פתרון גאומטרי למשוואה ממעלה שלישית: $x^3 + bx = c$ על פי עומר אל ח׳יאם

אסמאא עבד אל חלים, מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה, סכנין
מוחמד אבו חאמד, מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה, סכנין;
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, חיפה

מבוא

מתחילת המאה התשיעית, הופיעה תורת האלגברה בין דפי ספרו של מוחמד בן מושה אל ח'וואריזמי "כתאב אל גבר ולמוקבלה" – ספר ההשלמה והאיזון, וזו הייתה מולדתו של הענף המתמטי החדש שנקרא אלגברה. גם נגלה הפוטנציאל של תורה זו בכך שאִפשרה לקשר בין האלגברה לגאומטריה. קשרים אלה גרמו להיווצרותם של מספר תחומים חדשים במתמטיקה, שבהם האלגברה מיושמת בצורה טבעית בנושאים הקלסיים מיוון העתיקה, כמו תורת המספרים וגאומטריה (ראשד, 2011). רושדי ראשד המתמטיקאי, הפילוסוף וההיסטוריון המצרי, מראה כי האלגברה של אל ח'וואריזמי התפתחה בשני כיוונים ראשיים (ראשד, 2010; ראשד וזאדה, 2005): כיוון חישובי, למשל חשבון פולינומים, וכיוון גאומטרי שמסמן את תחילתה של הגאומטריה האלגברית, ובו נדון במדור זה.

המדען עומר אל ח׳יאם ותרומותיו

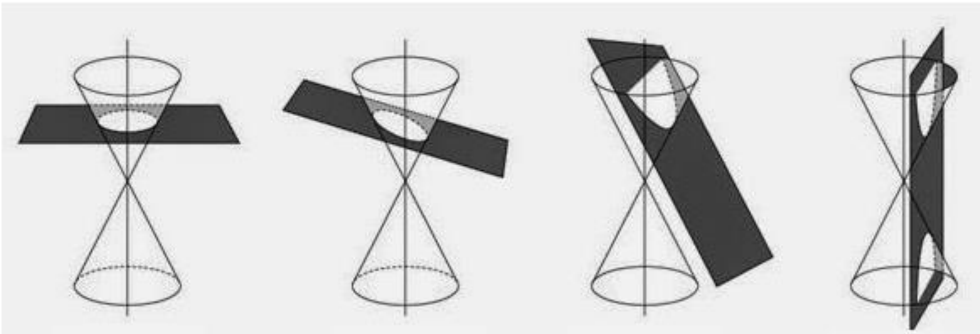
שמו המלא ע'יאת' אל דין אבו אל פתוח עומר בן אברהים אל ח'יאם (غياث الدين أبو الفتوح عمر بن ابراهيم الخيام), נולד בעיר ניסאבור (1131-1048) בצפון איראן. נוסף להיותו מתמטיקאי היה גם בקיא באסטרונומיה ופילוסופיה.

במדור זה אנו נתמקד באחת מעבודותיו של עומר בנושא אלגברה. עבודה זו נחשבת לתחילתה של הגאומטריה האלגברית ובה עומר נותן פתרון גאומטרי לכל המשוואות ממעלה שלישית. בתחילת חיבורו הצהיר עומר כי לא הוא ולא מי שהיה לפניו הצליחו לפתור משוואה ממעלה שלישית בצורה אלגברית טהורה (לא גאומטרית) והוא קיווה כי בעתיד יבוא מישהו ויעשה זאת. ואכן, לאחר ארבע מאות שנה, במאה השש-עשרה, הצליחו האיטלקים קרדאנו וטרטגליה (Burton, 2011) לגלות נוסחה אלגברית סגורה. כמו כן ציין עומר במבוא לחיבורו כי כל קורא של החיבור חייב להבין בנושאים המוכלים בשני הספרים: היסודות של אוקלידס והקונוסים של אפולוניוס. דבר זה יכול להעיד על השפעה של המסורת היוונית העתיקה על המדע הערבי באותה התקופה.

בחיבורו של עומר הוא מיין 25 משוואות ממעלה שלישית ומטה לפי דרגה, מספר גורמים ומקומם של גורמים אלו במשוואה. לכל 25 משוואות אלו מוצג פתרון גאומטרי. חשוב רק לציין כי באותה התקופה עדיין לא היה נהוג להשתמש במספרים שליליים, ולכן כל המקדמים הם מספרים חיוביים.

חתכים קונים

חתך קוני הוא עקום המתקבל בחיתוך בין מישור מרחבי לקונוס שבסיסיו הם מעגלים. בהתאם למצב ההדדי בין המישור לציר ובסיס החרוט מתקבלים ארבעה עקומים שונים, כפי שמתואר באיור 1.



היפרבולה **פרבולה** **אליפסה** **מעגל**

איור 1: חתכים קונים

אלה המשוואות הקנוניות עבור החתכים הקונים בצורתם המודרנית במישור הקרטיזי:

היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

פרבולה: $y = ax^2$ (נרחיב עליה במדור זה).

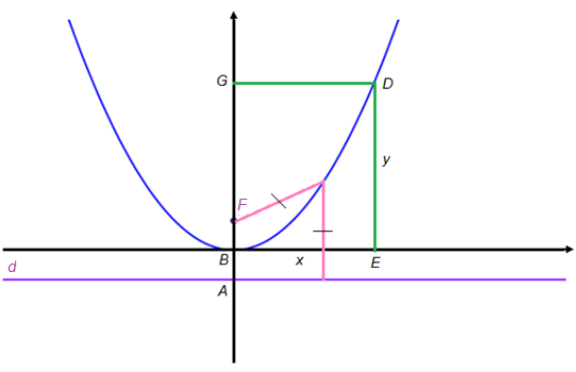
מעגל: $x^2 + y^2 = R^2$

פרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות במישור שמרחק כל אחת מהן מנקודה נתונה F (**המוקד**) שווה למרחקה מישר נתון d (**המדריך**) (איור 2).

- מאז ימי יוון העתיקה היה נהוג להציג את משוואת הפרבולה בדרך הבאה: $BE^2 = AB \cdot DE$ (ראה איור 2) (Katz, 2014). כפי שנראה בהמשך, זו הצורה ששמשה גם את עומר אל ח'יאם.
- אם נסמן $AB = \sqrt{b}$ נקבל את משוואת הפרבולה בצורתה המודרנית:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{b}} \Leftarrow x^2 = \sqrt{b} \cdot y$$

וזה ברור מאיור 2, כי $BE = x$, $DE = y$.



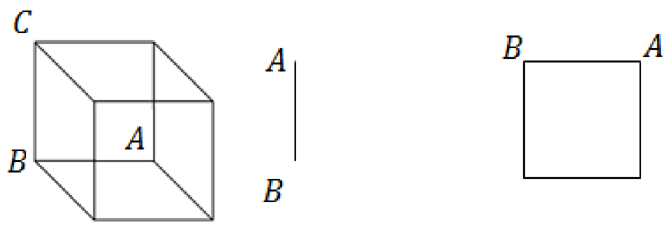
איור 2: פרבולה המוגדרת על ידי מוקד ומדריך

תיאור הבנייה הגאומטרית עבור המשוואה $ax^3 + bx = c$.

משוואה 13 היא משוואה אלגברית ממעלה שלישית המכילה שלושה גורמים: $x^3 + bx = c$, כאשר המקדמים b ו-c הם מספרים ממשים חיובים. המספר 13 הוא המספר הסידורי שקבע עומר כאשר סידר ומיין את 25 המשוואות ממעלה שלוש ומטה. המשוואה 13 היא הראשונה בששת המשוואות ממעלה שלוש שמכילות רק שלושה גורמים (ראשד וזאדה, 2005).

הצגה גאומטרית לנעלם x ולמקדמים b, c

אפשר להציג את הנעלם וחזקותיו x^3, x^2, x בגדלים גאומטריים כמו אורך קטע, שטח ריבוע ונפח קובייה בהתאמה. כדי לשמור על ההומוגניות במשוואה 13, המקדם b מייצג שטח של אובייקט מישורי, והמקדם c מייצג נפח של אובייקט מרחבי. לכן אפשר לבנות בסרגל ובמחוגה ריבוע בעל צלע AB המקיים $AB^2 = b$, ותיבה בעלת בסיס AB^2 וגובה BC המקיימת $AB^2 \cdot BC = c$. ראה איור 3.



איור 3

הבנייה הגאומטרית

עומר אל ח'יאם הצליח לפתור את המשוואה: $\boldsymbol{x^3 + bx = c}$ בדרך גאומטרית בחיתוך שני חתכים קונים: מעגל ופרבולה. נציג לפניכם כעת את הבנייה על פי עומר אל ח'יאם.

נתון: $x^3 + bx = c$ כך ש-$b, c > 0$

נבנה בסרגל ובמחוגה שני קטעים AB ו-BC המקיימים: $AB^2 = b$ ו-$AB^2 \cdot BC = c$ כפי שתיארנו קודם.

הבנייה:

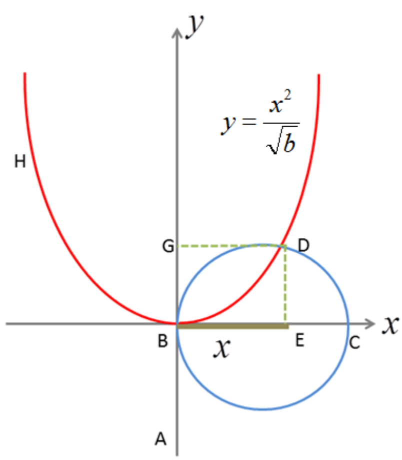
1. נצייר פרבולה שמשוואתה

$$\left(x^2 = \sqrt{b} \cdot y\right) \Leftrightarrow BE^2 = AB \cdot BG$$

על ידי המחוגה השלמה לציור חתכים קונים (ראשד, 2008).

2. נצייר מעגל בעל קוטר BC כפי שמופיע באיור 4, כך שהפרבולה והמעגל נחתכים בנקודות D ו-B.

3. מנקודה D נוריד שני אנכים DE ו-DG על הצירים x ו-y בהתאמה.



איור 4

נוצר לנו מלבן BGDE שבו $BG = ED, DG = EB$

משפט:

הקואורדינטה הרוחבית $BE = x$ עבור נקודת החיתוך D, היא פתרון משוואה 13, כלומר מתקיים:

$BE^3 + b \cdot BE = c$ (ראה איור 4).

נוכיח שלוש טענות עזר לפני הוכחת המשפט העיקרי.

למה 1: לפי הבנייה ואיור 4 מתקיימים היחסים $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BG} = \frac{BE}{ED}$.

הוכחה:

מאחר שנקודת החיתוך D נמצאת על הפרבולה לכן היא מקיימת:

$$BE^2 = AB \cdot BG$$

$$BE^2 = AB \cdot BG \qquad /: (BE \cdot BG)/$$

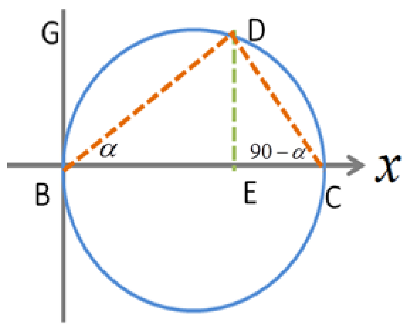
$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BG}$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BG} = \frac{BE}{ED}$$

כי $BG = ED$

מש"ל

למה 2: לפי הבנייה ואיור 5, מתקיים היחס $\frac{ED}{EC} = \frac{BE}{ED}$.



איור 5

הוכחה:

לפי איור 5, מתקיים $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ (זווית היקפית על קוטר BC). במשולש ΔBDC נסמן $\sphericalangle CBD = \alpha$ ולכן $\sphericalangle BCD = 90^\circ - \alpha$

ומהבנייה עולה כי $DE \perp BC$ ולכן מתקיים:

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle EDC = \alpha$$

נקבל כי המשולשים $\Delta BED \sim \Delta DEC$ דומים, ומהדמיון מקבלים את היחס:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{DE}{EC}$$

מש"ל

למה 3: מהבנייה מתקיים $\frac{AB^2}{BE^2}=\frac{BE}{EC}$.

יש לשים לב כי זו הפעם הראשונה שבה מופיעה החזקה השלישית של הצלע BE.

הוכחה:

לפי למה 1 ולמה 2 מתקיים:

$$\frac{AB}{BE}=\frac{ED}{EC} \quad /\cdot\frac{AB}{BE}$$

$$\frac{AB^2}{BE^2}=\frac{ED}{EC}\cdot\frac{AB}{BE}$$

ועל פי למה 1 מתקיים: $\frac{AB}{BE}=\frac{BE}{ED}$

נקבל: $\frac{AB^2}{BE^2}=\frac{\cancel{ED}}{EC}\cdot\frac{BE}{\cancel{ED}}$

$$\boldsymbol{\frac{AB^2}{BE^2}=\frac{BE}{EC}}$$

מש"ל

הוכחת המשפט:

על פי למה 3 $\quad AB^2\cdot EC=BE^3 \quad /+(AB^2\cdot BE)$

$$AB^2\cdot EC+AB^2\cdot BE=BE^3+AB^2\cdot BE$$

ומאחר ש- $BE+EC=BC$ (כנראה באיור 4)

נקבל $AB^2\cdot BC=BE^3+AB^2\cdot BE$

ולפי בניית המקדמים: $AB^2=b$ ו-$AB^2\cdot BC=c$

מקבלים בסוף: $c=BE^3+b\cdot BE \Leftrightarrow c=x^3+bx$

מש"ל

ומכאן הסיק עומר אל ח'יאם כי משוואות מטיפוס 13 תמיד ניתנות לפתרון בחיתוך בין מעגל לפרבולה.

ניתוח מודרני

ההוכחה של אל ח'יאם היא הוכחה קונסטרוקטיבית ואין בה שום אינדיקציה על איך מקבלים את שני החתכים הקוניים (ראשד, 2010). מעניין לדעת כיצד ראה עומר אל ח'יאם כי המעגל והפרבולה אכן יכולים לפתור את המשוואה.

אבן אל הייתם, שחי כמה דורות אחרי אל ח'יאם, פתר את אותה משוואה בחיתוך בין פרבולה להיפרבולה ואת זה קל לראות ישירות, כי משוואה 13 שקולה ל- $x^2+b=\frac{c}{x}$

עכשיו נלך בכיוון ההפוך, נתחיל ממשוואה 13 ונראה איך אפשר לקבל את המעגל והפרבולה של אל ח'יאם.

$$x^3 + bx = c \qquad /\cdot x$$
$$\Leftrightarrow x^4 + bx^2 = cx \quad /:b$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{b} + x^2 = \frac{c}{b}x$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{b}}\right)^2 + x^2 = \frac{c}{b}x$$

נגדיר פרבולה $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ ונקבל,

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = \frac{e}{b} = x \quad /-\frac{e}{b}x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{c}{b}x + y^2 = 0$$

ועל ידי השלמה לריבוע מלא נקבל את המעגל:

$$\left(x - \frac{c}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2$$

ועכשיו ברור יותר מדוע פתרון משוואה 13 מתקבל על ידי חיתוך של המעגל שמרכזו $\left(\frac{c}{2b}, 0\right)$ ורדיוסו $\frac{c}{2b}$, והפרבולה $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$.

היום אנו יודעים כי למשוואה אלגברית מהטיפוס של משוואה 13 יש שורש ממשי יחיד שהוא אותו שורש שמצא אל ח'יאם ושני שורשים מרוכבים צמודים, כל עוד שהמקדמים הם מספרים ממשיים.

באמצעות ההוכחה המוצגת אפשר גם ללמוד על התפתחותו של המדע הערבי תחת חסות הח'ליפות האסלאמית, ולהתבונן באסלאם באותה תקופה כדת המעודדת מדע, תרבות ושילוב של הידע החדש עם הידע היווני וההודי שקדם לידע זה.

גישתו הגאומטרית של אל ח'יאם לפתרון משוואה 13 הוצגה לתלמידי כיתה י'. ראשית, התלמידים ניסו לפתור את המשוואה בכלים האלגבריים שהם מכירים, ולאחר שלא הצליחו, הוצגה בפניהם דרך הפתרון של אל ח'יאם שהפתיעה אותם גם כדרך לפתור את המשוואה שלא הצליחו לפתור, וגם כשילוב של גישה גאומטרית בפתרון משוואה.

הכרת תודה

אנו מודים לד"ר ופיק היבי, ראש החוג למתמטיקה במכללת סכנין, על התמיכה, העידוד והחסות בהשלמת המאמר הזה.

רשימת מקורות

ראשד, ר' (2008). **אעמאל אל שגזי אל ריאדיה: הנדסת אל מכרוטאט ונד'רית אל אעדאד פי אל כרן אל עאשר אל מילאדי** (מ' אל חוג'ירי, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.

(راشد، ر. (2008). **أعمال السجزي الرياضية: هندسة المخروطات ونظرية الاعداد في القرن العاشر الميلادي.** (محمد يوسف الحجيري، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).

ראשד, ר' (2010). **ריאדיאת אל ח'ואריזמי: מאסיס עלם אל ג'בר** (נ' פארס, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.

(راشد، ر. (2010). **رياضيات الخوارزمي: تأسيس علم الجبر** (نقولا فارس، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية.)

ראשד, ר' (2011). **דראסאת פי תאריך אל עלום ופלספתיה**. בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.

(راشد، رشدي (2011). **دراسات في تاريخ العلوم العربية وفلسفتها** (ط.1). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).

ראשד, ר' וזאדה, ב"ו (2005). **ריאדיאת עומר אל ח'יאם** (נ' פארס, מתרגם). בירות: מרכז דראסאת אל וחדה אל ערביה.

(راشد، ر. وبيجان وهاب زاده. (2005). **رياضيات عمر الخيام** (نقولا فارس، مترجم). بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية).

Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics: An introduction* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.

אסמאא עבד אלחלים

בוגרת מכללת סכנין להכשרת עובדי הוראה, במסלול מתמטיקה יסודי. מורה למתמטיקה בבית ספר יסודי.

מוחמד אבו חאמד

בוגר אוניברסיטת חיפה במתמטיקה טהורה. עם תואר שני במתמטיקה טהורה ותואר שלישי במתמטיקה יישומית בטכניון. מרצה במכללת סכנין ובטכניון בחוג למתמטיקה. עובד במחקר בתחום המתמטיקה היישומית ובפרט בתופעת הדיפוזיה הלא נורמלית, עם חוקרים מהטכניון. פרסם מספר מאמרים בכתבי עת בין-לאומיים בתחום מתמטיקה יישומית ופיזיקה.