81-95. doi:10.1007/s10649-008-9133-5

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2*(2), 237-249. doi:10.1080/14926150209556516

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 97-109. doi:10.1007/s10649-008-9142-4

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Yopp, D. A. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 39,* 79-99. doi:10.1016/j.jmathb.2015.06.003

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78. doi:10.2307/749198.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15-21.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165-182. doi:10.1007/s10649-008-9140-6

נספחים

שאלון מחקר מקדים

סטודנטים יקרים,

שאלון זה מיועד לבחון את השימוש בדוגמאות נגדיות ואי-דוגמאות בהוראת המתמטיקה.

השאלון הוא אנונימי, לכן אין זה חובה לרשום שם או כל פרט מזהה אחר. השאלון מיועד לצורכי מחקר בלבד.

בשאלון שני חלקים א ו-ב, נא לענות על כל החלקים.

חלק א

בחלק זה מוצגות 10 טענות. חלקן נכונות מתמטיות וחלקן שגויות, אם הטענה נכונה נא לרשום נכון ולהצדיק אותה. ואם שגויה נא לרשום לא נכון ולהביא דוגמה נגדית אחת.

טענה 1: לכל שני מספרים שלמים חיוביים, אם אף אחד מהם לא מתחלק ב-7 ללא שארית, אז גם סכומם לא מתחלק ב-7 ללא שארית.

טענה 2: לכל n שלם חיובי, אם n2 אי זוגי אז n ראשוני.

טענה 3: משולשים דומים ושווי שטח, הם חופפים.

טענה 4: האם $(a + b) 2 = a2 + b2$? נמק.

טענה 5: לכל מספר ממשי x, y אם $|x+y|=|x|+|y|$ אז $xy>0$.

טענה 6: לכל n שלם חיובי, מתקיים $n2< 2n$.

טענה 7: לכל n שלם חיובי, המספר $n2 + n+41$ הוא ראשוני.

טענה 8: ההפרש בין שני מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.

טענה 9: אם הקטע KJ = KL אז K אמצע הקטע JL.

טענה 10: לכל מרובע ABCD אם AB =CD וגם AD||BC, אז המרובע ABCD מקבילית.

חלק ב

1. נתונה טענה: מספר "עודף" הוא מספר שסכום המחלקים שלו חוץ מהמספר עצמו, גדול מהמספר עצמו.

1. סמן את התשובה הנכונה, המספר 220 הוא:

א. דוגמה נגדית לטענה

ב. אי-דוגמה לטענה

ג. דוגמה מקיימת את הטענה.

2. סמן את התשובה הנכונה, המספר 28 הוא:

א. דוגמה נגדית לטענה

ב. אי-דוגמה לטענה

ג. דוגמה מקיימת את הטענה

3. סמן את התשובה הנכונה, המספר 144 הוא:

א. דוגמה נגדית לטענה

ב. אי-דוגמה לטענה

ג. דוגמה מקיימת את הטענה

2. נתונה הטענה : כל קבוצה A מקיימת $A\subseteq P(A)$.

תן דוגמה שמקיימת את הטענה:______________________

תן דוגמה שסותרת את הטענה:______________________

תודה על שיתוף הפעולה!

שאלון מחקר מסכם

סטודנטים יקרים,

שאלון זה מיועד לבחון את השימוש בדוגמאות נגדיות ואי דוגמאות בהוראת המתמטיקה.

השאלון הוא אנונימי, לכן אין זה חובה לרשום שם או כל פרט מזהה אחר. השאלון מיועד לצורכי מחקר בלבד.

בשאלון שני חלקים א ו-ב, נא לענות על כל החלקים.

חלק א

בחלק זה מוצגות 10 טענות חלקן נכונות מתמטיות וחלקן שגויות, אם הטענה נכונה נא לרשום נכון ולהצדיק אותה. ואם שגויה נא לרשום לא נכון ולהביא דוגמה נגדית אחת.

טענה 1: סכום כל 4 מספרים טבעיים עוקבים, מתחלק ב-4 ללא שארית.

טענה 2: לכל n טבעי 3n2+1>3n

טענה 3: אם שתי צלעות וזווית של משלוש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות וזווית של משולש אחר, אז המשולשים חופפים.

טענה 4: אם הפונקציה יורדת עבור x<0 ועולה עבור x>0, אז x=0 היא נקודת מינימום.

טענה 5: הביטוי n3-n, מתחלק ב-6 ללא שארית, לכל n טבעי.

טענה 6: לפונקציה f(x)= x4+12x+12, אין פתרונות בתחום השלילי.

טענה 7: לכל n שלם חיובי, המספר 11 n - n2+ הוא ראשוני.

טענה 8: סכום שני מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.

טענה 9: למשוואה y2-5x2=6 אין פתרונות של מספרים שלמים.

טענה 10: אם סכום שתי זוויות הוא 1800, אז הזוויות הן צמודות.

חלק ב

1. נתונה טענה: פונקציה זוגית היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים, ומקיימת לכל x בתחום ההגדרה את השוויון: f(-x)=f(x).

1. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה: $f(x) = 4x^3 - \frac{5}{x}$

א. דוגמה נגדית

ב. אי-דוגמה

ג. דוגמה מקיימת

2. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה: f(x)= sinx:

א. דוגמה נגדית

ב. אי-דוגמה

ג. דוגמה מקיימת

3. סמן את התשובה הנכונה, הפונקציה f(x)= ln(x2+1):

א. דוגמה נגדית

ב. אי-דוגמה

ג. דוגמה מקיימת

2. נתונה הטענה : |a2+b3+c4|= |a2|+|b3|+|c4|

תן דוגמה שמקיימת את הטענה:______________________

תן דוגמה שסותרת את הטענה:______________________

תודה על שיתוף הפעולה!