מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר, טכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

מדור החדשות בגיליון זה מכיל **שלוש חדשות משנת 2016 המסתיימת בעת כתיבת שורות אלו**. חדשות אלו הן כמובן רק חלק פעוט של המתרחש במתמטיקה השכם והערב. בשנים האחרונות מתווספים מעל 100,000 פריטים בכל שנה למאגר המידע המתמטי הבין-לאומי המנוהל בידי החברה המתמטית האמריקאית: MathSciNet – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info הם מתפרסמים בכ-1800 כתבי עת מתמטיים. רובם מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים.

מה מיוחד למספר 7,825?

אחת ההלצות המתמטיות הידועות היא שכל מספר טבעי הוא "מיוחד במינו". ההוכחה היא באינדוקציה (כמובן...). הנה כך: שלב הבדיקה – 1 הוא מיוחד. זה ברור מהרבה סיבות, אחת מהן, למשל, היא שזה המספר הטבעי היחיד שאיננו ראשוני, אבל איננו פריק. סיבה אחרת היא שהוא הפתרון היחיד למשוואה $n\times x=n$ לכל n טבעי, ויש עוד סיבות רבות וטובות. לא הכרחי, אבל קל למצוא סיבות לכך שגם 2 הוא מספר מיוחד במינו (למשל, בהיותו הזוגי הכי קטן, או הראשוני הזוגי היחיד ועוד). לא קשה למצוא סיבות גם לכך ש-3 הוא מיוחד, אבל נעבור לשלב השני של כל הוכחה באינדוקציה – שלב הנחת האינדוקציה והנובע ממנה. נניח שלכל אחד מהמספרים הטבעיים מ-1 עד n (כולל) ניתן למצוא סיבה אחת לפחות להיותם מיוחדים במינם ונוכיח שמכאן מתחייב ש$n+1$ גם הוא מספר מיוחד. הנה כך: אם תימצא לכך סיבה טובה – סיימנו. אם לא קיימת סיבה טובה לכך אזי $n+1$ הוא המספר הטבעי הכי קטן שאיננו מיוחד ו... בכך ייחודו. מכאן נובע, על פי אכסיומת האינדוקציה (החמישית באכסיומות של פיאנו), שכל מספר טבעי הוא מיוחד במינו. מ.ש.ל.

נשאיר לכם הקוראים לחשוב מדוע זוהי הלצה ולא טענת אמת מתמטית קבילה.

וכעת יותר ברצינות, נעבור לשאלה – מה מיוחד למספר 7,825?

ובכן, כמו הרבה בעיות שנשארו פתוחות שנים רבות, העניין מתחיל משאלה פשוטה להבנה שנקראת 'בעיית השלשות הפיתגוריות' (שלושה פיתגורית היא שלשה של מספרים טבעיים a, b, c שעבורם מתקיים השוויון: $a^2+b^2=c^2$). נתחיל מהסוף: הבעיה נפתרה לאחרונה באמצעות מחשב והפתרון שפורסם בשלושה במאי 2016 נחשב להוכחה הכי "כבדה" שנוצרה בסיוע מחשב מאז ומעולם. מהי השאלה, ולמה הפתרון שלה מצריך כוח מִחשוב כה גדול? ובכן –

נניח שיש לנו שני צבעים – כחול ואדום – והחלטנו לשם שעשוע לרשום כל אחד מהמספרים

הטבעיים באחד משני הצבעים, כך שלא תהיה אף שלשה פיתגורית ששלושת רכיביה רשומים באותו צבע. כלומר, אם למשל רשמנו את 5 ואת 12 באדום, אז את 13 נרשום בכחול. האם ניתן לעשות את זה? על החשיבות של מציאת פתרון לבעיה אפשר ללמוד משהו מכך שלפני למעלה מ-35 שנה, בשנת 1980, הציע המתמטיקאי פרופ' רונלד גרהאם מאוניברסיטת קליפורניה בסן-דייגו, שנחשב לאחד מעמודי התווך של פיתוח המתמטיקה הדיסקרטית בת זמננו, פרס של מאה דולר מכיסו לראשון שימצא פתרון לבעיה.

שלושה מתמטיקאים ומדעני מחשב, מרין הול מטקסס (Marijn Heule) , אוליבר קולמן מבריטניה (Oliver Kullmann), וויקטור מארק מקנטאקי (Victor Marek) הוכיחו שעם המספרים מ-1 עד 7,824 אפשר לבצע את המשימה, אבל כשמתווסף גם 7,825 זה בלתי אפשרי. במקרה כזה תהיה לפחות שלשה פיתגורית אחת שכל רכיביה מופיעים באותו צבע.

מבחינה מתמטית עניין הצביעה הוא שולי כמובן. המשפט שהוכיחו שלושת החוקרים הנזכרים וזכו על כך בפרס המובטח וביוקרה רבה, קובע שקבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד 7,824 ניתנת לחלוקה לשתי תת-קבוצות זרות ("כחולים" ו"אדומים") כך שאף אחת משתי תת-הקבוצות לא מכילה אפילו שלשה פיתגורית אחת. ואילו את קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 ועד 7,825 אי אפשר להפריד לשתי תת-קבוצות כאלו. במילים אחרות, קיימת חלוקה לשתיים של קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 ועד 7,825, כך שלפחות באחת משתי הקבוצות יש שלשה פיתגורית אחת או יותר. יש להבין כי מההוכחה עבור 1 עד 7,825 נובע בהכרח שהדבר נכון לכל קבוצה של מספרים טבעיים מ-1 ועד N אם רק $N>7{,}824$, שכן אותה חלוקה שקיימת למספרים עד 7,825 תורחב ותשמש להוכחה עבור ערך גדול יותר של N.

מהו מספר האפשרויות לרשום בשני צבעים שונים את כל המספרים הטבעיים בין 1 ל-2785? – זאת שאלה פשוטה בקומבינטוריקה שהתשובה עליה היא $2^{7,825}$, מספר עצום של אפשרויות (2^{40} זה יותר מטריליון!). אבל החוקרים הצליחו להראות שלצורך הניתוח של בעית הקיום של שלשה פיתגורית שכל רכיביה צבועים באותו צבע, אפשר להסתפק בניתוח של טריליון אפשרויות בערך, שגם זה מספר לא קטן, ואותן הם בחנו באמצעות תוכנה ייחודית. יצירת ההוכחה העסיקה את מחשב-העל Stampede במרכז המחשבים המתקדם של אוניבריטת טקסס במשך יומיים (זמן מחשב), שבמהלכם נוצרו 200 טרה-בייט של הוכחה שנדחסה ל-68 ג'יגה-בייט "בלבד". המאמר המתאר את ההוכחה פורסם בשלושה במאי 2016, התקבל לכנס בינלאומי במדעי המחשב המוקדש ל- Theory and Applications of Satisfiability Testing שהתקיים בעיר בורדו בצרפת ביולי 2016, ושם זכה בפרס המאמר הטוב ביותר. באותו כנס גם הוענק פרסו של רונלד גראהם למרין הול. כמו הרבה בעיות שנפתרו במתמטיקה לפני שנמצא לכך שימוש, יש מקום לחשוב שלפתרון הבעיה הזאת וגם לאמצעים להשגתו יימצאו שימושים בעתיד.

פרטים על ההוכחה אפשר לקרוא כאן: https://arxiv.org/pdf/1605.00723v1.pdf

http://futurism.com/worlds-largest-math-proof-solved-and-it-takes-up-200-terabytes/

ובעברית כאן: http://www.gadial.net/2016/07/12/boolean_pythagorean_triples/

מחשב-העל Stampede מאוניברסיטת טקסס שבעזרתו נפתרה בעיית השלשות הפיתגוריות הנחשבת ל"כבדה" ביותר מאז ומעולם (200 טרה-בייט)[1]

המספרים הראשוניים לא מפסיקים לסקרן ולהפתיע

James Maynard[2]

המתמטיקאים העוסקים בתורת המספרים לא מניחים למחקר על המספרים הראשוניים. בנוסף למרוץ אחר מספר ראשוני גדול יותר ויותר שתואר **בגיליון הראשון של כתב העת**, הופיעה בגיליון הקודם (גיליון 4) חדשה מעניינת מחודש מרץ 2016 על **'הטייה בלתי צפויה בהתפלגות של מספרים ראשוניים עוקבים'**. והנה בחודש יולי 2016 בכנס השנתי של האיגוד האירופאי של המתמטיקאים בברלין, זכה מתמטיקאי בריטי צעיר ושמו **ג'יימס מיינארד** (James Maynard), יליד 1987, בפרס יוקרתי, שהאיגוד הזה מעניק למתמטיקאים שעוד לא מלאו להם 30 שנה, על תגליתו:

יש אינסוף מספרים ראשוניים שהספרה 7 אינה מופיעה בהם.[3]

---

1. אוחזר מתוך http://www.nature.com/polopoly_fs/7.36783.1464349453!/image/_MG_7020sdp_web.png_gen/derivatives/landscape_630/_MG_7020sdp_web.png
2. By Petra Lein, Copyright is MFO [CC BY-SA 2.0 de], via Wikimedia Commons. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/James_Maynard_(mathematician)
3. Maynard, J. (2016). *Primes with restricted digits*. arXiv:1604.01041 [math.NT]

זה אולי נראה כעניין צדדי וחסר חשיבות, אבל אותה הוכחה עצמה ניתנת ליישום לכל ספרה אחרת בין 1 ל-9 וזה כבר נשמע מעניין יותר. החשיבות האמיתית של ההוכחה של מיינארד נעוצה בכך שקשה מאוד לאתר מספרים ראשוניים בעלי תכונה מיוחדת ובמיוחד אם התכונה המיוחדת להם היא תכונה שקשה לאתר אותה בקרב כל המספרים השלמים. למספרים שלמים גדולים יש הרבה מאוד ספרות ובדרך כלל ייצוגם העשורי מכיל את כל 9 הספרות יותר מפעם אחת. לכן לאתר מספרים שלמים, לאו דווקא ראשוניים, שהספרה 7 (למשל) לא מופיעה בהם בכלל, היא משימה לא פשוטה. לא כל שכן קשה למצוא בין המספרים השלמים, מספרים ראשוניים שאין להם 7 בין ספרותיהם, ועל אחת כמה וכמה קשה להוכיח שיש אינסוף ראשוניים כאלה. כעת, משנמצאה הוכחה לכך, התקווה היא שטכניקת ההוכחה של תכונות נדירה מסוג זה עשויה להביא לידי פתרון של בעיות פתוחות קשות אחרות הנוגעות לראשוניים, כמו השערת **הראשוניים התאומים** על קיומם של אינסוף מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2, או **השערת רימן** על ההתפלגות שלהם.

עוד על חשיבות התגלית בשל הקשר בין מספרים ראשוניים לדפוסי-גלים אפשר לקרוא כאן: https://plus.maths.org/content/missing-7s

ולסיום - אלגוריתם לתכנון טיולים

Randy Olson[5]

נסיים להפעם במשהו יותר קליל – תכנון מתמטי של הטיול הבא שלכם. זוכרים את בעיית הגשרים של קניגסברג שיצרה את תורת הגרפים? אוילר תהה בזמנו אם ניתן לתכנן טיול שבו עוברים על כל אחד משבעה הגשרים בעיר קניגסברג פעם אחת ורק אחת. שאלה דומה, אבל הרבה יותר מאתגרת, היא למצוא מסלול אופטימלי לטיול בכל המדינות של ארה"ב או לפחות ב-48 המדינות המחוברות ביניהן ביבשה משותפת.

את האתגר הזה הציבה טרייסי סטיידטר (Tracy Staedter), כתבת של Discovery News, בפני רנדי אולסון (Randy Olson), שסיים בשנת 2015 את לימודיו לתואר דוקטור באוניברסיטת פנסילבניה, אחרי שהתרשמה מאלגוריתם החיפוש שהוא פיתח לפתרון חידות "איפה אפי".[4]

4. Olson, R. (2015, February 3). Here's Waldo: Computing the optimal search strategy for finding Wald [Web log post]. Retrieved from http://www.randalolson.com/2015/02/03/heres-waldo-computing-the-optimal-search-strategy-for-finding-waldo

5. אוחזר באישור בעל האתר מתוך http://www.randalolson.com

כדי לעמוד באתגר הם הציבו שלושה כללים:

1. על המסלול לעבור לפחות פעם אחת בכל אחת מ-48 המדינות המחוברות ביניהן ביבשה משותפת.
2. העצירות תהיינה רק באתרים לאומיים.
3. הטיול ייעשה במכונית בלי לעזוב את גבולות ארה"ב.

טרייסי ארגנה רשימה של 50 אתרים, אחד בכל מדינה (כולל וושינגטון די.סי. ולא כולל הוואי ואלסקה) ושניים בקליפורניה,[6] ורנדי נרתם לאיתור המסלול שייקח מינימום זמן נסיעה ומקסימום זמן להנאה מביקור באתרים. הוא מצא את כל 2450 מרחקי הנסיעה ברכב בין כל שניים מ-50 האתרים ברשימה של טרייסי, וניגש לפתרון הבעיה של מעבר מאחד לשני כך שסך כל הדרך יהיה קטן ככל האפשר. בעיה זאת מוכרת כ"בעיית הסוכן הנוסע".[7]

ליתר דיוק כדי לחשב את המסלול החסכוני ביותר מבחינת המרחק הכולל יש לבדוק 3×10^{24} אפשרויות, שזה מספר עצום שלא ניתן לביצוע בזמן חיי אדם (גוגל נותנת מסלול בין 10 נקודות לכל היותר!). למרבה המזל בעיית הסוכן הנוסע נחקרה כבר לעומק ורנדי היה יכול להשתמש בידע העצום שקיים כבר בנושא זה וב"קיצורי דרך" שנותנים פתרון טוב למדי, אף כי אולי לא את הפתרון הכי טוב שקיים: ב-224 שעות נסיעה. המסלול הוא סגור, כלומר אפשר להתחיל בכל נקודה ולבלות חודשיים-שלושה בביקור בכל אחת מהתחנות. אפשר לראות את המסלול בבלוג של רנדי: http://www.randalolson.com/2015/03/08/computing-the-optimal-road-trip-across-the-u-s/

אבל הדבר החשוב יותר הוא שרנדי מעמיד את האלגוריתם לרשות קוראי הבלוג שלו (בכתובת לעיל) וכל אחד יכול להשתמש בו לנתונים של הטיול שהוא מתכנן, כלומר במרחקי הדרך בין כל שתיים מהנקודות שבהן הוא רוצה לבקר, כדי למצוא מסלול אופטימלי מבחינת אורך הנהיגה וזמן הביקור.

פרופ׳ (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את ״**קשר חם**״ - מרכז מו״פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, וניהלה את המוזֵאון הלאומי למדע בחיפה. הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, וביניהן סדרת המשדרים הדרמתיים ״חשבון פשוט״ שהפיקה הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ׳ מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.

---

6. Staedter, T. (2015, March 9). How to Drive Across the U.S., Hitting Major Landmarks. See<er. Retrieved from http://www.seeker.com/how-to-really-drive-across-the-us-hitting-major-landmarks-1769592276.html
7. בעיית הסוכן הנוסע. (2004). בתוך ויקיפדיה. אוחזר ב-13 בפברואר, 2017, מתוך https://he.wikipedia.org/wiki/בעיית_הסוכן_הנוסע