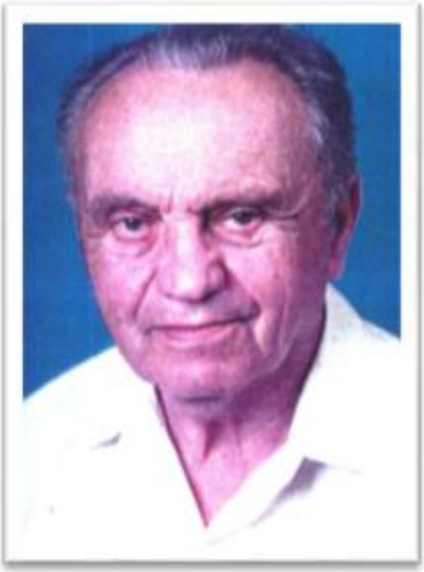
מדור ממורשתם של מייסדי המחקר בחינוך מתמטי בישראל

דברים לזכרו של פרופ׳ שמואל אביטל (2001-1915)

דוד בן-חיים



פרופ' שמואל אביטל נולד בפולין ב-24 בספטמבר, 1915. הוא רכש את ההשכלה המתמטית ואת תעודת ההוראה שלו באוניברסיטה העברית בשנות הארבעים של המאה העשרים.

לאחר היותו מורה למתמטיקה למעלה מ-20 שנה בבית-ספר על-יסודי מקצועי (בסמ"ת חיפה), ובשל היעדר לימודים לתואר גבוה בתחום החינוך המתמטי בישראל של אותם ימים – נאלץ אביטל להרחיק עד אוניברסיטת טורונטו כדי להשלים את לימודי הדוקטורט בחינוך מתמטי.

בשנת 1968 פרסם המכון הקנדי אונטריו ללימודי חינוך ספר, אשר מתבסס על עבודת הדוקטור של פרופ' אביטל. ספר זה נודע ברבות הימים כ"יעדים ללמידת המתמטיקה" (Avital & Shettleworth, 1968). את הספר תרגמה לעברית תלמידתו לשעבר, פרופסור נצה מובשוביץ-הדר מהטכניון (אביטל ושטלוורס, 2009).

פרופ' אביטל היה אחד ממניחי-היסוד של החינוך המתמטי במדינת ישראל. הוא היה בראש ובראשונה מחנך ומורה למתמטיקה. הוא הקפיד על יצירת קשרים בין תחומים שונים של המתמטיקה, על דיוק מתמטי ועל חינוך לקריאת טקסטים מתמטיים. הוא הקדיש את חייו להנחלת אהבת המתמטיקה למורים ולתלמידים רבים. במיוחד הייתה יקרה ללבו החשיפה של תלמידים לתרבות המקצוע, תוך חיבור למקורות, הן ליהדות והן להיסטוריה של המתמטיקה.

אחד המפעלים הגדולים של חייו היה העיתון המתמטי לנוער שנקרא "גיליונות לחשבון ולחשיבה", אשר יזם, ערך והוציא לאור ארבע פעמים בשנה בעקביות למעלה משלושים שנה – בסיועה של רעייתו, ברכה ז"ל.

אביטל האמין ואף הוכיח, כי אפשר ללמוד מתמטיקה בהנאה. ספרו, הנושא שם זה, יצא לאור בהוצאת עם עובד (אביטל, 1991).

פרופ' אביטל היה ממקימי המחלקה להכשרת מורים בטכניון, אשר גדלה מאז והפכה להיות הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה. הוא עמד בראשה ועסק בה בהכשרת פרחי הוראה ובהשתלמויות למורים פעילים. עד היום רבים מתלמידיו מלמדים בכל רחבי-הארץ, תוך דבקות בעקרונותיו וברעיונותיו.

פרופ' אביטל היה גם מראשוני קבוצת המחקר והפיתוח בחינוך המתמטי בישראל, וזכה להערכה רבה בקהילייה הבינלאומית. הוא הנחה וטיפח חוקרים רבים בחינוך מתמטי (גם לי הייתה הזכות להיות אחד מתלמידיו) ופרסם מאמרים רבים בתחום הוראת המתמטיקה בדרך החקר. בהמשך מופיע אחד המאמרים שלו שתורגם לעברית, המצביע על דרך החשיבה והסגנון שלו להוראת המתמטיקה – מאמר זה מובא לזכרו.

מקורות

אביטל, ש' (1991). **מתמטיקה בהנאה**. תל-אביב: עם עובד. 293 עמודים.

אביטל, ש' ושטלוורס, ש' (2009). **יעדים ללימוד מתמטיקה: רעיונות אחדים למורים** (נ' מובשוביץ-הדר, מתרגמת). ירושלים: משרד החינוך. 70 עמודים.

Avital, S. M., & Shettleworth, S. J. (1968). *Objectives for mathematics learning, some ideas for the teacher*. Toronto: The Ontario Institute for Studies in Education.

פרופ׳ דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת [illegible]וך) ותואר שלישי .Michigen State Univ בחינוך מתמטי.

ראש מינהלת מל״מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע״ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.

רעיונות אחדים על איך ליצור בעיות מתמטיות[1]

שמואל אביטל ושלמה ליביסקינד

תרגום: דוד בן-חיים

תקציר

חלק חשוב בעבודתו של כל מורה למתמטיקה ליצור בעבור תלמידיו בעיות אתגריות להשלמות אלו הנמצאות בספרי הלימוד. מקור ראשי לבעיות כאלה הם רעיונות מהמתמטיקה הגבוהה, אשר מהם אפשר להפיק בעיות אלמנטריות. אפשר לראות שחישובים אינטגרליים מסוימים יכולים לשמש ביצירת בעיות העוסקות באי-שוויוניים, רעיונות מתאוריות השקילות יכולים לספק בעיות לחקירה והוכחה באמצעות אינדוקציה מתמטית, ורעיונות מאלגברה לינארית יכולים לעזור ביצירת בעיות היכולות לקשר בין משוואות ליניאריות למשוואות ריבועיות. מקור אחר לבעיות הוא תשובותיהם של התלמידים על שאלה, שיש עבורה פתרונות בדרכים מגוונות. הדגש הוא ששימושים כאלו יכולים להפוך את הלמידה של מתמטיקה גבוהה ללמידה בעלת משמעות רבה יותר למורה.

מבוא

פתרון בעיות הוא חלק בסיסי בהוראת המתמטיקה ובלמידתה. מטרתו העיקרית והכי מוזכרת בספרות המקצועית, היא היישום של המתמטיקה במדעים האחרים או בחיי היום-יום. אולם כיוון שהמתמטיקה עצמה היא חלק חשוב של התרבות האנושית, גם שימושים בתוך המתמטיקה עצמה יכולים להיחשב כמטרה חשובה. כיוון שההבחנה בין תרגילים לבעיות אינה מוחלטת, אפשר לראות בהם כשתי נקודות ברצף. בשל הנחה זו, אנו יכולים למנות דרכים אחדות, אשר אפשר להשתמש בהן בפתרון בעיות בתהליך הלמידה של מתמטיקה:

1. הן יכולות לשמש כלי ראשי לתרגול כדי לחזק את המיומנויות הנרכשות.
2. הפתרונות שלהן יכולים לעזור בשיפור ההבנה של מושגים חדשים שהלומד רוכש.
3. הן עוזרות לשלב את הנושאים החדשים הנלמדים עם הידע הקודם שנרכש.
4. הן מעשירות את היכולת האסוציאטיבית של הלומד על סמך יצירת קישורים עם תחומים אחרים במתמטיקה.
5. כפי שהוזכר לעיל, הן אמצעי ליישום החומר הנלמד בתחומים אחרים במתמטיקה, במדעים האחרים ובחיי היום-יום.

למורה או למחבר ספר הלימוד די קל ליצור בעיות (תרגילים), המספקות יישום ישיר של החומר הנלמד

1. תרגום לעברית מתוך מאמרם של שמואל אביטל ושלמה ליבסקינד: Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Some ideas on how to create mathematical problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *9*(4), 417-422. doi: 10.1080/0020739780090404.

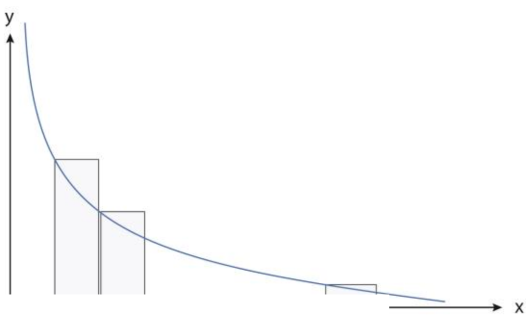
באותה עת. הן נועדו להשגת מטרות 1 ו-2.

אנשי חינוך מתמטי ומתמטיקאים רבים מחפשים בעיות מתאימות במדע ובחיי היום-יום, שאפשר לשבץ אותן בתכניות הלימודים במתמטיקה ושהן יוכלו למלא חלקית את מטרה 5. אולם, אפשר למצוא מעט מאוד בספרות המקצועית על דרכים ליצירת בעיות היכולות למלא את מטרות 3 ו-4. איך אפשר ליצור בעיות פחות אלגוריתמיות שיקשרו את החומר הנלמד עם תחומים אחרים? איך אפשר ליצור בעיות היכולות להעשיר את מסגרת הייחוס האסוציאטיבית של הלומד? מה יכולים להיות המקורות של בעיות אלו? אנו נציג כאן רשימה של מקורות אלה, אך יש לציין כי מקורות אלה לא נבדקו כל אחד לגופו וייתכן שיש עוד מקורות אחרים שלא נבדקו.

מקורות מהמתמטיקה הגבוהה

אחת הדרכים למציאת בעיות מתאימות היא לקיחת רעיונות מתחום המתמטיקה, שהוא הכללה ועידון של תהליך מתוחכם פחות ושהוא חלק מתכנית הלימודים. נדגים נקודה זו בדוגמה הבאה:

אינטגרציה בעיקרון היא עידון של סכומים, ואפשר להשתמש בה בחיבור בעיות העוסקות בסכומים של סדרות. לדוגמה, נתייחס לפונקציה $1/\sqrt{x}$ f(x) =.



איור 1

להלן התיאור הגרפי של הפונקציה הזו (ראה איור 1):

הפונקציה מונוטונית יורדת עבור $x > 0$ והשטח מתחת לגרף בין $x=1$ ובין $x=n+1$ הוא תמיד קטן מסכום השטחים של המלבנים עם בסיס יחידה וגבהים השווים לשיעור ה-y של: f (1), f (2), f (3), ... , f (n).

כיוון שהשטח מתחת לגרף בין $x=1$ ובין $x=n+1$ הוא

$$\int_{1}^{n+1} x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{1}^{n+1} = 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

השטח של המלבנים המתוארים באיור 1 הוא

$$1f\ (1)\ +\ 1f\ (2)\ +\ 1f\ (3)\ +\ \ldots\ldots+\ 1f\ (n) 1+2^{-1/2}+3^{-1/2}+\ldots+n^{-1/2}$$

אנו מקבלים את אי-השוויון

$$1+2^{-1/2}+3^{-1/2}+\ldots+n^{-1/2}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

בניית אי-השוויון יכולה עתה להיחקר כבעיה בשימוש באינדוקציה מתמטית.

הגישה המוזכרת לעיל פותחת למעשה את הדרך ליצירת משפחה שלמה של בעיות.

לדוגמה, נתייחס לפונקציה $f(x)=x^{-1/3}$ והידיעה ש- $\int_1^{n+1} x^{-1/3}\,dx=\frac{3}{2}\left[\left(\sqrt{n+1}\right)^{2/3}-1\right]$

אנו יכולים לנסח את הבעיה ולהוכיח שעבור כל מספר טבעי *n*:

$$1+2^{-1/3}+3^{-1/3}+\ldots+n^{-1/3}>\frac{3}{2}\left[\left(\sqrt{n+1}\right)^{2/3}-1\right]$$

באופן זה נוכל גם להגיע אפילו לבעיה כללית יותר הפותחת שדה חקירה שלם בעבור התלמיד.

הפונקציה $f(x)=x^{\alpha}$ היא מונוטונית בהחלט והיא יורדת בעבור $-1<\alpha<0$. לכן נקבל את אי-השוויוניים:

$$\int_1^{n+1} x^{\alpha}\,dx<\sum_1^n k^{\alpha}<\int_1^n x^{\alpha}\,dx$$

אי-שוויוניים אלו יכולים ליצור בעיות לחקירה בעבור התלמיד למשל:

בעבור $-1<\alpha<0$ יש לחקור את יחס הסדר בין $1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}$ ו- $\frac{1}{(\alpha+1)}[(\sqrt{n+1})^{\alpha+1}-1]$.

מה קורה כאשר: (i) $\alpha=0$, (ii) $\alpha>0$, ו- (iii) $\alpha<-1$?

ברור שעל המורה להיות בטוח שלתלמיד יש את האמצעים המתמטיים והבגרות הנחוצה לפתור את הבעיה ולהתמודד עמה. במקרה של השורה האחרונה של הבעיה, מחשבון יכול לעזור בשלבי החקירה הראשונים.

3. שימוש במקרים פרטיים הנוצרים בתוך התאוריה הכללית

מקור אחר של בעיות יכול להיות היישום של התאוריה המתמטית הכללית או המבנה שלה.

להלן שתי דוגמאות:

1) אלגברה לינארית מספקת לנו בעיות מעניינות עם שימושים מגוונים של הפולינום האופייני של מטריצה נתונה $n\times n$. השימוש של תאוריה זו בעבור מטריצות 2×2 יכול לשרת דרך מעניינת לסלול את המעבר מהפתרון של מערכות של שתי משוואות ליניאריות עם שני משתנים – למשוואות ריבועיות.

נניח שהתלמיד מכיר את המערכות של משוואות ליניאריות המובעות באמצעות הצורה של מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, והפועלות על הווקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ובכך משנות את הווקטור הזה ל-$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. כמו כן אנו מניחים שהתלמיד יודע שלמערכת של שתי משוואות ליניאריות הומוגניות יכול להיות פתרון שונה מ- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, אם ורק אם הדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ שווה אפס.

עתה התלמיד נשאל מהם הערכים של k שמטריצה נתונה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ יכולה למתוח (או לכווץ) וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ לווקטור $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

כדי לענות על השאלה הזו, נחוץ לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

או את המערכת השקולה:
$$\begin{cases} ax + by = kx \\ cx + dy = ky \end{cases}$$

אשר שקולה ל-
$$\begin{cases} (a-k)x + by = 0 \\ cx + (d-k)y = 0 \end{cases}$$

למערכת האחרונה יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם $\begin{vmatrix} (a-k)\ b \\ c\ (d-k) \end{vmatrix} = 0$, כלומר אם ורק אם $(a-k)(d-k)-bc=0$, שברור כי זו משוואה ריבועית ב-k.

2) דוגמאות אחרות של בעיות מעניינות שאפשר להשיגן במקרים פרטיים ממשפט הכללה, ואפשר לפתחן מהפסוק הכללי שהממוצע הגאומטרי של n מספרים חיוביים אינו גדול מהממוצע האריתמטי שלהם. מקרים פרטיים של משפט זה מספקים בעיות מעניינות בעבור התלמידים כמעט בכל כיתה של הבית-ספר העל-יסודי.

מתוך יישום המשפט הזה בעבור ממוצעים ל-n=2, אנו יוצרים את הבעיה 'הוכח כי $(x + y)/2 \geq \sqrt{xy}$'.

אפשר להוכיח את זה ישירות בשימוש במשפט הקובע שעבור כל מספרים ממשיים a ו-b, $(a+b)^2 \geq 0$.

עתה אפשר ליצור בעיה חדשה בשינוי לאי-שוויון שקול על-ידי חילוק שני האגפים של אי-השוויון:

$(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$ ב-$\sqrt{xy}$

ועל-ידי פישוט נקבל:

$$\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} \geq 2$$

כיוון ש- $\sqrt{x/y}$ הוא מספר חיובי כלשהו, את אי-השוויון האחרון אפשר לנסח במשפט הבא:

הוכח כי הסכום של מספר חיובי והמספר ההפוך לו הוא תמיד גדול או שווה ל-2.

או הוכח אם המכפלה של שני מספרים חיובים היא 1, אז הסכום שלהם הוא לא פחות מ-2.

אי-שוויוניים מעניינים אחרים מתקבלים על סמך השימוש במשפט על שני הממוצעים ל- n=3.

על-ידי חילוק שני האגפים של אי-השוויון:

$x + y + z \geq 3(\sqrt[3]{xyz})$ ב- $\sqrt[3]{xyz}$

ועל-ידי פישוט נקבל:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\geq 3$$

אפשר להבחין עתה כי המכפלה $\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$ שווה להופכי של $\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$.

מכאן מתקבלת הבעיה:

'הוכח כי עבור כל שני מספרים חיוביים כלשהם p ו- q, $p+q+1/pq\geq 3$.'

את הבעיה שהתקבלה אפשר לחשב כהרחבה של אי-השוויון שהוזכר לפני-כן: $x+1/x\geq 2$.

נעיר כאן שתמיד אפשר למצוא מספרים חיוביים: a, b ו-c, כך ש- $p=a/b$ ו- $q=b/c$.

זה גורר ש - $pq=a/c$ וש - $1/pq=c/a$.

לכן מתקבלת הבעיה: 'הוכח שעבור מספרים חיוביים כלשהם a, b ו-c כי $a/b+b/c+c/a\geq 3$.'

זהו מקרה פרטי של בעיה כללית יותר של 'הוכח כי אם המכפלה של n מספרים חיוביים היא 1, אז סכומם גדול או שווה ל-n.'

ההוכחה של הבעיה האחרונה מתוך אינדוקציה מתמטית דורשת ידע קודם, אבל היא פשוטה יותר או קלה יותר מההוכחה מתוך אינדוקציה מתמטית של המפשט הכללי על שני ממוצעים.

ברור שהבעיה על $a/b+b/c+c/a\geq 3$ עוסקת במקרה הפרטי של המשפט האחרון.

הערה: אפילו תלמידים המכירים ויודעים את המשפט על הממוצעים, לא יגיעו בדרך כלל לרעיון של שימוש בו כדי להוכיח את אחת הבעיות הנ"ל, בלי שהבעיות יוצגו באותו פרק שיופיע בו המשפט.

בעיות הנוצרות מיחסי שקילות

בעיות חילוק כגון 'הוכח כי עבור כל המספרים השלמים החיוביים n, הביטוי $2\cdot 7^n+3\cdot 5^n-5$ הוא כפולה של 24, או הראה ש- $1+3^x+9^x$ הוא כפולה של 13 עבור כל x שהוא איבר של הסדרה $1,4,7,\ldots,3n-2$' הן בעיות רגילות בפרק על אינדוקציה מתמטית.

מהיכן בעיות אלו נובעות? נתייחס תחילה לבעיה הראשונה:

ניסיון בנושא השקילות מוביל לבחינה של חזקות של 7 מודולו 24 וחזקות של 5 מודולו 24.

נשים לב כי $7^2\equiv 1 \pmod{24}$ ו- $5^2\equiv 1 \pmod{24}$. לכן, $7^{2k}\equiv 1 \pmod{24}$ ו- $5^{2k}\equiv 1 \pmod{24}$. בשל כך, $2\cdot 7^{2k}+3\cdot 5^{2k}-5\equiv 2\cdot 1+3\cdot 1-5\equiv 0 \pmod{24}$.

באופן דומה בעבור חזקות אי-זוגיות של 5 ו-7:

$$2\cdot 7^{2k+1}+3\cdot 5^{2k+1}-5\equiv 2\cdot 7\cdot 7^{2k}+3\cdot 5\cdot 5^{2k}-5\equiv 14\cdot 1+15\cdot 1-5\equiv 0 \pmod{24}$$

זה מוכיח את הקביעה הראשונה עבור כל המספרים השלמים החיוביים n. הוכחה זו מצביעה על שיטה

ליצירת בעיות דומות רבות. לדוגמה, כיוון ש- $3^2-1=8$, יש לנו $3^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$. עתה נבחר a כלשהו כך ש- a^2-1 הוא מכפלה של 8. כאשר $a=7$, נקבל $7^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$. בשל כך, $3^{2k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ ו- $7^{2k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$. כל בחירה של x, y ו- z כך ש- $x\cdot 3^{2k}+y\cdot 7^{2k}+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ יוצרת בעיה מתאימה בעבור חזקות זוגיות. כדי לקבל את הבעיה הכללית יותר 'הוכח כי $x\cdot 3^n+y\cdot 7^n+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ לכל המספרים הטבעיים n', עלינו לבחור x, y ו- z המקיימים את שני התנאים $x\cdot 3^{2k}+y\cdot 7^{2k}+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ ו- $x\cdot 3^{2k+1}+y\cdot 7^{2k+1}+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$. השקילויות האלו הן אקוויוולנטיות למערכת:

$$3x+7y+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8) \quad x+y+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$

מערכת זו עוברת למערכת האקוויוולנטיות:

$$3y\equiv -x(\mathrm{mod}\,4) \quad x+y+z\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$$

(נשים לב לשינוי במודולוס). המערכת האחרונה היא פתירה לכל בחירה של x ולכן יוצרת משפחה שלמה של בעיות להוכחה בעזרת אינדוקציה. לדוגמה, נבחר $x=1$ ואז בחירות אפשריות ל- y ו- z הן $y=5$ ו- $z=2$, ואז יש לנו את הבעיה 'הוכח כי $3^n+5\cdot 7^n+2$ מתחלק ב-8 לכל n טבעי'.

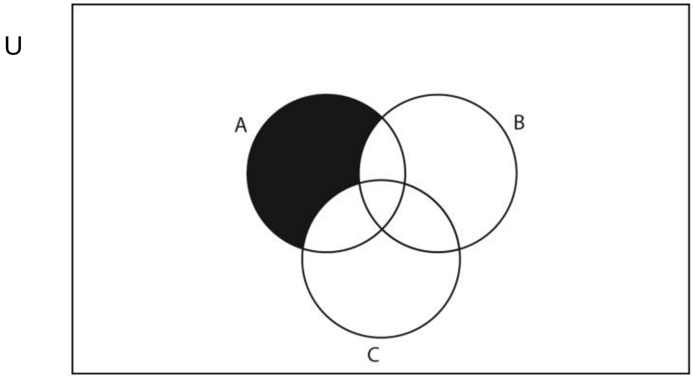
מתוך שימוש במשפט הקטן של Fermat (או במשפט הכללי יותר של Euler), יש לנו אלגוריתם ליצירת בעיות התחלקות. נבחר מספר ראשוני כלשהו, לדוגמה 5, ומספר נוסף שהוא יחסית זר למספר הראשוני שנבחר (אין להם גורם משותף חוץ מ-1), נניח שהמספר הנוסף הוא 3. ממשפט Fermat נובע כי $3^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, ולכן $3^{4n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$. לכן $a\cdot 3^{4n}+b$ יהיה כפולה שלמה של 5 לכל המספרים השלמים n שאינם שליליים, אם ורק אם $a+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$.

אפשרות אחת לבחירה ל- a ו- b מובילה לבעיה 'הוכח כי $7\cdot 3^{4n}+3$ מתחלק ב-5 לכל המספרים השלמים n שאינם שליליים'.

יצירת בעיות בעקבות תשובות של תלמידים

מקור אחר של בעיות נעוץ בעובדה שלעתים קרובות פתרון לבעיה נתונה יכול להיות מובע בדרכים מגוונות. בדרך זו אפשר לקבל זהויות היכולות להיות מנוסחות כבעיות חדשות. הבעיה הבאה ניתנה לקבוצה של פרחי הוראה למתמטיקה לבית-הספר היסודי:

'יש לזהות את הקבוצה המייצגת את השטח המושחר' (ראה איור 2).



ניתנו מספר תשובות נכונות: $(A-B)-C$, $(A-B)\cap(A-C)$, $A-(B\cup C)$, $A\cup B\cup C-(B\cup C)$ ו- $A-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$. כך הסטודנטים עצמם יצרו קבוצות של זהויות, שאפשר להשתמש בהן כבעיות חדשות להוכחה. באותה דרך אפשר ליצור בעיות דומות רבות בקשר לזהויות טריגונומטריות.

סיכום

תיארנו מקורות מגוונים ליצירת בעיות חדשות. הרעיון הבסיסי העומד מאחוריהם הוא שממתמטיקה גבוהה יותר אפשר ליצור בעיות לשימוש במתמטיקה האלמנטרית. פרחי הוראה לבית-הספר התיכון לומדים מתמטיקה גבוהה יותר באוניברסיטה, אולם, רוב רובה אינו שימושי ישירות למתמטיקה הנלמדת בבית-הספר.

במאמר הנוכחי הצבענו על איך הידע הזה של מתמטיקה גבוהה יותר, יכול לעתים להיות שימושי בניסוח בעיות חדשות שאפשר להציגן בבית-הספר התיכון.

פרופ׳ דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי .Michigen State Univ בחינוך מתמטי.

ראש מינהלת מל״מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע״ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.