שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה[1]

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

תקציר

בעבור מתמטיקאים הגדרות הן האמצעי היחיד לזיהוי עצמים מתמטיים. אולם כפי שהמחקר בחינוך מתמטי מראה, אין זה כך עבור תלמידים רבים. חקר המקרה שלפנינו מתחקה אחר תהליכי למידה בקרב סטודנטיות להוראת מתמטיקה, הלומדות פונקציות בהכשרתן כמורות לעתיד. לשם כך אימץ מחקר זה את המסגרת התקשורתית לחקר השיח. אנו מעוניינות לענות על השאלה: אילו תהליכי למידה קשורים לשימוש בהגדרות לשם זיהוי עצמים מתמטיים? בייחוד, מהו מנגנון הלמידה המאפשר לתלמידים לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה? הממצאים מדגימים תהליך שבמהלכו תלמידים מאמצים הגדרה מתמטית כמבחן יחיד לזיהוי עצם נתון כפונקציה. תהליך זה כולל פירוק ההגדרה למרכיביה ודיון בכל אחד מהם באמצעות מנגנון של קונפליקט תקשורתי.

מילות מפתח: ניתוח שיח; גישה סוציו-תרבותית ללמידה; הגדרות; תהליכי למידה; קונפליקט תקשורתי.

מבוא

למידת מתמטיקה כרוכה בין השאר בפיתוח השיח המתמטי של הלומד באופן שיאפשר לו להשתמש במילים מתמטיות בדרך המקובלת על-ידי הקהילה המתמטית. לכן למידת הגדרות של מילים מתמטיות היא יסוד הכרחי בלמידת מתמטיקה. אולם כפי שעולה ממחקרים רבים, קיים פער בין ההיכרות של לומדים עם הגדרות פורמליות במתמטיקה ובין יכולתם להשתמש במילים מתמטיות בהתאם להגדרתן. מחקרים אלה מראים כי תלמידים נוטים להתעלם מהגדרות פורמליות של מושגים מתמטיים גם כאשר הם מסוגלים לצטט אותן בעל-פה (למשל Fischbein, 1996; Fischbein & Nachlieli, 1998; Hershkowitz & Vinner, 1984; Vinner, 1990; Wilson, 1990).

במהלך שני העשורים האחרונים יש עלייה במחקרים שטוענים כי אי אפשר להפריד בין שפה ובין למידת מתמטיקה (Chapman, 2003; Lemke, 2003; Morgan, 2005; O'Halloran, 2005; Pimm, 1987;

1. הקרן הישראלית למדע מימנה את המחקר הזה, מס' 446/10.

Schleppegrell, 2010; Veel, 1999). מחקרים אלה עוסקים בפיתוח שפה מתמטית בכיתת המתמטיקה ומתמקדים בשאלות, כמו כיצד משתמשים תלמידים במילים מתמטיות שונות? כיצד נלמדים שימושים אלה במילים?

במאמר זה אנו רואות במחקרים אלה נקודת מוצא כדי לשאול את השאלות: אילו תהליכי למידה קשורים לזיהוי מתווּך הגדרה של עצמים מתמטיים על-ידי סטודנטים להוראה? בייחוד מהו מנגנון הלמידה המאפשר לסטודנטים להוראה לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה? במילים "זיהוי מתווּך הגדרה" אנו נותנות דעתנו על תהליך של זיהוי עצמים מתמטיים לפי ההגדרה שלהם ולא על זיהוי לפי מראה או תכונות אחרות. כדי לענות על שאלות אלה אימצנו את הגישה התקשורתית לבחינת הפעולות שמבצעים סטודנטים כדי להגדיל את יעילות התקשורת ביניהם. במחקר זה בדקנו שיעורים שבהם סטודנטיות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי נדרשו לזהות עצמים שונים כפונקציה. לשם כך הן השתתפו בדיונים שהתמקדו במילים המופיעות בהגדרת המושג "פונקציה". במהלך הדיון נמצאה עדות לשינוי בשיח של הסטודנטיות באשר לשימוש שלהן במילה "פונקציה". במאמר זה ננתח את הפעולות של הסטודנטיות שנראה, כי הן קשורות לשינויים בדרך שבה הן השתמשו במילה פונקציה. המחקר מתמקד בנושא של פונקציות בשל מרכזיותו במתמטיקה הבית-ספרית ומעבר לה.

רקע תאורטי

בפרק זה נעסוק תחילה בהגדרות במתמטיקה, נסקור מחקרים על הגדרות בהקשר המתמטי הבית-ספרי בכלל ועל הגדרות של מושגים הקשורים לפונקציות בפרט. כמו כן נציג את עיקרי הגישה התקשורתית לחקר הלמידה.

הגדרות במתמטיקה

הייחוד של הגדרות במתמטיקה נובע מהמבנה ומהדיוק המאפיינים אותן. כבר במאה הרביעית לפני הספירה עסק אריסטו במושג של הגדרה מדעית, כולל המבנה והדרישות המייחדות אותו, בספריו *Topics VI* ו-*Posterior Analytics II*.

הגדרה מדעית צריכה לעמוד בדרישות הבאות: 1. הקבוצה המוגדרת על-ידי כל אחת מהתכונות המופיעות בהגדרה בנפרד גדולה יותר מקבוצת החיתוך המתקבלת כאשר עוסקים בכל התכונות יחד; 2. הגדרה צריכה להיות מנוסחת בעזרת מושגים קודמים (Euclid, 1956), כלומר המושגים שבהם נעשה שימוש בעת הגדרת מילה צריכים להיות מוגדרים קודם לכן.

בניסוח הגדרה יש לנסח את הסוג (genus) ואז להבחין (differentia) בין המילה המוגדרת ובין שאר המושגים השייכים לאותו הסוג:

A correct definition must define a thing through its genus and its differentiae, and these

> belong to the order of things which are absolutely more intelligible than, and prior to, the species. For annul the genus and differentia, and the species too is annulled, so that these are prior to the species (Aristotle, 384-322 BC).

הגדרות מתמטיות הן מדויקות וכוללות תנאים הכרחיים ומספיקים שעל פיהם אפשר לקבוע האם עצם נתון משמש דוגמה למושג. ההגדרה צריכה לכלול את הסוג והאבחנות, להיות מינימלית ולא מעגלית (Copi, 1972).

הגדרות נחוצות למטרת דיוק, וגם כדי להבטיח שכל האנשים משתמשים באותה המילה שימוש דומה. השימוש במילים במתמטיקה לפי הגדרותיהן הוא תנאי הכרחי ליצירת שיח קוהרנטי, שבו המשתתפים כולם יכולים להיות בטוחים כי הם מדברים על אותו הדבר. בייחוד מיון של דוגמאות ואי-דוגמאות של עצמים מתמטיים על-פי ההגדרה יביא לידי מיון זהה של בני-שיח שונים.

חוקרים רבים בחינוך מתמטי עמדו על מרכזיותה של ההגדרה במתמטיקה וגם על מרכזיותה בתהליכי למידה והוראה בבית הספר ובתארים מתקדמים (Godino, Batanero, & Font, 2007; Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005).

הגדרות ושימוש במילים

השימוש במילים מתמטיות נקבע על-פי ההגדרות שלהן. בבית הספר זה לא בהכרח המקרה. מחקרים רבים בתחום החינוך המתמטי התמקדו בדרך שימוש בהגדרות בשיעורי המתמטיקה ובדרכים שבהן תלמידים משתמשים במילים המוגדרות (Alcock & Simpson, 2002; Meehan, 2002) וכן הבחינו בין הגדרת המושג (concept definition) ובין הדימוי למושג (concept image) הנוגע לאוסף הדימויים שיש ליחיד על מושג נתון (Vinner, 1982). מחקרים מגוונים בחנו את תפקיד ההגדרה בבניית מושגים מתמטיים ובהתגברות על תפיסות מוטעות (De Villiers, 1994; Fischbein, 1996; Freudenthal, 1973; Hershkowitz & Vinner, 1983; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, & Tabach, 2015; Vinner, 1982). ברוב המחקרים נחקרו הגדרות מתמטיות בתוך המסגרת המושגית של "המשגה של תלמידים" או "המשגות" (Conceptualization) (Fischbein, 1996; Hershkowitz & Vinner, 1983; Mountwitten, 1994; Tall, 1991; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1982; Vinner & Hershkowitz, 1980), או תפיסות תלמידים כלפי הגדרות במתמטיקה (Edwards & Ward, 2004; Shir & Zaslavsky, 2002; Zaslavsky & Shir, 2005).

מחקרים רבים תיעדו את הפער בין ההגדרה הפורמלית של מושג שנלמדה בבית הספר ובין הדרכים שבהן תלמידים השתמשו במושג (Hershkowitz & Vinner, 1984; Meehan, 2002; Wilson, 1990). כמה מחקרים אף ניסו להסביר את הפער. כך בגאומטריה ההסבר העיקרי לכך נוגע לתאוריה של פישביין על "מושגים צורניים"[2] – Figural concepts (Fischbein, 1993), ולרעיון שדיון נפרד להיבטים

2. פישביין עסק בטבע הדואלי של צורות גאומטריות הכולל היבט פורמלי והיבט צורני. בתאוריה צורה גאומטרית היא ישות הנשלטת שליטה מוחלטת ובלעדית על-ידי הגדרה, ולכן היא מושג מופשט. אולם בפועל, לעתים קרובות התכונות הוויזואליות של הצורות, כמו

הצורניים והפורמליים של צורות גאומטריות עלול להביא לידי רעיונות לא עקביים על צורות גאומטריות (Fischbein & Nachlieli, 1998; Furinghetti & Paola, 2000), או לאי-התאמה בין הגדרות מתמטיות ובין הגדרות מילוניות (Edwards & Ward, 2004; Vinner, 1990, 1991; Wawro, Sweeney, & Rabin, 2011; Wilson, 1990).

עם התפתחותן של תאוריות הרואות בשפה ולמידה קרובות שאי אפשר להפריד ביניהן, נערכו מחקרים שהמשיגו מתמטיקה כשיח או שפה (Chapman, 1995; Pimm, 1987; Morgan, 2005; Solomon, 2006). בעבודתו פורצת הדרך, עסק פים (Pimm, 1987) בהבדלים שבין השימוש היומיומי במילים ובין השימוש שלהן בשפה מתמטית. ההבדלים נבעו לא רק משימוש שונה באותה מילה, אלא גם ואולי בעיקר מהדרך שבה נקבע השימוש במילה. במתמטיקה דיוק נובע בין השאר משימוש במילה לפי הגדרתה הפורמלית. דוגמה לכך אפשר למצוא במחקרן של קים, פריני-מנדי וספרד (Kim, Ferrini-Mundy, & Sfard, 2012). הן חקרו שתי קבוצות של תלמידים הדוברים שפות שונות: עבור האחת, המילה אינסוף הייתה חלק מהשיח היומיומי ולכן התלמידים השתמשו במילה מתמטית זו ("אינסוף") בהקשרים יומיומיים לפני הלימוד הפורמלי שלה. עבור הקבוצה השנייה, המילה אינסוף לא הייתה חלק מהשפה היומיומית ולכן התלמידים לא השתמשו במילה הזו לפני הלמידה הבית-ספרית. החוקרות מצאו כי לאחר הלימוד הפורמלי התלמידים בכל קבוצה השתמשו במילה בדרך אחרת בהקשר המתמטי.

מחקרים אחרים בחנו את הסוגיה של הגדרות מתוך שימוש במסגרת בלשנית הנשענת על בניית ידע או יצירת משמעות (Schleppegrell, 2007). מסגרת זו עוסקת בשאלה כיצד בניית משמעות, הנתפסת כפעולה אקטיבית הנוצרת מתוך אינטראקציה בקבוצות לומדים, נבנית באופן חברתי (Borasi, 1992; Chapman, 2003; Halliday & Hasan, 1985). מחקרים אלה התמקדו באינטראקציה וראו בדיונים העוסקים במשמעות כמהותיים ללמידה. בדיונים אלה ההגדרות מילאו תפקיד מרכזי כאמצעי לבניית משמעות (למשל Herbst, Gonzales & Macke, 2005; Kobiela, & Lehrer, 2015). ועדיין עולה מהמחקר כי פעמים רבות זה לא המצב בבתי הספר. מורגן (Morgan, 2005) טוענת כי בעוד מתמטיקאים רואים הגדרות כישויות דינמיות שנוצרו על-ידי גורם אנושי, ההגדרות המופיעות בספרי הלימוד הן לרוב סטטיות ואינן כוללות סוכן אנושי. לפי סלומון (Solomon, 2006), תלמידים לומדים הגדרות, משפטים והוכחות כחלק מלמידה מכוונת, שינון וביצוע פרוצדורות, ולא בדרך של משא ומתן המשמעותי ללומדים. צ'פמן (Chapman, 1995) טוענת כי ההגדרות המופיעות בספרי הלימוד מניחות כי קיימים קשרים מסוימים בין מושגים, ולכן היא מדגישה את תפקיד המורה בפענוח קשרים אלה.

גודל, צורה ואפילו צבע, הן שמשתלטות על החשיבה (Fischbein, 1993).

פונקציות והגדרות

נושא הפונקציות מופיע לרוב במפורש בתכנית הלימודים במתמטיקה של חטיבות הביניים (משרד החינוך, 2012), ומשמש יסוד מרכזי במהלך הלימודים בבית הספר התיכון ומעבר לו. יותר מכך, בחינה מדוקדקת של תכנית הלימודים בבית הספר היסודי מגלה נושאים כמו דגמים, וריאציות ושינוי (כבסיס ללימודי אנליזה) שבמהותם הם פונקציות. אפשר לתאר פונקציות כמושג מופשט בעזרת מערכות סימבוליות, כמו ביטויים אלגבריים וגרפים. לפיכך נושא הפונקציות הוא אחד הראשונים במתמטיקה הבית ספרית, שבהם הבנת תלמידים לגבי מערכת סמלים אלגברית וגרפית יכולה להתפתח מתוך היזון הדדי (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). תלמידים ניצבים מול קשיים מגוונים במהלך שימוש בביטויים אלגבריים ובגרפים, ועדיין המחקר מראה כי למידה משולבת של שתי המערכות תומכת בפיתוח הבנת התלמידים לגבי כל מערכת בנפרד.

פונקציות עשויות לשמש במידול תופעות המובאות בדרך מילולית, נומרית או ויזואלית. כיוון שפונקציות הן רעיון רב-שכבתי מורכב, מרכיב חשוב בהבנתן הוא השטף במעבר בין מערכות ייצוג שונות של אותה הפונקציה (Even, 1990). המורכבות הטמונה בלמידת פונקציות הופכת נושא זה לכר פורה למחקר על תהליכי למידה והוראה.

ואכן, מושג הפונקציה נחקר כמעט חמישה עשורים. המחקר על למידת פונקציות עבר כמה שינויים בפרק זמן זה: מֵידע של לומדים בנקודת זמן נתונה (Even, 1990; Piaget, 1957; Zaslavsky, Sela, & Leron, 2002) לחקר תהליך הלמידה עצמו; מֵידע על שימוש בעדשה מחקרית קוגניטיבית בלבד (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Schoenfeld, Smith III, & Arcavi, 1993; Schwarts & Hershkowitz, 1999) לאימוץ גישות סוציו-תרבותיות ללמידה (Moschkovich, 2004); ממחקר היחיד הלומד במעבדה (Chiu, Kessel, Moschkovich, & Muñoz-Nuñez, 2001) למחקר כיתה (Nachlieli & Tabach, 2012; Walter & Gerson, 2007) ואף לחקר הרצאות בנושא פונקציה באוניברסיטאות (Viirman, 2014); מסביבות נייר ועיפרון לסביבות טכנולוגיות (Keller & Hirsch, 1998; Yerushalmy, 2006). עם זה מחקרים שהתמקדו בניתוח של תהליכי למידה בכיתה ולא רק של הישגי הלומדים בתום התהליך הם מעטים. במחקר כיתה אפשר להתמקד בתהליכי למידה, הוראה או ביחסים שבין הוראה ללמידה. המיקוד יכול להיות בלומד היחיד, בקבוצה או במליאה. המחקר הנוכחי אימץ גישה סוציו-תרבותית ומתמקד בחקר הלמידה בקבוצה כדי לזהות את ניסיונות הלומדים להשתמש במילה "פונקציה".

תלמידים נתקלים בקשיים מגוונים בבואם ללמוד על פונקציות בכלל ועל סוגים מסוימים של פונקציות בפרט. נמצא כי פונקציה קבועה, פונקציה המוגדרת בחלקים ופונקציה המוגדרת בתחום בדיד (למשל מוגדרת עבור המספרים הטבעיים בלבד) אינן מזוהות כפונקציות על-ידי לומדים (Even, 1990; Leinhardt et al., 1990; Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986). בדרך כלל לומדים רבים סבורים כי פונקציה מוגדרת על-ידי ביטוי סימבולי בלבד (Even, 1990; Markovits et al., 1986). כמו כן הפונקציה הקווית משמשת אב-טיפוס במובן שלעתים קרובות לומדים פועלים על בסיס ההנחה

המוטעית שרק גרף יחיד של פונקציה יכול לעבור בין שתי נקודות נתונות במישור – הגרף של פונקציה קווית (Even, 1990; Markovits et al., 1986; Schwarts & Hershkowitz, 1999).

הקושי המרכזי של תלמידים בנושא פונקציה בחלקים הוא שהם סבורים כי חוק התאמה אחד צריך להיות תקף לכל התחום שבו הפונקציה מוגדרת (Vinner, 1983). לפיכך, התלמידים לא מקבלים כללי התאמה שונים כרלוונטיים לתחומים שונים של הפונקציה (Markovits et al., 1986).

מחקרים שבחנו את השימוש בהגדרות של פונקציה ככלי לזיהוי דוגמאות ואי דוגמאות הראו כי לעתים לומדים המסוגלים לצטט את ההגדרה, פועלים בדרכים הסותרות את ההגדרה (Tall & Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). נראה למשל את מחקרו של וינר (Vinner, 1991) שבחן 147 תלמידי תיכון בכיתות י'-י"א. הוא מצא כי מתוך 57% שהיו מסוגלים לנסח הגדרה נכונה לפונקציה, רק שליש השתמשו בהגדרה שימוש נכון וזיהו פונקציות מתוך דוגמאות נתונות. הוא הסיק כי "תלמיד התיכון הממוצע שאינו מתמחה בכיוון מדעי, לא פיתח את הרגלי החשיבה הדרושים להקשר מדעי. תלמידים המשיכו להפעיל הרגלי חשיבה יומיומיים גם בהקשרים מדעיים" (שם, עמ' 73).

ממצאי המחקרים שדווחו לעיל מבוססים על נתונים שנאספו באמצעות שאלונים וראיונות, ולפיכך דיווחו על ידע לומדים בנקודת זמן נתונה. מחקר קודם שלנו עקב אחרי תהליכי למידה-הוראה בקרב לומדים בכיתה ז' שלמדו בקורס שהתנהל חודשיים בערך, והם נחשפו לראשונה לראשית האלגברה בכלל ולפונקציות בפרט (Nachlieli & Tabach, 2012). מצאנו כי לומדים יכלו להשתתף בשיח על פונקציות בלי לעסוק ישירות בעצם המתמטי המתהווה – פונקציה. הלומדים הצליחו להתאים לבעיות את רוטינות הפתרון שלהן באמצעות רמזים (מילות מפתח שהופיעו בניסוח הבעיות) שהיו רגישים אליהם מתוך ניסיון העבר שלהם כלומדים. הסקנו כי אף שהלומדים עדיין היו בשלב מוקדם של הלמידה, השתתפותם בקורס הניחה בסיס מוצק לשיח העתידי שלהם באשר לפונקציות. במחקר הנוכחי צפינו בסטודנטים שלמדו את נושא הפונקציה בפעם השנייה כדי לאפיין את תהליכי הלמידה הקשורים ללמידת פונקציות.

הגישה התקשורתית לחקר הלמידה

הגישה התקשורתית (קומוגניטיבית)[3] (Sfard, 2007, 2008) היא גישה סוציו-תרבותית לחקר תהליכי למידה. במסגרת זו "חשיבה" מוגדרת כהפנמה של תקשורת של היחיד עם עצמו – לאו דווקא מילולית.[4] שיח הוא סוג מיוחד של תקשורת שכולל פעולות מגוונות הנתפסות כלגיטימיות ותגובות על פעולות אלו. ככל תחום אקדמי אחר, מתמטיקה נחשבת כסוג של שיח, כלומר סוג של תקשורת שאפשר לאפיין אותו על-ידי ארבעה משתנים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, רוטינות ונרטיבים מקובלים.

מילים והשימוש בהן: לכל שיח מקצועי יש אוצר מילים הייחודי לו. מילים והשימוש בהן הוא מרכזי

3. הגישה התקשורתית נקראת גם הגישה הקומוגניטיבית (commognition). המילה **קומוגניציה** היא שילוב של שתי מילים, תקשורת (**קומו**ניקציה) וחשיבה (קו**גניציה**), ובכך מדגישה איחוד מושגי זה.
4. זה נמצא בהלימה לתאוריה של ויגוצקי על פונקציות מנטליות עיליות המופיעות תחילה במישור החברתי, ורק לאחר מכן מופנמות (Vygotsky, 1986).

לשיח, כי פעמים רבות המילים מכתיבות מה אפשר לומר על העולם. לדוגמה, המילים פונקציה, שיפוע או קבוצה משמשות בשני שיחים – המתמטי והיומיומי. ועם זה השימוש בהן שונה בכל אחד מהשיחים. שני המשפטים הבאים: "הפונקציה של מחשבים בחיינו השתנתה באופן משמעותי בעשור האחרון" ו"הגרף של פונקציה קווית הוא קו ישר" כוללים את המילה פונקציה. ועדיין כל משפט צמח בשיח שונה – ההגדרה של המילה פונקציה במשפט הראשון שונה מהמשפט השני.

מתווכים ויזואליים: אלה הם עצמים שפועלים כחלק מן התקשורת. מתווכים ויזואליים בשיח מתמטי כוללים ביטויים סימבוליים המתווכים רעיונות, כמו מספרים וגרפים. בעוד שהשיח היומיומי מתווך בעיקר בדימויים של עצמים מוחשיים הקיימים בדרך שאינה תלויה בשיח מסוים במציאות, רוב הסמלים והמתווכים בשיח המתמטי נוצרו למטרות תקשורת. מתווכים ויזואליים של פונקציה כוללים בעיקר גרפים, תרשימים, טבלאות, ביטויים סימבוליים ועוד. לעתים רואים במתווכים אלה "ייצוגים של פונקציות" המשקפים עצם קיים. אולם אנו רואים באובייקטים המתמטיים עצמים דיסקורסיביים הנוצרים בתוך השיח ועל ידו, ולכן נשתמש בצמד המילים "מתווכים ויזואליים".

רוטינות: רוטינות הן קבוצה של כללי-על המגדירים דפוסי תקשורת החוזרים על עצמם במצבים דומים. לדוגמה, הרוטינה המקובלת לזיהוי עצמים מתמטיים כוללת בחינה – האם העצם ממלא אחר התנאים המצוינים בהגדרה למילה זו. לכן כדי לזהות התאמה כפונקציה, יש לברר האם ההתאמה ממלאת אחר התנאים המפורטים בהגדרת פונקציה. כלומר רוטינות לזיהוי עצמים מתמטיים הן מתווכות הגדרה (ההגדרה מתווכת את הקביעה), ואילו רוטינות לזיהוי עצמים בשיח היומיומי הן לעתים קרובות על-פי מראה, צליל או מאפיינים אחרים.

נרטיבים מקובלים: אלה הם סיפורים שיכולים להיתפס כנכונים על-ידי הקהילייה המתאימה. נרטיבים מקובלים במתמטיקה הם אותם סיפורים ההופכים להיות "עובדות מתמטיות", כמו אקסיומות, הגדרות ומשפטים. נרטיבים אלה הם תוצאות מתומצתות (condensed) של סיפורים שהתפתחו ברבות הימים. כך למשל הגדרה לפונקציה היא נרטיב שהוא תוצאה של שינוי רעיונות של מתמטיקאים לעניין פונקציה. שינויים אלה נגרמו פעמים רבות עקב שינויים בתחומים מתמטיים והתפתחות של תחומים חדשים.[5]

על-פי הגישה הקומוגניטיבית, למידה היא שינוי בשיח המתמטי של הלומד. שינוי זה יכול להיות בכל אחד מארבעת המאפיינים של השיח המתוארים לעיל. אפשר להבחין בין למידה ברמת העצמים (object-level) או ברמת-העל (meta-level). למידה ברמת עצמים מרחיבה את השיח הקיים של המשתתפים, כלומר מרחיבה את מגוון הרוטינות ו/או הנרטיבים המקובלים של המשתתפים הקשורים לעצמים מסוימים. לעומתה, למידה ברמת-על כוללת שינויים בכללי-העל של השיח, בכללי המשחק, והם התוצר של רפלקציה על השיח הקיים בכללותו. כך למשל השיח המתמטי של ילד על המספרים הטבעיים בטרם פיתח את השיח שלו על שברים, כולל את הנרטיב (שאינו בהכרח מפורש או מודע) ש"פעולת הכפל

5 . המילה נרטיב נראית פעמים כמטעה בכך שהיא נראית כשייכת לממד זמן ברור בעוד הגדרות, אקסיומות ומשפטים נראים "חסרי זמן". אולם קיימים גם "סיפורים" חסרי ממד זמן. למשל "דולפינים הם יונקים" הוא סיפור החסר את ממד הזמן. הגדרות מתמטיות הן נרטיבים כיוון שהם התפתחו באמצעים תקשורתיים בקהילייה של המתמטיקאים, והם שבים ומתוקשרים בקהיליית הכיתה.

מגדילה". הרחבת השיח של הילד על מספרים, מהטבעיים בלבד למספרים הרציונליים, כוללת שינויים בכללי-העל של השיח, כמו אלה הנוגעים לפעולת הכפל.

התפתחות שיח ברמת-על יכולה להיות בעלת אופי אופקי או אנכי. התפתחות בכיוון אופקי כרוכה בשילוב של שיחים נפרדים לשיח אחד על-ידי איחודם לשיח חדש. לדוגמה, התפתחות אופקית של שיח על פונקציות כוללת איחוד של כמה שיחים – שיח על ביטויים סימבוליים, שיח על גרפים ושיח על פעולות על מספרים (Nachlieli & Tabach, 2012). התפתחות אנכית כרוכה בשילוב שיחים קיימים עם שיח-העל שלהם עצמם (Sfard, 2008). במאמר זה נביא דוגמה מפורטת של התפתחות אנכית של שיח על פונקציות (ראו פרק הדיון). למידה ברמת-על יכולה להיות תוצאה של שיח מפורש על הדרכים שבהן יש להשתמש במילים. קונפליקט תקשורתי עשוי להיות המנגנון שעומד בבסיסה של התפתחות שיח זו.

קונפליקט תקשורתי: מצב שבו בני השיח משתתפים בשיח עם כללי-על שונים נקרא קונפליקט תקשורתי. כפי שהגדירה ספרד:

> The phenomenon that occurs when seemingly conflicting narratives are coming from different discourses – from discourses that differ in their use of words, in the rules of substantiation, etc (Sfard, 2007, p. 578).

קונפליקט תקשורתי יכול להיפתר בכך שתלמידים מקבלים ומאמצים את דרכי השיח של משתתף מומחה (Sfard, 2007). כלומר כדי לפתור קונפליקט תקשורתי בני השיח צריכים לבטא באופן מפורש את הדרכים שבהן הם משתמשים במילים, להקשיב זה לזה, לזהות את ההבדלים בדרכי השימוש במילה ואז להסכים על דרך שימוש מקובלת. על-פי ספרד, זהו השימוש של המומחה או של משתתף מרכזי בשיח (Sfard, 2008). כלומר פתרון של קונפליקט תקשורתי כולל השתתפות בדיון ברמת-על על דרכים לשימוש במילים (ראו דוגמה בהמשך מאמר זה).

שיטות

שאלת המחקר

אילו תהליכי למידה קשורים לשימוש בהגדרות לשם זיהוי עצמים מתמטיים? בייחוד מהו מנגנון הלמידה המאפשר לתלמידים לדון בהגדרה ולאמצה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון כפונקציה?

המשתתפים במחקר ואיסוף הנתונים

הנתונים למחקר זה נלקחו מפרויקט שמתמקד בזיהוי תהליכי למידה והוראה במהלך קורס חובה בנושא של פונקציות. המשתתפות הן סטודנטיות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, הלומדות בשנה א' במכללה להכשרת מורים במרכז הארץ. כל 18 הסטודנטיות שהשתתפו בקורס, למדו בעבר את הנושא "פונקציות" בעת לימודי המתמטיקה בתיכון, ועברו בהצלחה את בחינות הבגרות. כל הסטודנטיות הן מעל גיל 19 והן בעלות נתוני רקע מגוונים, כולל רמת לימודי המתמטיקה שלהן בתיכון. את הקורס

לימדה במכללה מרצה בעלת תואר דוקטור בהוראת המתמטיקה זה למעלה מעשור.

כל השיעורים היו בעלי מבנה דומה – פתיחה במליאת הכיתה מלווה בעבודה בקבוצות. המרצה כינסה את הקבוצות לדיון מליאה מסכם. בכל קבוצה היו שלוש-ארבע סטודנטיות. את הקבוצות יצרו הסטודנטיות והן נשארו יציבות בכל הקורס. תיעדנו בווידֵאו את דיוני המליאה בכל 14 השיעורים בקורס ותכתבנו אותם. במהלך השיעורים רשמנו רשימות שדה וצילמנו את העבודה הכתובה של הסטודנטיות. כמו כן במהלך עבודת הקבוצות הקלטנו את עבודתן של שתי קבוצות מסוימות שנבחרו באקראי.

ניתוח הנתונים

כדי לזהות תהליכי למידה אימצנו את המסגרת התקשורתית לניתוח שיח (Sfard, 2008) שתיארנו לעיל. הניתוח כלל סקירה מקיפה של הנתונים כדי לאתר חלקים בשיח שבהם הסטודנטיות היו מעורבות בזיהוי פונקציות במהלך העבודה בקבוצות. התוצאה של הסקירה העלתה שעיסוק זה רווח בשיעורים 4 ו-5, ופעילויות אלה לא נצפו בשיעורים אחרים. כדי להבין טוב יותר את תהליכי הלמידה הקשורים בזיהוי פונקציות, חיפשנו את חלק השיעור שבו המרצה הציגה לראשונה את המילה פונקציה בכיתה. לאחר מכן ניתחנו את כל התכתובים של עבודת הקבוצות שבהם התרחש זיהוי פונקציות והתמקדנו בנרטיבים וברוטינות הקשורים לזיהוי פונקציות.

בפרק הבא נציג חלק מן עבודת הקבוצות שנבחרו כך שיאפשרו לקורא ליצור תמונה שלמה של תהליך הלמידה שחוו הסטודנטים.

ממצאים

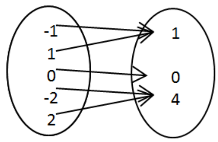
בחלק זה נתאר חמישה קטעים שלקחנו משני שיעורים עוקבים (שיעורים 4 ו-5), שבהם הסטודנטיות היו מעורבות בפעילות לזיהוי פונקציות. עבור כל אחד מהקטעים נציג את ההקשר ואת התכתוב הרלוונטי מלווה בניתוח. הניתוח מתמקד בתהליכים הקשורים לשימוש של הסטודנטיות במילה "פונקציה". נציג תחילה את רצף הפעילויות בשיעורים.

רצף הפעילויות בשיעורים

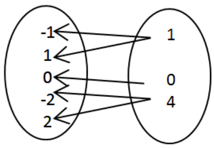
המרצה הציגה במפורש את המילה "פונקציה" בהצגת ההגדרה שלה. המרצה ליוותה את הצגת ההגדרה בדוגמה ובאי-דוגמה (בלוויית דיאגרמות), והראתה כיצד ההגדרה משמשת לקביעה האם מדובר בפונקציה (שימוש מתווך הגדרה במילה, קטע 1). לאחר מכן הסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות כדי לברר האם טבלאות נתונות הן דוגמאות לפונקציה (קטעים 2 ו-3), והאם גרפים נתונים הם דוגמאות לפונקציה (קטע 4). לבסוף נערך דיון במליאת הכיתה כדי לברר האם גרף נתון הכולל עצמים לא מוכרים (עיגולים מלאים וריקים), משמש דוגמה לפונקציה (קטע 5).

קטע 1: הגדרת המילה "פונקציה"

שיעור 4 כלל דיון מליאת כיתה על שתי התאמות: האחת מתאימה מספר לריבועו (איור 1) והשנייה מתאימה מספר לשני השורשים הריבועיים שלו (איור 2).



איור 1: דוגמה לפונקציה



איור 2: דוגמה ללא-פונקציה

המרצה השוותה בין ההתאמות והתמקדה בכמה מקורות לכל תמונה ובכמה תמונות לכל מקור. המרצה הציגה את המילה "פונקציה" כחלק מרצף ההוראה המתוכנן בשיעור (ראו תכתוב 1). הצגה זו כללה את הגדרת המילה. עד לרגע זה המילה "פונקציה" לא נאמרה במהלך הקורס.

תכתוב 1: מגדירים "פונקציה"

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מרצה	בואו נדבר על פונקציות, כולם, בואו נרשום פונקציה. היום אנחנו מכירים פונקציה ואנחנו נעשה עכשיו פעילות על זה, אוקי? פונקציה, התאמה.
2	מרצה	פונקציה, התאמה המקיימת שלכל מקור מתאימה תמונה יחידה עם שני קווים תחת ליחידה. [במהלך הכתבה היא רושמת על הלוח: "פונקציה, התאמה המקיימת שלכל מקור מתאימה תמונה יחידה."]
3	מרצה	אוקי, לפי ההגדרה הזאת האם זאת פונקציה? [מצביעה על איור 1]
4	סטודנטיות	כן.
5	מרצה	האם זאת פונקציה? [מצביעה על איור 2]
6	סטודנטיות	לא.
7	מרצה	אוקי, מה שאני רוצה עכשיו זה לחלק לכן משימה...

המרצה הכתיבה הגדרה פורמלית למילה פונקציה[6] והדגישה חלקים מסוימים – "קו כפול מתחת ל[מילה] יחידה" (2). לאחר שקיבלו את ההגדרה, זיהו המשתתפות את שתי הדיאגרמות המוצגות על הלוח כדוגמה וכאי-דוגמה למילה פונקציה. המרצה ביקשה מהסטודנטיות במפורש לעסוק בהגדרה כדי לקבוע האם מדובר בדוגמה לפונקציה (3). הסטודנטיות לא הפגינו כל קושי בשימוש במילה פונקציה בדיון על שתי הדיאגרמות (4, 6), ולא התנגדו לשימוש בהגדרה כמתווך לזיהוי פונקציה. השיחה הסתיימה כאשר המרצה שינתה את מבנה הפעילות וביקשה מהסטודנטיות לעבוד בקבוצות קטנות על דף עבודה שכלל כמה טבלאות. באשר לכל טבלה התבקשו הסטודנטיות לזהות האם מדובר בפונקציה.

קטע 2: לכל מקור יש תמונה

6. אף שיש הגדרה פורמלית שונה למילה פונקציה, הגדרה זו מופיעה בספרי לימוד רבים.

הסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות כדי לענות על השאלה האם הטבלאות הנתונות מתווכות פונקציה (למשל ראו איור 3). מתוך ההיבט המתמטי הן ניסו להבחין בין טבלאות שיכולות להיות מתווכים ויזואליים של פונקציה ובין אלו שלא. המרצה הסתובבה בין הקבוצות העובדות, וביקשה מקבוצות שהגיעו למסקנות סותרות לגבי הזיהוי של אותן טבלאות לשבת יחד ולהגיע להסכמה. בשל כך יצרו קבוצות I ו-II קבוצה חדשה (תכתוב 2) וקבוצות III ו-IV יצרו אף הן קבוצה חדשה (תכתוב 3).

השיחה בין הסטודנטיות בקבוצה I (תמי, לימור וספיר[7]) לסטודנטיות בקבוצה II (אריאל וגיל) ניסתה להבהיר האם התאמה b היא פונקציה (איור 3).

X	Y
5	4
1	0
3	2
0	-1
2	

איור 3: התאמה b – האם היא פונקציה?

תכתוב 2: לכל מקור יש תמונה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	תמי	I	למה זה פונקציה? [מסתכלת באיור 3]
2	אריאל	II	איקס מינוס אחד
3	לימור	I	יפה, אבל
4	ספיר	I	אין לך תמונה, ל-2
5	גיל	II	אז זה, אבל, אה... לא דיברנו על זה
6	לימור	I	נכון, הגענו למסקנה הזאת לבד, לפי ההגדרה
7	אריאל	II	זהו, כי לא דיברנו על זה שחייב להיות מקור לכל תמונה
8	ספיר	I	לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור מתאימה תמונה יחידה
9	אריאל	II	לכל מקור... [מתחילה לקרוא את ההגדרה]
10	גיל	II	אבל חייבת להיות תמונה?
11	סטודנטיות	I	כן, בטח!
12	אריאל	II	לכל מקור מתאימה תמונה יחידה [מסתכלת בהגדרה במחברת]
13	גיל	II	אז לא הבנו את זה בשלושת השיעורים אחרונים
14	ספיר	I	זה לא קשור לשיעורים! זה קשור לעכשיו.
15	לימור	I	זה לא קשור, זה הגדרה שעכשיו קיבלנו
16	תמי	I	זה רק בגלל ההגדרה
17	אריאל	II	רגע, וב- c [עוברת להשוות את הסעיף הבא]

7. כל השמות במאמר זה הם בדויים.

מבחינת התוכן, 17 תורי הדיבור יכולים להיות מחולקים לשלושה חלקים: תורים 1-7, 7-12[8] ו-13-17. הדיון המובא כאן עוסק בכל חלק בנפרד.

חלק א: אי-ההסכמה (תורים 1-7)

קבוצה II זיהתה את ההתאמה b כפונקציה על-פי הביטוי "איקס פחות אחד" (2) המקשר בין התחום וטווח הנתונים. קבוצה I זיהתה את ההתאמה b כלא פונקציה על-פי מקור שאין לו תמונה מתאימה "אין תמונה ל-2" (4). נראה שהסטודנטיות בשתי הקבוצות מסכימות על הטענות ברמת עצמים ("איקס מינוס אחד" הוא מתווך ויזואלי המבטא את הקשר בין הנתונים בטבלה, וכן למקור "2" אין תמונה). הסכמה זו באה לידי ביטוי במילים "יפה" (3) ו"נכון" (6). כמו כן כל קבוצה זיהתה את הטבלה כפונקציה או כ"לא פונקציה" על-פי כלל כלשהו. כלומר הזיהוי מתווך על-ידי נרטיב. לכן אנו רואות בשימוש של שתי הקבוצות במילה "פונקציה" תוצר של בחירה ברמת-על.

אם כך, אי-ההסכמה בין הקבוצות היא ברמת-על, כפי שעולה מהשימוש במילים "אבל" (3), "אה" (5) ו"זהו" (7).

בעוד שקבוצה I רואה בהפרה של דרישה המופיעה בהגדרה סיבה לדחיית טבלה b כפונקציה (4), קבוצה II שואלת על הרלוונטיות של ההגדרה: "אז זה, אבל, אה... לא דיברנו על זה" (5). השימוש במילה המצביעה (deictic) "זה" אינו ברור. היא יכולה לעסוק ברעיון הכללי של שימוש בהגדרה כנרטיב רלוונטי, או לעסוק בעובדה שבטבלה b למקור 2 אין תמונה. תגובת קבוצה II לקבוצה I כוללת את המילים "אה" בתור 5 ו"זהו" בתור 7 המרמזות על כך שהסטודנטיות של קבוצה II לא נדרשו לסוג זה של טיעון ולרלוונטיות של ההגדרה במקרה זה, כפי שעשו הסטודנטיות מקבוצה I.

חלק ב: שימוש בכמת "לכל" (תורים 7-12)

השימוש בכמת "לכל" עומד במרכז קטע זה. בעוד שקבוצה I השתמשה בכמת "לכל" כעדות להיצמדות להגדרה המתמטית (תורים 8, 12), קבוצה II שואלת על הנחיצות שלו כפי שנלמד מהשימוש במילה "חייבת" בשאלה "אבל חייבת להיות תמונה?" (10). כדי להבין טוב יותר את מהות אי-ההסכמה נבחן לעומק את תורי דיבור 7 ו-8:

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
7	אריאל	זהו, כי [אנחנו] לא דיברנו על זה שחייב להיות מקור לכל תמונה
8	ספיר	לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור יש תמונה יחידה

התגובה של ספיר בתור 8 כוללת התנגדות ("לא, אבל"). כדי להבין למה היא מתנגדת, נתנו דעתנו על המשתתפים בכל אמירה. בתור 7 המשתתפים הם "אנחנו" (משתתף אנושי), בעוד שבתור 8 המשתתף הוא "ההגדרה". כמו כן בתור 7 הפעולה היא "לא דיברנו", ואילו בתור 8 ההגדרה פסיבית ("לפי"). כלומר ייתכן שספיר מתנגדת לכך כי "אנחנו" ומה שאנו אומרים (או לא אומרים) הם בעלי הסמכות

8. הערה: תור 7 שייך לשני חלקים. לעתים הגבולות שבין חלקי השיח הם מטושטשים.

לקבוע את השימוש במילה "פונקציה". כמו כן בתור 7 אריאל מאתגרת את הצורך בקיום תמונה לכל מקור. בתגובתה, ספיר מצטטת כי "לכל מקור יש..", כלומר היא מדגישה שחייבת להיות תמונה לכל מקור (8). נראה כי אריאל מסכמת חלק זה בציטוט מה שנראה כפתרון של אי-ההסכמה: "לכל מקור חייבת להיות תמונה" (12).

חלק ג: קבלת חוקי המשחק (תורים 13-17)

חלק זה נפתח בתגובתה של גיל (קבוצה II) על אי-ההסכמה: "אז לא הבנו את זה בשלושת השיעורים האחרונים" (13). השימוש במצביע (deictic) "זה" מרכזי להבנה מה בעיניה של גיל חיוני כדי לפתור את המטלה, ולא הובן מאז תחילת הקורס. המילה "זה" יכולה לעסוק בכמה דברים: (1) הרעיון שהנרטיב המתווך זיהוי פונקציה הוא ההגדרה, כלומר בתהליך של החלטה האם התאמה b היא פונקציה, הדרישות המופיעות בהגדרה צריכות להתמלא; (2) כדי שההתאמה b תתווך פונקציה, "לכל מקור צריכה להיות תמונה" (מיקוד מקומי-ספציפי); (3) קיומו של ביטוי סימבולי המתווך את ההתאמה אינו רלוונטי להחלטה האם מדובר בפונקציה.

תורים 14-16 מראים כי לפחות שלוש מתוך ארבע סטודנטיות בקבוצה I רואות בהגדרה את הנרטיב שעל פיו המילה פונקציה צריכה להיות בשימוש. עדיין לא ברור בשלב זה האם סטודנטיות מקבוצה II מקבלות את הפרשנות הזו של ההגדרה ואת הרלוונטיות שלה כנרטיב המכריע בשאלה האם התאמה נתונה היא פונקציה. עם זה הן לא מביעות התנגדות. קטע זה מסתיים במעבר של הסטודנטיות לדיון בהתאמה הבאה (17).

סיכום קטע 2

טבלה 1 מסכמת את הנרטיבים והרוטינות שהעלו הסטודנטיות בניסיון לקבוע האם התאמה b מתווכת פונקציה.

טבלה 1: נרטיבים ורוטינות של סטודנטיות לזיהוי פונקציות

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
2	התאמה שאפשר לתאר בעזרת ביטוי סימבולי היא פונקציה (קבוצה II)	מציאת ביטוי סימבולי המתאר את ההתאמה הנתונה. אם נמצא ביטוי כזה, אז מדובר בפונקציה.	(2) איקס פחות אחת
2	התאמה שאפשר לתווך על-ידי הגדרה היא פונקציה (קבוצה I)	בחן האם הדרישות הרשומות בהגדרה מתמלאות. אם כן, זוהי פונקציה. אם לפחות דרישה אחת מופרת, זו לא פונקציה.	(4) אין לך תמונה, ל-2 ... (6) נכון, הגענו למסקנה הזאת לבד, לפי ההגדרה. (8) לא, אבל לפי ההגדרה, לכל מקור מתאימה תמונה יחידה. (15) ... זה הגדרה שעכשיו קיבלנו

קטע 3: תמונה היא יחידה

בינתיים שתי קבוצות אחרות (קבוצה III: נועה ומאי, וקבוצה IV: פזית ואפרת) דנו בשאלה האם התאמה d (איור 4) היא פונקציה. רק קבוצה III זיהתה התאמה זו כפונקציה.

X	Y
7	5
9	5
11	5
8	5
1	5

איור 4: התאמה d – האם היא פונקציה?

תכתוב 3: תמונה היא יחידה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	פזית	IV	ב-d החלטנו שזה לא (פונקציה), כי כל מקור צריך תמונה יחידה. כאן, יש תמונות דומות.
2	נעה	III	כן, אבל אם היה רק חמש אחד, הייתן צודקות, אבל יש כמה חמש-ים
3	פזית	IV	כן, אבל אם תנסי לייצג את זה עם דיאגרמת ואן, אז לא תכתבי את החמש חמש פעמים
4	מאי	III	אבל זה לא רלוונטי. לכל מקור יש תמונה אחת. אפילו אם תכתבי כמה מקורות
5	נועה	III	אבל זו אותה תמונה
6	...		
7	נועה	III	אבל כאן זה גם אותה תמונה [מצביעה על איור 1 על הלוח]
8	מאי	III	לתמונה יכול להיות כמה מקורות
9	אפרת	IV	אני לא חושבת שזה נכון
10	מאי	III	היא [המרצה] הגדירה את זה ככה. לכל מקור יש תמונה אחת
11	אפרת	IV	אבל איבר, אם הוא חוזר, זה עדיין נחשב איבר אחד
12	מאי	III	לא רלוונטי. אבל התמונה, אה... למקור יש תמונה אחת
13	אפרת	IV	אבל איבר יחיד שחוזר על עצמו
14	...		
15	פזית	IV	היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה
16	...		
17	פזית	IV	אז זה לא יחיד
18	נעה	III	זה יחיד לכל מקור
19	מאי	III	זה לא משנה. כמו שהיא (המרצה) אמרה שזה (מתייחסת לאיור 1) ... כאן יש לך פונקציה, יש לך שני מקורות כאן, וזו אותה תמונה
20	פזית	IV	מקור, אבל אין לך אותה תמונה
21	מאי	III	1 זה אותה תמונה. פעם אחת 1 ופעם אחת (1-).[9]

9. התלמידות עוסקות במספרים הרשומים בתרשימי ואן על הלוח (איור 1). רשמנו את המספרים (1 ו- 1-) ולא את המילים (אחת ומינוס אחת) כי זה מה שרשום על הלוח.

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
22	פזית	IV	אני לא חושבת כך
23	אפרת	IV	אבל יש תמונה יחידה כי זה מוצג בטבלה. אם זה היה מיוצג בדיאגרמת ואן,
24	מאי	III	זה לא משנה, כי לכל מקור יש תמונה אחת
25	פזית	IV	יש לנו תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות
26	פזית	IV	לכל מקור יש תמונה אחת. אז זה יכול להיות. לכל מקור יש תמונה אחת. זה לא משנה איזו תמונה זו...
27	מאי	III	ההגדרה היא שלכל מקור יש תמונה יחידה. לא שלכל תמונה יש מקור יחיד
28	אפרת	IV	הבנתי את זה
29	מאי	III	בואו נמשיך

מבחינה תוכנית, 29 תורי הדיבור הללו יכולים להתחלק לשלושה חלקים: תורי דיבור 1-18, 19-24, ו-25-29. נעסוק בכל חלק בנפרד.

חלק א: אי-ההסכמה (תורים 1-18)

בשונה מהדוגמה הקודמת, נראה כי הסטודנטיות משתי הקבוצות (קבוצות III ו-IV) מסכימות כי ההגדרה היא הנרטיב שעל פיו יש להשתמש במילה פונקציה (תורים 1, 2). עם זה הקבוצות חלוקות באשר לתשובה, כפי שנראה בתכתוב את השימוש הנרחב במילה "אבל" (תורים 2-5, 7, 11-13). אי-ההסכמה ממוקדת בשאלה כיצד לפרש את ההגדרה הנתונה, ובעיקר כיצד להשתמש במילה "יחידה": האם תמונה צריכה להיות יחידה בכל הטווח (כלומר התמונות שונות זו מזו, למשל בתור 2), או האם תמונה צריכה להיות יחידה למקור מסוים (למשל תור 5)?

אף שהדיון נערך בין שתי קבוצות שנראה כי הגיעו להסכמה בתוך כל קבוצה, יותר משני קולות נשמעים. בעוד פזית ואפרת (קבוצה IV) משמיעות רעיונות דומים, מאי ונעה (קבוצה III) משמיעות רעיונות אחרים.

קבוצה IV דוחה את הרעיון שהתאמה d היא פונקציה (תור 1). עבור קבוצה IV (פזית ואפרת), המילה "יחידה" משתמעת כ"שונה מאחרות בטווח", ולכן הדרישה כי "לכל מקור יש תמונה יחידה" אינה מתמלאת. כדי להדגיש את טענתן כי הטווח מורכב מאיבר יחיד, הן מציעות לשרטט דיאגרמה רלוונטית (פזית בתור 3 ואפרת בתור 23). יתרה מזו, בתור 15 פזית מציינת במפורש את מה שלדעתה הוא מקור אי-ההסכמה בין שתי הקבוצות: "היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה". פזית מבחינה בין המילים "אחת" ל"יחידה" בתמונות.

קבוצה III קיבלה את התאמה d כפונקציה, אף שלכל משתתפת בקבוצה הייתה סיבה אחרת. מאי דנה בהגדרה הנתונה, קיבלה אותה כנתון מתמטי, ואף איתרה את הקושי של חברותיה בשימוש בהגדרה. לעומתה, נעה ראתה בכל חזרה על המספר 5 איבר שונה, כפי שנלמד מהטיעון שלה "כן, אבל אם היה רק חמש אחד, הייתן צודקות, אבל יש כמה חמש-ים" (תור 2). עבור נעה הטווח כולל אלמנטים מגוונים כיוון שיש "כמה חמש-ים". היא כן דנה בדרישה שלכל מקור תהיה תמונה אחת (תור 18), אבל נראה

כי היא נמנעת מהקושי שמבטאות הסטודנטיות בקבוצה IV בשל ההנחה השגויה כי החמש-ים שונים.

חלק ב: לקראת פתרון (תורים 24-19)

בחלק א ציינו הקבוצות במפורש את השימוש השונה שלהן במילה "יחידה" ואת הרוטינות הנגזרות מכך לזיהוי פונקציה. ועדיין אי-ההסכמה נותרה בעינה. חלק ב מראה את התהליך שבו מגיעים לפתרון.

בתור 19 עסקה מאי בדוגמה של פונקציה שנתנה המרצה קודם לכן (איור 1), כדי להדגים את דרך השימוש שלה במילה "יחידה". מאי הראתה כי בדוגמה זו, אף שהטווח כלל איברים שונים (תמונות), לכל תמונה יש שני מקורות. נראה כי אי-ההסכמה בחלק זה היא ברמת העצמים – הסטודנטיות דנו בדוגמה שקודם לכן הייתה מקובלת על המרצה והסטודנטיות כדוגמה לפונקציה (תכתוב 1).

בתורים 24-23 הסטודנטיות משוות את הרעיונות שמתווכים על-ידי הדיאגרמות למטלה שלפניהן המתווכת על-ידי טבלאות.

חלק ג: הפתרון (תורים 29-25)

בסיום הדיון קבוצה IV מקבלת כי התאמה d מתווכת פונקציה. שינוי זה ניכר בתורי דיבור 25 ו-26 (פזית) ו-28 (אפרת). בתורים 25 ו-26 אנו עדים לשינוי בשיח של פזית – מדיבור על משתתף אנושי ("יש לנו", תור 25) לדיבור על עצמים מתמטיים ("לכל מקור יש", תור 26).

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
25	פזית	<u>יש לנו</u> תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות.
26	פזית	<u>לכל מקור יש</u> תמונה אחת. אז זה יכול להיות. <u>לכל מקור יש</u> תמונה אחת. זה לא משנה איזו תמונה זו.

לסיכום, נראה כי לפחות שלוש פעולות תרמו לשינוי: שינוי במתווכים (ניסיון לתאר את התאמה d בעזרת דיאגרמה כדי להדגיש שהטווח כולל איבר יחיד); דיון על דוגמה לפונקציה שהציגה המרצה ונשארה על הלוח, הארת העובדה שלתמונה יכול להיות יותר ממקור יחיד (איור 1); ומעל לכול, תגובה מפורשת על הגדרה של פונקציה ועל פירושים אפשריים שונים לדרישות המופיעות בהגדרה. שימוש אפשרי (או שימוש שגוי) של הדרישות נדון במפורש. ספרד (Sfard, 2008) ראתה בסוג כזה של שינוי בשיח של לומדים על פונקציות שינוי ברמת-על כי הוא מערב שינוי בכללי המשחק – באיזה אופן משתמשים במילים. בתור 27 מאי חוזרת על ההגדרה שנתנה המרצה ומוסיפה "לא שלכל תמונה יש מקור יחיד". התוספת הזו מעידה על הבנתה את אבן הנגף עבור סטודנטיות מקבוצה IV.

סיכום קטע 3

שתי הקבוצות עבדו על-פי הנרטיב "התאמה שניתן לתווך על-ידי ההגדרה הנתונה היא פונקציה" (ראה טבלה 2). הדיון בתכתוב זה מתמקד בדרך שבה כל קבוצה השתמשה במילים "יחידה" ו"תמונה".

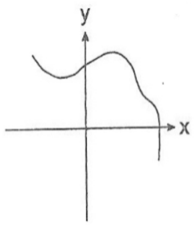
טבלה 2: נרטיבים ורוטינות של הסטודנטיות לשימוש במילים "יחידה" ו"תמונה"

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
3	התאמה שבה לכל	יש לבדוק, עבור כל מקור	(4) לכל מקור יש תמונה אחת. אפילו אם תכתבי

	מקור יש תמונה יחידה היא פונקציה.	בנפרד, אם יש לו תמונה. אם כן, ההתאמה היא פונקציה (קבוצה III).	כמה מקורות. (8) לתמונה יכול להיות כמה מקורות. (10) היא [המרצה] הגדירה את זה ככה. לכל מקור יש תמונה אחת. (18) זה יחיד לכל מקור. (24) כי לכל מקור יש תמונה אחת. (27) ההגדרה היא שלכל מקור יש תמונה יחידה. לא שלכל תמונה יש מקור יחיד.
3	התאמה שבה למקורות שונים יש תמונות שונות, היא פונקציה (קבוצה IV).	לכל מקור, בדוק אם יש לו תמונה אחת. אז, בדוק האם כל התמונות שונות זו מזו. אם שני התנאים מולאו, אז ההתאמה היא פונקציה.	(1) כי כל מקור צריך תמונה יחידה. כאן, יש תמונות דומות. (5) אבל זו אותה תמונה. (15) היא [המרצה] לא אמרה תמונה אחת, היא אמרה תמונה יחידה. (25) יש לנו תמונה אחת לכל מקור, אבל יש לנו תמונות זהות.

קטע 4: שימוש במתווך שונה

הדיון הבא התרחש בשיעור העוקב (שיעור 5) בזמן שעבדו הסטודנטיות בקבוצות קטנות על דף עבודה. דף העבודה כלל 20 גרפים, והסטודנטיות התבקשו לסמן את הגרפים המתווכים פונקציות. השיחה בין שתי הסטודנטיות (שתיהן מקבוצה III, תכתוב 3) התחילה אחרי שכל אחת מהן סיימה את המשימה לבדה. הסטודנטיות השוו את הפתרונות שלהן, וראו כי תשובותיהן מנוגדות זו לזו (איור 5). בתכתוב להלן נראה את השיחה ביניהן.



איור 5: ג

תכתוב 4: שימוש במתווך שונה לפונקציה

תור דיבור	דובר	קבוצה	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מאי	III	למה זו לא פונקציה? [מצביעה על גרף c (איור 5)]
2	נעה	III	כי אם זה לא ריבוע, זה קו ישר
3	מאי	III	רגע, אבל דיברנו על מקורות,
4	נעה	III	איזה קשר יש לזה עם מקור ותמונה?
5	נעה	III	לא משנה, אני אכתוב את זה. במקרה הגרוע המרצה תגיד שזה טעות

בשיעור הקודם שתי הסטודנטיות היו באותה הקבוצה. בשיחה זו הסטודנטיות השתמשו בנרטיבים אחרים כדי לקבוע האם גרף נתון מתווך פונקציה. בעוד מאי השתמשה בהגדרה המקובלת (תור 3), נראה כי נעה נשענת על נרטיב קודם שלה לגבי גרף של פונקציה (תור 2). לפי נעה, גרף של פונקציה יכול להיות של קו ישר או של פרבולה – גרף של פונקציה מהמעלה השנייה. כל גרף אחר יזוהה כ"לא פונקציה". זאת אף שבשיעור הקודם, במהלך העבודה על טבלאות, שתי הסטודנטיות השתמשו בהגדרה הנתונה כנרטיב המקובל לקביעת השימוש במילה פונקציה. הסטודנטיות לא הגיעו להסכמה, אך בחרו לא להתווכח (תור 5). כל אחת רשמה את התשובה שלה והמתינה שהמרצה תקבע מה התשובה הנכונה.

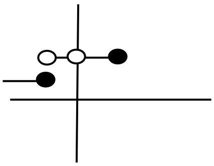
סיכום קטע 4

טבלה 3 מסכמת את הנרטיבים והרוטינות שמעלות הסטודנטיות בבואן לקבוע האם גרף נתון (איור 5) מתווך פונקציה.

טבלה 3: נרטיבים ורוטינות של הסטודנטיות לשימוש במילה "פונקציה" עבור מתווך גרפי

תכתוב מס'	נרטיב	רוטינה	עדות
4	יש שני סוגי פונקציות: קוויות (הגרף שלהן הוא קו ישר) וריבועיות (הגרף שלהן הוא פרבולה).	זיהוי הגרף המתאר את ההתאמה. אם הגרף אינו של קו ישר או של פרבולה, אז ההתאמה אינה פונקציה.	(2) כי אם זה לא ריבוע, זה קו ישר.
4	ההגדרה של פונקציה רלוונטית למתווך טבלאי, אבל לא למתווך גרפי.	כדי לזהות האם עצם נתון הוא פונקציה, יש לזהות את המתווך. אם המתווך הוא גרפי, יש לפעול לפי הרוטינה הקודמת.	(4) איזה קשר יש לזה עם מקור ותמונה?
4	הגדרה היא הנרטיב הקובע את השימוש במילה גם כאשר העצם מתווך כגרף.	לזיהוי עצם, יש לבחון אם הוא ממלא אחר התנאים המצוינים בהגדרה.	(3) ... אבל דיברנו על מקורות

קטע 5: האם גרף b מתווך פונקציה?



איור 6: גרף b

לאחר שהסטודנטיות עבדו בקבוצות קטנות, פתחה המרצה בדיון מליאה על דף העבודה. הדיון התחיל באזכור גרף b (איור 6). גרף זה מתאר פונקציה בחלקים, רעיון שלא הוצג או נדון קודם לכן בכיתה.

תכתוב 5: שימוש במתווך אחר לפונקציה

תור דיבור	דובר	מה נאמר? [מה נעשה?]
1	מרצה	תגידו לי, מה אתן אומרות על y? אה, על [גרף] b, סליחה.
2	פזית	ב-b, כן, כן, אה, אני קצת מהססת, כי
3	מרצה	בואי, שתפי אותנו, אנחנו נעזור לך
4	פזית	יש נקודה שהיא כאילו מוגדרת, ויש, כאילו, לכל, אה, לכל איקס יש וואי יחיד ומצד שני, לאיקס הזה יש עוד וואי...

שיחה זו מתמקדת בשאלה "כיצד יש להשתמש במילה (פונקציה)?". נראה כי אין ספק בשימוש בהגדרה כנרטיב הקובע את השימוש במילה (תור 4), וההגדרה מצוטטת כמו בתכתוב 1. עם זה הגרף הנתון (גרף b) כולל סמלים שעדיין הסטודנטיות לא מכירות (עיגול ריק ועיגול מלא). הניסיונות של פזית לקבוע האם הגרף מתווך פונקציה נמצאים בהתאמה להגדרת פונקציה (תור 4).

תכתוב זה מראה כי אפילו אחרי שהסטודנטיות קיבלו את ההגדרה של פונקציה כנרטיב היחיד הקובע האם גרף נתון מתווך פונקציה, עדיין עלולים להיות מכשולים, כמו סמלים לא מוכרים המתווכים רעיונות שטרם נידונו.

דיון

פרק זה עונה על השאלה: אילו תהליכי למידה קשורים לזיהוי מתווך הגדרה של עצמים מתמטיים על-ידי תלמידים? כפי שצוין לעיל, אנו רואות למידה כשינוי בשיח של הלומדים (Sfard, 2008). בקטעי השיח שהובאו לעיל עמדנו על מספר שינויים בשיח הסטודנטיות לגבי פונקציה, שסיפקו עדות ללמידה. שינויים אלה כללו שינוי ברמת-על של קבלת ההגדרה כנרטיב היחיד לזיהוי, וכן שינוי בעיסוקן במילים "יחידה", "לכל" ו"פונקציה". בעוד שזיהוי במתמטיקה הוא תמיד מתווך הגדרה, זה לא תמיד המצב בבתי הספר (Hershkowitz & Vinner, 1984; Wilson, 1990). גם במקרים שבהם דנים בהגדרות במפורש עם התלמידים והם יכולים לצטט הגדרות פורמליות, לא כל התלמידים משתמשים בהן לזיהוי עצמים מתמטיים.

מחקרים למיניהם מראים שהעיסוק בהגדרות ובתפקיד שלהן במתמטיקה, ובעיקר בדיונים על ההגדרות מאפשר ללומדים לפתח מושגים מתמטיים מגוונים (Dawkins, 2014; Ouvrier-Buffet, 2011). אנו טוענות כי הקונפליקט התקשורתי עומד בבסיס התהליך שאִפשר את השינויים בשימוש שעשו הסטודנטיות בהגדרה כנרטיב לזיהוי עצמים. תכתובים 2 ו-3 הראו כיצד הסטודנטיות זיהו את המהות של אי-ההסכמה (הקונפליקט) ביניהן, וכי הקונפליקט נפתר. כדי שזה יתרחש, הגדירו הסטודנטיות במפורש את השימוש שהן עושות במילה פונקציה, וכן את הנרטיבים והרוטינות שעל פיהם הן קבעו אם עצם נתון (טבלה או גרף מסוימים) מתווך פונקציה. מעבר לכך, כדי לפתור את הקונפליקט, הסטודנטיות היו צריכות להבין כיצד עמיתותיהן משתמשות במילה (למשל, המילה "לכל" בתכתוב 2 והמילה "יחידה" בתכתוב 3). אז היה עליהן להגיע להסכמה על השימוש שלהן במילים באופן שיהיה קוהרנטי עם השימוש המתמטי. בתוך כך הן שילבו את השיח שלהן ברמת העצמים (לגבי פונקציה ספציפית) עם שיח-העל (לגבי הגדרה של מילה מסוימת, וכן לגבי עצם הרעיון של הגדרה כאבן הבוחן לזיהוי פונקציה). לכן זוהי דוגמה ללמידה ברמת-על שהיא תוצאה של התפתחות אנכית של השיח (לגבי פונקציות).

שימו לב כי בתכתובים 2 ו-3 התקיימה שיחה בין התלמידות ללא משתתף מומחה בקבוצה. הן ראו בהגדרה "קולו של המומחה". כלומר חשיפה לשיח של המומחה (Sfard, 2008) עשויה להספיק כדי לפתור קונפליקט תקשורתי במצבים מסוימים. לפיכך קונפליקט תקשורתי יכול להיפתר לא רק בעזרת מעורבות פעילה של משתתף מומחה, אלא גם על-ידי מתווך המביא את קולו של המומחה. אנו לא טוענות כי ההגדרה עצמה מספיקה ללמידה ברמת-על, שכן ידוע שלעתים קרובות תלמידים אינם רואים בהגדרה אבן בוחן לזיהוי עצמים מתמטיים (Vinner, 1990). טענתנו היא כי אפשר ליצור סיטואציות למידה מורכבות שבהן ההגדרה מספקת את תפקיד המומחה.

כפי שנמצא במחקרים אחרים, קונפליקט תקשורתי עשוי להיפתר לעתים ברמה מקומית ולא להביא עמו שינוי ארוך טווח בכללי-העל של השיח של הלומדים. כמו כן ייתכן שהשינוי לא ייראה בהכרח בהקשרים אחרים (לגבי עצמים אחרים או מתווכים מסוג אחר). כך לדוגמה סינקלייר ומוס (Sinclair & Moss, 2012) וכן ספרד (Sfard, 2007) הראו כי ילדי גן שהשתמשו בהגדרה ככלי לזיהוי משולשים, לא השתמשו בהגדרה לזיהוי ריבועים. העדויות שלנו מלמדות על כך שהקונפליקט התקשורתי שזוהה

בתכתובים 2 ו-3 נפתר לאחר שהושגה הסכמה על השימוש במילה "פונקציה". אולם לפחות עבור סטודנטית אחת ההסכמה הייתה מקומית בלבד. כך בעוד שיש בידינו עדות כי בסוף שיעור 4 רוב הסטודנטיות השתמשו במילה "פונקציה" כפי שמקובל במתמטיקה (על-פי ההגדרה), איננו יכולות לומר כי עבור סטודנטיות אלו ההגדרה תשמש תמיד ככלי היחיד לזיהוי עצמים מתמטיים. תכתוב 4 מדגים את האופי התובעני מבחינת זמן ואנרגיה הכרוכים בתהליך פתרון קונפליקט תקשורתי. תכתוב זה מדגים עוד כי לעתים לומדים מעדיפים לא להגיע להסכמה, אלא לפסוע במשעול הקל ולחכות לגזר הדין של המורה. בכך הם מחמיצים הזדמנות ללמידה.

מה היו התכונות המיוחדות של המקרים שהובאו במאמר זה ואפשרו למידה ברמת-על? על-פי בן-צבי וספרד (Ben-Zvi & Sfard, 2007) כדי שתתרחש למידה ברמת-על, כל המשתתפים צריכים להסכים, גם אם זו הסכמה סמויה, לשלושה היבטים יסודיים של תהליך התקשורת: השיח המוביל, התפקיד שלהם בשיח ואופיו של השינוי המצופה. בתכתובים שהוצגו במאמר זה כל שלושת ההיבטים מולאו ויש עדות ללמידה ברמת-על. גם השיח המוביל היה קוהרנטי דיו עם השיח המתמטי המקובל לגבי זיהוי מתווך הגדרה של עצמים. הסטודנטים האחרים (או לפחות חלקם) קיבלו שיח זה כמוביל. השינוי המצופה – של זיהוי פונקציה על-פי ההגדרה – הושג חלקית כפי שעולה מתכתוב 4.

לסיום נציין שלוש תוצאות ממחקר זה באשר להוראה. הראשונה, שינוי ברמת-על בשיח יכול להיות תלוי מתווך, ולכן על המורה לעסוק במתווכים שונים של אותם עצמים כדי לעזור ללומדים לקשר ביניהם ולפתח שיח מוכלל.

השנייה, במתמטיקה הבית-ספרית הגדרת בורבאקי (Bourbaki) לפונקציה הנשענת על תורת הקבוצות, אינה מוצגת ללומדים כי היא נחשבת מופשטת. ההגדרה המוצגת במתמטיקה הבית-ספרית (שבה השתמשה המרצה במחקר זה) נתפסת כנגישה ללומדים. עמדנו על שני מוקדים של קושי בהגדרה זו. להלן מוקדים אלה: (1) יחידות התמונה עבור מקור מסוים; (2) הכמת "לכל". על המורה להתחשב בשני מוקדים אלה בעת הוראת פונקציות, שכן לומדים צריכים לפרק את ההגדרה למרכיביה בטרם יוכלו להשתמש בה.

התוצאה השלישית, לומדים יכולים להשתתף ואפילו ליזום דיון ברמת-על שהוא חיוני ללמידה ברמת-על, למשל כדי ללמוד שזיהוי עצמים במתמטיקה הוא מתווך הגדרה. ייתכן שהדיון שהודגם בפרק זה התאפשר הודות לידע קודם של הסטודנטיות, ולעובדה שהן לומדות נושא זה בפעם השנייה. דרושים עוד מחקרים כדי לאשש או להפריך סוגיה זו.

מבחינה מחקרית, אף שהנושא של למידת פונקציות נחקר רבות על יסוד תאוריות שונות, ההסתכלות בעיניים תקשורתיות על תהליכי הלמידה אפשרה הארה של היבטים אחרים שהיו סמויים עד כה, היבטים הקשורים ללמידת מתמטיקה בכלל ואינם מוגבלים לתחום תוכן מתמטי מסוים.

רשימת מקורות

משרד החינוך (2012). תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז', ח', ט' בכל המגזרים. אוחזר מתוך http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Chatav/TachnitLimudim/

Alcock, L., & Simpson, A. (2002). Two components in learning to reason using definitions. In *Proceedings of the second international conference on the teaching of mathematics*, Crete, Greece. Retrieved from http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap110.pdf

Aristotle (384-322 BC). Topics, VI, 4 (W. A. Pickard-Cambridge, Trans.). In D. L. Slider (Ed.), *Logos virtual library*. Retrieved from http://www.logoslibrary.org/aristotle/topics/604.html

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Éducation and Didactique*, *1*(3), 117-134.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, *7*(3), 243-362.

Chapman, A. P. (2003). Language practices in school mathematics: A social semiotic approach. Lewiston, NY: The Edwin Mellen.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J. N., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to grasp linear function: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction*, *19*(2), 215-252.

Copi, I. M. (1972). *Introduction to logic* (4th ed.). New York: Macmillan.

Dawkins, P. C. (2014). How students interpret and enact inquiry-oriented defining practices in undergraduate real analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*(1), 88-105.

De Villiers, M. D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411-424.

Euclid (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (T. Heath, Trans., 2nd ed., Vol. 1). New York: Dover Publications.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(6), 521-544.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fischbein, E. (1996). The psychological nature of concepts. In H. Mansfield, N. A. Pateman, & N. Bernardz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 102-119). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2000). Definition as a teaching object: A preliminary study. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima* (Vol. 2, pp. 289-296). Hiroshima, Japan: The Nishiki Print Co.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1985). *Language, context and text: Aspects of language in a social-semiotic perspective*. Geelong, Victoria, Australia: Deakin University.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How can geometry students understand what it means to "define" in mathematics? *Mathematics Educator, 15*(2), 17-24.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The Role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 223-228). Rehovot: Weizmann Institute of Science.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concept in elementary geometry – A reflection of teacher's concepts? In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the Eighth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 63-69). Darlinghurst, Australia: Mathematical Association of New South Wales. (ERIC Document Reproduction Service No. ED306127).

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 1-17.

Kim, D. J., Ferrini-Mundy, J., & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourses on infinity. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 86-108.

Kobiela, M., & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(4), 423-454.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215-234). Ottawa, Ontario: Legas.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28.

Meehan, M. (2002). Students meeting advanced mathematics for the first time: Can mathematics education research help. *Irish Mathematical Society Bulletin, 49,* 71-82.

Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education, 19*(2), 102-116.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 49-80.

Mountwitten, M. (1994). Acquisition of mathematical concepts by means of definitions and examples by elementary school students (A study submitted for Ph.D.). The Hebrew University, Jerusalem.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51-52*(3), 10-27.

O'Halloran, K. (2005). Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images. Continuum Press.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: In-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Piaget, J. (1957). *Logic and psychology*. New York: Basic books.

Pimm, D. (1987). Speaking mathematically: Communications in mathematics classrooms. London & New York: Routledge & Kegan Paul.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning, 7*(1), 51-73.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*(2), 139-159.

Schleppegrell, M. J. (2010). Language in mathematics teaching and learning: A research review. In J. N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 73-112). Charlotte, NC: Information age publishing.

Schoenfeld, A. H., Smith III, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*

(Vol. 4, pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schwarts, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concepts? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362-389.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. New York: Cambridge University Press.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 201- 208). Norwich, United Kingdom: PME.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shapes identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research, 51-52*(3), 28-44.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 373-393.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, *47*(3), 497-509.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. In F. Christie (Ed.), *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes* (pp. 185-216). London: Cassell.

Viirman, O. (2014). The functions of function discourse–university mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International journal of mathematical education in science and technology*, *45*(4), 512-527.

Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions – the case of a tangent. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 24-28). Antwerpen: Universitaire Instelling.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: Their causes and function in learning mathematics. *Focus on learning problems in mathematics, 12*(3-4), 85-98.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplis (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, CA: University of California, Lawrence Hall of Science.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language* (A. Kozulin, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 203-233.

Wawro, M., Sweeney, G., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics, 78*(1), 1-19.

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on learning problems in mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(5), 356-387.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 119-140.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

ד״ר טלי נחליאלי
ראש התכנית ״הוראה ולמידה״ לתואר שני במכללת לוינסקי לחינוך וראש תכנית ״דלתא״ להכשרת מורים מצטיינים למתמטיקה ומדעים. תחומי המחקר שלה מתמקדים בשיח המתמטי המתפתח בשיעורי המתמטיקה, וכן בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.

פרופ׳ מיכל טבח
חברת סגל בכיר באוניברסיטת תל-אביב בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי. במחקריה היא עוסקת בין השאר בסוגיות העולות מתוך שילוב טכנולוגיה בהוראה ולמידה של מתמטיקה ובהתפשטות ידע מתמטי בכיתה. מיכל חוקרת באמצעות גישת המחקר התקשורתית זה כעשור.