בעיית חקר כמנוף לפיתוח יצירתיות[1]

חנה לב-זמיר, מכללת אורנים

We believe that all students should be given the opportunity to be creative by solving interesting mathematical problems and experiencing creative instructional engagements.

(Zazkis & Holton, 2009, p. 91)

תקציר

מערכת החינוך רואה חשיבות רבה בהוראה המכוונת לעידוד ולטיפוח יצירתיות בקרב התלמידים ורואה בכך מטרה חשובה. כדי לטפח יצירתיות, יש לתת את הדעת לבחירה מושכלת של משימות מתמטיות שאכן תתרומנה להשגת המטרה.

במאמר זה מוצגת **בעיית מסגרת הריבועים** כדוגמה לבעיית חקר שעניינה סדרה חשבונית.

את בעיה זו אפשר לפתור באמצעות נוסחה פשוטה, אך כיוון שהיא הוצגה לפני תלמידי בית-הספר היסודי (כיתה ו'), שעדיין לא למדו באופן פורמלי את הנושא, היא פתחה אותה לדרכי פתרון מגוונים ויישום ידע מתמטי בנושאים שונים. כמו כן היא טוותה את הדרך לפיתוח חשיבה אלגברית בבית-הספר היסודי. במהלך ההתמודדות עם פתרונה, "גילו" התלמידים חוקים ועקרונות מתמטיים, הם גילו קשרים והגיעו להכללות מתוך ההתנסות. בד בבד להצגת הבעיה לפני התלמידים, הוצגה הבעיה לפני סטודנטיות המתכשרות להוראת המתמטיקה, אשר התבקשו להציג דרכי פתרון מגוונים וכן לקחת בחשבון דרכים שגם תלמידי בית-ספר יסודי מסוגלים להתמודד אתן. תהליך ההתמודדות האישית של הסטודנטיות ותהליך ההשוואה עם הפתרונות של התלמידים אִפשר לסטודנטיות במהלך הכשרתן לשלב בין התנסות אישית ובין התייחסות לדרכים מגוונות שלהן ושל התלמידים, לעשיית קישורים בין ייצוגים שונים, לבחינת הידע המתמטי הנדרש לכל פתרון ולהוסיף על כך נדבך משמעותי וחשוב להתפתחות הידע הפדגוגי, שהוא אבן יסוד בתהליך העשוי לעודד יצירתיות והבניית ידע מתמטי חדש ופיתוח חשיבה אלגברית בקרב תלמידי בית-הספר היסודי.

מילות מפתח: *יצירתיות; פיתוח יצירתיות; בעיות חקר; אסטרטגיות לפתרון; סדרה חשבונית; ידע פדגוגי.*

1. ברצוני להודות למורות **שרה קרול וגילית לביא**, אשר תיארו את דרך ההתמודדות של תלמידיהן עם הבעיה, ולסטודנטיות במכללת אורנים, אשר דרכי הפתרון שלהן מוצגות במאמר זה.

רקע תאורטי

חוקרים רבים מתייחסים לחשיבות הוראת מתמטיקה בדרך יצירתית ובדרך המעודדת יצירתיות בקרב התלמידים (Presmeg, 2003; Sawyer, 2004; Silver, 1997; Sriraman, 2008). במציאות המשתנה בקצב מואץ, מתן הזדמנויות לפיתוח היצירתיות בקרב התלמידים חיוניות ביותר. כדי לעודד את היצירתיות, חשוב שהעשייה של התלמידים תהיה בלבה של הפעילות המתמטית (Bolden, Harries & Newton, 2010; Silver, 1997).

היצירתיות מהי?

בספרות העוסקת ביצירתיות קיימות הבחנות שונות באשר ליצירתיות. הדיון המרובה בנושא יצירתיות מעיד על עמימות ועל גישות שונות באשר למשמעותו המדויקת. טורנס (Torrance, 1967), ובעקבותיו חוקרים רבים, רואים ביצירתיות ארבעה מרכיבים עיקריים: **שטף** (*Fluency*), **גמישות** (*Flexibility*), **חדשנות/מקוריות** (*Originality/Novelty*) **ופירוט/הרחבה** (*Elaboration*) (לב-זמיר, 2014, 2015; Lev-Zamir, 2011).

שטף (*Fluency*) – רכיב הנשען על שטף רעיונות, על שטף אסוציאציות ועל שטף התוצרים. הוא נשען על נגישות לידע, שימוש בידע בסיסי או בידע על עולם.

גמישות (*Flexibility*) – מאופיינת ביכולת לגשת לבעיה בדרכים מגוונות תוך הפקת פתרונות מגוונים, יכולת לתכנן ולחקור בעיה בכיוונים מסוימים, באסטרטגיות מגוונות, יכולת לשנות כיוון מתוך הפעלת שיקול דעת. יש בה יכולת להעמיק, לבחון את הפתרונות וליצור בעיות חדשות. הגמישות מתאפיינת בפתיחות לרעיונות.

מקוריות (*Originality/Novelty*) – מאופיינת בחשיבה ייחודית. יכולת לראות את הדברים בראייה שונה או לארגן נתונים כך שמבהירה את הבעיה בדרך לא שגרתית.

פירוט/הרחבה (*Elaboration*) – רכיב הנשען על יכולות וורבליות ורמות פירוט גבוהות כדי לתאר ולהאיר את שטף הרעיונות ושטף האסוציאציות. רכיב זה כולל מיומנויות חשיבה גבוהות, שיש בהן כדי להעלות שאלות, להכליל ולהסיק מסקנות (לב-זמיר, 2014).

בעשור האחרון מחקרים דנים בהרחבה במרכיבי היצירתיות, כך שאפשר לפתחם אצל אנשים רבים והם עשויים להיות קרקע פורייה בעבור מורים למתמטיקה, אשר רואים חשיבות רבה בטיפוח תלמיד יצירתי, בעל גמישות מחשבתית ובעל יכולת להתמודד עם כל מיני בעיות בדרכים מגוונות. תלמיד בעל יכולת לבנות טיעון, להצדיק רעיונות מתמטיים ולא רק בעל שליטה באלגוריתם (Ball, 1993; Ervynck, 1991; Silver, 1997).

ג'וורסקי (Jaworski, 1994), רואה באתגר המתמטי כאחד המרכיבים במה שהיא מכנה "משולש ההוראה" (*teaching triad*), כלומר כל משימה מתמטית נבחרת בקפידה כדי לשמש אתגר לתלמיד, להעלות את רמת סקרנותו, לעודד את מעורבותו האינטלקטואלית ולתרום לטיפוח החשיבה היצירתית של הלומד.

בעיות אתגר - למה הכוונה?

בנושא "בעיות אתגר" קיימת הסכמה בין חוקרים רבים, כי מדובר בפעילויות ובעיות, אשר מאפשרות פתרונות מגוונים, דרכים מגוונות לפתרון, שימוש בייצוגים מגוונים, טיפוח מיומנויות חשיבה גבוהות כמו העלאת השערות, גילוי חוקיות ויצירת הכללות, העלאת טענות, יכולות הנמקה והוכחה. בעיות מסוג זה מעודדות שיח מתמטי עשיר ומפרה ומשמשות תשתית פורייה להעמקה ולהרחבה. האתגרים המתמטיים מעודדים תהליכי חקר ומזמנים שימוש בידע קודם, העמקה בעקרונות מתמטיים והבניית ידע מתמטי שאינו מושתת על ידע פרוצדורלי בלבד (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009; Jaworski, 1994; NCTM, 2000; Zazkis & Holton, 2009).

המונח "בעיות" הנו בעל משמעות רחבה ביותר. סוגי הבעיות הנסקרות בספרות המחקר, אינן בהכרח שונות זו מזו במהות שהן מייצגות. מדובר במונחים שנוהגים להשתמש בהם כשעוסקים בנושא זה. בין סוגי הבעיות שמתייחסים אליהן כלולות בעיות רוטיניות ובעיות לא רוטיניות (*Routine problem and non-routine problem*) (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009; Silver, 1997); בעיות סגורות ובעיות פתוחות (*Closed problems and open-ended*) (Hershkovitz et al., 2009; Silver, 1997); בעיות בעלות דרכים מגוונות לפתרון (*Multiple-Solution Tasks*) (Leikin & Levav-Waynberg, 2009); ובעיות חקר (*Investigative problems/ tasks*).

במאמר זה אציג בעיית חקר ואעסוק באמצעותה בפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיות מסוג זה. בעיות חקר מאופיינות ברב-שלביות ופתוחות לאסטרטגיות מגוונות, לרמות מגוונות ולגיוס ידע קודם. אפשר להתמודד עם פתרונן ברמות מגוונות. לצורך ההתמודדות עם בעיות אלה, נדרשים הפותרים לקשר בין קשת של תכנים מתמטיים. בעיות חקר מאופיינות כבעיות המזמנות יישום ידע מעבר לתרגול הסטנדרטי של חומר הלימוד וכן שימוש באסטרטגיות לא שגרתיות. על הפותרים לתכנן את דרכי הפעולה, להפעיל שיקולי דעת באשר לארגון הנתונים, לתור אחר חוקים ועקרונות מתמטיים, לגלות קשרים ולנסח הכללות. תרומתן של בעיות אלה לכל מאפייני היצירתיות, כולל מרכיב ההרחבה והפירוט, שכן דרכי הפתרון קושרות פעמים רבות נושאים מתמטיים מגוונים ומאפשרות העמקה והרחבה בתכנים אלה (לב-זמיר, 2014). אתייחס למושגים אלה וארחיב בהתייחסותי לבעיות חקר.

מטרות המחקר

א. בחינת דרכי פתרון מגוונים לבעיית חקר בקרב שלוש אוכלוסיות המחקר, תוך עיסוק בתכנים המתמטיים השלובים בפתרונות.

ב. השוואה בין דרכי הפתרון שמציעות האוכלוסיות השונות.

ג. בחינת מקומה של התנסות הסטודנטיות בפתרון בעיית חקר וניתוח דרכי פתרון, כחלק מהתפתחות הידע הפדגוגי ומודעות למאפייני יצירתיות.

אוכלוסיית המחקר

במאמר זה מוצג מחקר הבוחן דרכי פתרון מגוונים ל**בעיית חקר** ומשווה בין שלוש אוכלוסיות: תלמידי כיתה ו' בשני בתי-ספר יסודיים בארץ, סטודנטיות שנה ראשונה להוראת המתמטיקה במכללה לחינוך

בארץ וסטודנטיות שנה שלישית להוראת המתמטיקה באותה מכללה. בסך הכול מנתה אוכלוסיית המחקר 52 תלמידים וסטודנטיות לפי הפירוט להלן:

קבוצה א: 20 תלמידי כיתה ו' בבית-ספר יסודי.

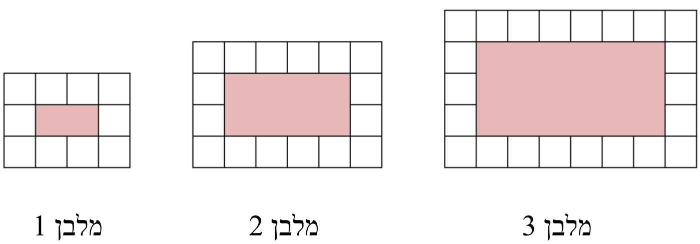
קבוצה ב: 15 סטודנטיות במסלול התמחות בהוראת המתמטיקה, שנה ראשונה במכללה.

קבוצה ג: 17 סטודנטיות במסלול התמחות בהוראת המתמטיקה, שנה שלישית במכללה. קבוצה זו למדה במהלך ההכשרה בקורס "יצירתיות בהוראת המתמטיקה", ואילו בקבוצה ב אין בסיס פורמלי של מאפייני יצירתיות.

מהלך המחקר

הבעיה (ראה איורים 1 ו-2 בהמשך) הוצגה לפני אוכלוסיית המחקר שתוארה לעיל. לפי ההנחיה הם התבקשו להציג דרכים מגוונות לפתרון כל אחת מהשאלות, וגם הם התבקשו להסביר מילה במילה את דרך הפתרון. חשוב לציין, כי קהל היעד העיקרי לבעיה זו הוא תלמידי בית-הספר היסודי, כשהיעד היה מתן פתרון לבעיה. כשהבעיה הוצגה לפני הסטודנטיות, הן התבקשו בקשה מפורשת לפתור את הבעיה בדרכים שונות. תפקיד הסטודנטיות במחקר זה, במיוחד של הסטודנטיות מקבוצה ג, היה ללמוד על הידע של התלמידים ועל הידע שלהן (הסטודנטיות), כדי להיווכח בחשיבות ההתנסות האישית המוקדמת, הכוללת חשיפה לאסטרטגיות מגוונות כבסיס לעידוד וטיפוח יצירתיות והבניית ידע בקרב תלמידיהן. תפקידן של הסטודנטיות מקבוצה ב (שנה ראשונה להכשרתן), היה בעיקר כדי לחדד את ההבחנה הנוגעת לתפקידה של הכשרת המורים בתהליך הבניית ידע פדגוגי וידע על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה.

לצורך המחקר, נבחרה בעיה שהוצגה בכתב-העת **מספר חזק 2000**, 'בעיית מסגרת הריבועים' (Kown, Park, & Park, 2006) (ראה איור 1), כדוגמה לבעיית חקר, שעניינה סדרה חשבונית. בעיות מסוג זה פתוחות לדרכי פתרון מגוונים ויישום ידע מתמטי בנושאים רבים, וכן בעיות מסוג זה סוללות את הדרך לפיתוח חשיבה אלגברית בבית-הספר היסודי. כדי להתמודד עם פתרונן, יש לתור אחר חוקים ועקרונות מתמטיים, לגלות קשרים ולנסח הכללות (Jaworski, 1994; da Ponte, 2007). חשיבותו של המאמר בחשיפת הסטודנטים להוראה ולחשיפת כלל המורים לדרכים ולאפשרויות המגוונות לעשיית קישורים בין ייצוגים אחדים ולהעמקת הידע הפדגוגי שלהם, כדי לעודד הבניית ידע מתמטי חדש בקרב התלמידים בבית-הספר היסודי.



איור 1: שלושה מלבנים עם מסגרת ריבועים

בעקבות שלושה מלבנים אלה, נשאלו שלוש שאלות (ראה איור 2):

שאלה 1: אם הייתם יוצרים את המלבן הרביעי בסדרה, כיצד הייתם מחשבים את מספר הריבועים הלבנים הדרושים לכך?

כיצד תחשבו את מספר הריבועים במלבן השביעי בסדרה?

שאלה 2: מה תוכלו לומר על מספר הריבועים במלבן הנמצא במקום ה-n?

שאלה 3: ברשותכם 66 ריבועים לבנים. עליכם להשתמש בכמות הגדולה ביותר של ריבועים מכמות זו, כדי ליצור מלבן לפי החוקיות של הסדרה הנתונה. איזה מספר מלבן הוא יהיה בסדרה?

האם נותרו ריבועים שלא השתמשתם בהם? הסבירו קביעתכם.

איור 2: שלוש שאלות

לכל אחת משלוש השאלות המוצגות בבעיה יש תשובה נכונה אחת. לכאורה זוהי **בעיה סגורה**, אך עם זאת, הדרכים המובילות אל אותה תשובה רבות ומגוונות – **בעיה בעלת דרכים מגוונות לפתרון**.

הבעיה הוצגה בו בזמן לשלוש הקבוצות (תלמידי כיתה ו' ושתי קבוצות הסטודנטיות).

המורות בבית-הספר תיעדו את השיח שהתנהל בין התלמידים ואת ההסברים שלהם לדרכי הפתרון. בד בבד נאספו כל הפתרונות מקבוצות ב ו-ג (קבוצות הסטודנטיות).

בסך הכול התקבלו 96 פתרונות: 29 פתרונות מקבוצה א (20 תלמידי כיתה ו'), 20 פתרונות מקבוצה ב (15 סטודנטיות שנה ראשונה) ו-47 פתרונות מקבוצה ג (17 סטודנטיות שנה שלישית). לאחר שלב ההתמודדות הראשונית, הוצגו כל הפתרונות לפני הסטודנטיות מקבוצה ג, שהיו שותפות לניתוח ואפיון כלל הדרכים.

התוצרים נותחו בשיטה איכותנית. ניתוח הממצאים כלל מאפייני הדרכים שננקטו וכן מספר הפותרים בכל דרך על-פי קבוצות ההשתייכות.

ממצאים

כפי שאפשר לראות, מדובר בבעיה שפתרונה הוא סדרה חשבונית. סדרה חשבונית היא סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא קבוע. נהוג לסמן את האיבר הראשון כ-a_1, מספר האיברים בסדרה: n, האיבר האחרון: a_n ואת ההפרש הקבוע נהוג לסמן באות d. הנוסחה לחישוב האיבר הכללי (נוגעת לשאלה 2) היא: $a_n = a_1 + (n-1)d$. כדי לחשב את האיבר השביעי בשאלה 1, כל שעלינו לעשות הוא להציב את הנתונים המתאימים בנוסחה, כלומר:

$$a_7 = 10 + (7 - 1) \times 6 = 10 + 36 = 46$$

אז אם כן, איפה הבעיה? התשובה על השאלה טמונה ביחס לקהל היעד שהופנתה אליהם.

להלן מטרת המחקר הראשונה:

בחינת דרכי פתרון מגוונות לבעיית חקר בקרב שלוש אוכלוסיות, תוך התייחסות לתכנים המתמטיים השלובים בפתרונות.

לפי תכנית הלימודים, תלמידי בית-ספר יסודי אינם מכירים את הנוסחה, וכפי שיוצג בהמשך, אפשר לראות כיצד הם הגיעו להכללות ותובנות באמצעות ייצוגים חזותיים וכמותיים. גם הסטודנטיות, על אף שהן מכירות את הנוסחה מתוך ההתמודדות עם הבעיה, הן ניסו לבחון דרכי פתרון, אשר נשענות על ידע של תלמידים בבית-ספר יסודי. הסטודנטיות השתמשו בנוסחה, אך היא לא סיפקה נקודת מוצא לפתרון. הן הציגו את הסדרה החשבונית בדרכים מגוונות ולעתים ייצוג הפתרון הוביל לבניית הנוסחה.

הצגת מגוון דרכי הפתרון לשאלות 1 ו-2 (ראה איור 2 לעיל):

שאלה 1: אם הייתם יוצרים את המלבן הרביעי בסדרה, כיצד הייתם מחשבים את מספר הריבועים הלבנים הדרושים לכך?

כיצד תחשבו את מספר הריבועים במלבן השביעי בסדרה?

שאלה 2: מה תוכלו לומר על מספר הריבועים במלבן הנמצא במקום ה-n?

בחלק זה אציג דוגמאות לדרכי פתרון לשתי השאלות הראשונות. מדוגמאות אלה אפשר ללמוד על דרכי פתרון ועל הדרכים המובילות לגילוי החוקיות ולהכללות. הדרכים המגוונות (מרכיב הגמישות) ניכרות בדרכי הייצוג ובתכנים המתמטיים.

דרכים לזיהוי הסדרה החשבונית:

דוגמה א – זיהוי הסדרה בהתבסס על ההפרש הקבוע בין מספר הריבועים במסגרות

פתרון זה מאופיין במניין מספר הריבועים במסגרות הנתונות וזיהוי הסדרה החשבונית ומלווה בהסבר להלן:

מספר הריבועים במסגרות המלבנים, החל מהמלבן הראשון, מהווים סדרה חשבונית: ....., 22 (במלבן השלישי), 16 (במלבן השני), 10 (במלבן הראשון). ההפרש בין מספר הריבועים ממלבן למלבן שווה ל-6. אפשר להסיק שהמסגרת הרביעית תכיל 28 ריבועים (22+6), ואם נמשיך את הסדרה עד המסגרת השביעית, נראה שהיא תכיל 46 ריבועים.

פתרון דומה הוצג באמצעות רישום נתונים בטבלה והדגשת ששת הריבועים הנוספים בכל מלבן (ראה דוגמה ב).

דוגמה ב – זיהוי הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש באמצעות ארגון הנתונים בטבלה

כפי שחלק מהפותרים הסבירו: "ארגנו את הנתונים בטבלה, המתייחסת למספר המלבן ומספר הריבועים במסגרת והראינו שההפרש בין ריבועי המסגרות תמיד 6" (ראה איור 3).

מספר המלבן	מלבן 1	מלבן 2	מלבן 3	מלבן 4	מלבן 5	מלבן 6	מלבן 7

מספר הריבועים במסגרת	10 ריבועים	16 ריבועים	22 ריבועים	28 ריבועים	34 ריבועים	40 ריבועים	46 ריבועים
	+6	+6	+6	+6	+6	+6	

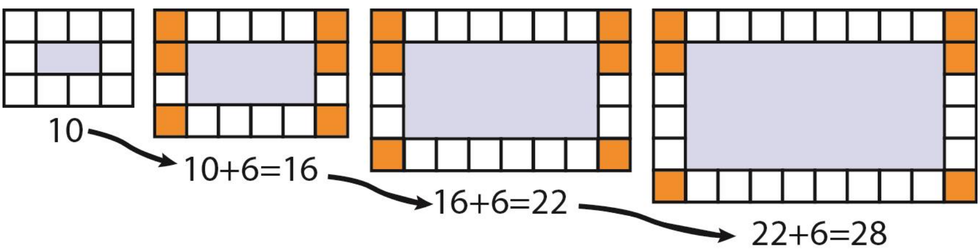
איור 3: ארגון נתוני סך הריבועים בטבלה

שלוש הדוגמאות הבאות מציגות את הסדרה החשבונית בדרך חזותית.

דוגמה ג – הדגשת הריבועים הנוספים (1)

בדוגמה זו, באמצעות צביעת 6 ריבועים הנוספים בכל מלבן (ראה איור 4), הדגישה הפותרת בכל מלבן את הריבועים הנוספים (ביחס למספר הריבועים במלבן הקודם), והדגישה את האופן שהיא "רואה" את ההפרש הקבוע בין מספרי הריבועים:

עם מניית הריבועים במסגרת אפשר *לראות* כי ממלבן למלבן המסגרת גדלה ב-**6** ריבועים. בכל מלבן הריבועים הלבנים הם הריבועים במסגרת המלבנית הקודמת, והריבועים המודגשים בצבע הם השישה הנוספים.

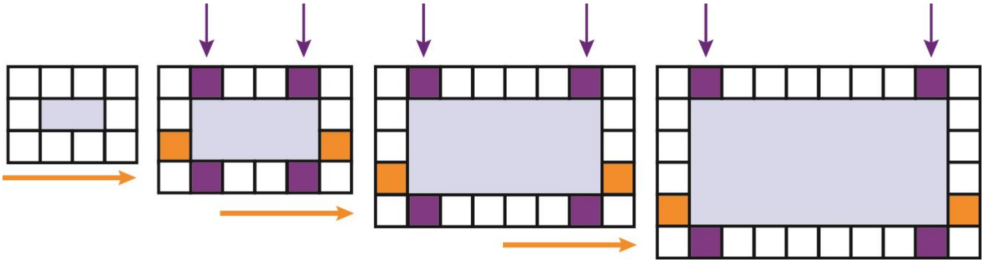


איור 4: תוספת ריבועים ממלבן למלבן

דוגמה ד – הדגשת הריבועים הנוספים (2)

עוד דרך חזותית, אשר מציגה את ההפרש הקבוע בסדרה, נשענת על שינויים במספר הריבועים בשורות ובטורים בכל מסגרת:

באמצעות האיור (ראה איור 5), אפשר להבחין שממלבן למלבן יש תוספת של **שורה** אחת (לכן נוספו שני ריבועים כתומים למסגרת) ושני **טורים** (לכן נוספו ארבעה ריבועים סגולים למסגרת), מה שמראה שמסגרת המלבן גדלה בכול פעם ב**שני ריבועים כתומים** ועוד **ארבעה ריבועים סגולים**, בסך הכול שישה ריבועים נוספים ממסגרת למסגרת.



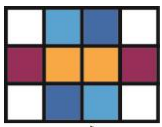
איור 5: תוספת הריבועים בשורות ובטורים

דוגמה ה – הדגשת הריבועים הנוספים (3): בדרך להכללה

דרך זו מציגה את הקשר בין מיקום המלבן למידות האורך והרוחב שלו באמצעות צביעת ריבועים. פותרים אלה "הגיעו" לנוסחה, אך הנוסחה לא הביאה אותם לידי פתרון.

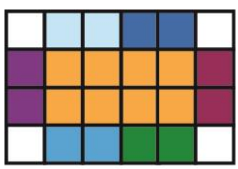
הם ליוו את הפתרון בהסבר הבא:

> אם נתעלם מארבעה הריבועים בפינות, נוכל לראות שבמלבן 1 נותרו 2 ריבועים במידת האורך המיוצגת ב-4 ריבועים (מודגשים בגווני כחול) וריבוע אחד במידת האורך המיוצגת ב-3 ריבועים (מודגשים בסגול) בסך הכול נוספו 6 ריבועים. אפשר לתאר את מספר הריבועים במסגרת הראשונה כ-6 פעמים 1 (כאשר 1 מייצג את מיקום המלבן) + 4 הריבועים הלבנים שבפינות. בסך הכול 10 ריבועים במסגרת (ראה איור 6).



איור 6: מספר הריבועים במסגרת הראשונה

באותה דרך אפשר לראות, כי במלבן 2 מספר הריבועים הוא 6 פעמים 2 (מתוארים בשרטוט שישה צמדים של ריבועים בצבעים שונים) + 4 הריבועים הלבנים שבפינות. בסך הכול 16 ריבועים במסגרת (ראה איור 7).



איור 7: מספר הריבועים במסגרת השנייה

אפשר ללמוד משתי הדוגמאות את הקשר בין גורם הכפל 6 לבין מיקומו של המלבן: מלבן 2: 6×2 ובאופן זה, אפשר לחשב את מספר הריבועים בכל מלבן: 6 פעמים מספר המלבן + 4 ריבועי הפינות.

אם נציין את מיקום המלבן באות, n, הרי שמספר הריבועים יהיה: 6 פעמים $n + 4$, או כפי שאפשר לרשום זאת בייצוג אלגברי: $6n + 4$.

דוגמה ו – ארגון נתונים בטבלה: בדרך להכללה

מבודדים את ארבעת ריבועי "הפינות" ופותרים באמצעותם את הנוסחה. הדרך החזותית שהוצגה בדוגמה ה, הוצגה בעת ארגון נתונים בטבלה כדי להגיע לנוסחה. השלמת הטבלה (ראה איור 8) הושתתה על ההסבר המלווה בשלבים הבאים:

בשלב א, בשורה הראשונה (מודגשת בירוק), רשמו את מספר הריבועים בכל מלבן על-פי מיקומו.

בשלב ב, בשורה השנייה (מודגשת בסגול), בודדו באמצעות תרגיל חיבור את ארבעת ריבועי הפינות.

בשלב ג, זיהו שבכל תבנית חיבור מדובר בכפולה של 6, בתוספת 4 הריבועים בפינות, והכפולה תואמת את מיקומו של המלבן. לדוגמה, במלבן 1 (a_1) מספר הריבועים 4+ 6 ×1 ואף אפשר להראות זאת חזותית על המסגרת. במלבן 1 מודגשים שישה ריבועים בודדים. במלבן 2 מודגשים שישה צמדי ריבועים וכן הלאה. בהתאם לכך, השלימו את השורה השלישית בטבלה (מודגשת בתכלת).

	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_7	a_n
מספר ריבועי המסגרת	10	16	22	28		46	
מבודדים את ארבעת ריבועי הפינות	6+4	12+4	18+4	24+4		42+4	
תיאור התבנית	6 × 1 + 4	6 × 2 + 4	6 × 3 + 4	6 × 4 + 4		6 × 7 +4	**6n + 4**

איור 8: שלבים בדרך להכללה

בדומה לנוסחה זו ($6n+4$), הייתה קבוצה שרשמה, כי הנוסחה למספר הריבועים בכל מלבן היא $2(3n+2)$. שני ייצוגים אלה עשויים לשמש נקודת מוצא לדיון מתמטי הנוגע להשוואה בין ייצוגים סימבוליים ולהבניית ידע הנוגע לעקרונות מתמטיים, הנוגעים להוצאת גורם משותף אל מחוץ לסוגריים.

ארבע הדוגמאות הבאות נשענות על הכללות הנובעות מחישובי היקף המלבן ושטחו.

דוגמה ז – מארגנים נתונים בטבלה וחוקרים את הסדרה הנוצרת בשורות ובטורים

בדרך פתרון זו בחרו הפותרים לארגן את נתוני מספר הריבועים בטבלה, בציון מספר הריבועים בכל שורה ובכל טור. במהלך רישום הנתונים בטבלה הם גילו את חוקיות הסדרה הנוגעת לשינוי מספר הריבועים בשורות ובטורים (ראה איור 9).

	מלבן 1	מלבן 2	מלבן 3	מלבן 4	מלבן 5	מלבן 6	מלבן 7
מספר הריבועים בכל שורה	4	6	8	**10**	12	14	**16**
מספר הריבועים בכל טור	3	4	5	**6**	7	8	**9**

איור 9: מספר הריבועים בשורות ובטורים

את דוגמה זו הציגו חמישה תלמידים (וגם 11 סטודנטיות). המורה בכיתה הוסיפה תיעוד של שיח שהתפתח – כשארבעה מהתלמידים שבחרו בדרך זו הגיעו לרישום נתוני המלבן הרביעי, הם אמרו: "בכל שורה מספר הריבועים גדל ב-2 ובכל טור מספר הריבועים גדל ב-1".

בדרך זו הם השלימו את הנתונים עד המלבן השביעי. כשהתלמידים דיווחו על דרך החישוב של מספר הריבועים הכללי בכל מסגרת, הם נתקלו בקושי.

בניסיון ראשון הם חישבו מתוך שימוש בנוסחת *היקף* המלבן: (אורך + רוחב)× 2, אך כשבדקו זאת עם הנתונים במלבן הראשון: $2\times(3+4)=14$ ובמלבן השני: $2\times(4+6)=20$ – זה לא הסתדר להם עם הנתונים בשרטוט.

בניסיון להבין מה הסיבה לאי ההתאמה, ראו שההפרש בין התוצאה שהגיעו אליה לבין התשובה הנכונה הוא תמיד 4... את המקור לטעות "גילה" אחד הפותרים:

> רגע... צריך להפחית 4 ריבועים, כי כשאנחנו מחשבים בדרך הזאת, כל ריבועי הפינה מופיעים פעמיים. כדי לחשב את סך הריבועים הלבנים עלינו לחשב את סכום שני אורכי המלבן ושני רוחבי המלבן ולהחסיר 4 ריבועים, מכיוון שבעת חיבור הריבועים אנו מחשבים פעמיים את הריבועים שבפינות המלבן המשמשים נקודת חיבור בין אורך המלבן לרוחב המלבן. מכאן שמסגרת הרביעית יהיו 28 ריבועים לבנים: $6 – 4 = 28$ + 6 + 10 + 10, ובמסגרת השביעית יהיו 46 ריבועים לבנים: $16 + 9 + 9 – 4 = 46$ + 16.

דוגמה ח – היקף המלבנים

בהתבסס על חישובי היקף הוצגה טבלה (ראה איור 10), מספר הריבועים בכל מסגרת מחושב באמצעות שני ייצוגים סימבוליים (בשורה האחרונה):

מיקום המלבן	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
מספר ריבועי האורך	3	4	5	6	7	8	9
מספר ריבועי הרוחב	4	6	8	10	12	14	16
מספר הריבועים במסגרת	4-=10 2×3+2×4 2(3+4)-4 =10	6-=16 2×4+2×4 2(4+6)-4 =16	8-=22 2×5+2×4 2(5+8)-4 =22	2×6+2×10-4=28 2(6+10)-4 =28	34	40	46

איור 10: מספר הריבועים באמצעות חישוב היקף המלבן

דוגמה ט – הפרשים בין שטחים

הפתרון הבא נשען על חישוב ההפרש בין **שטח** המלבן החיצוני (הכולל את מסגרת הריבועים) **ושטח** המלבן הפנימי המודגש בצבע (ראה איור 1). בפתרון זה מיוצג כל מלבן על-פי מיקומו: a_1 (מלבן ראשון), a_2 (מלבן שני) וכך הלאה. בכל משבצת מחושב השטח על-פי מכפלת מספר הריבועים באורך המלבן ומספר הריבועים ברוחב המלבן בהתאמה, לדוגמה: מידת האורך של המלבן הראשון 4 ריבועים ומידת רוחבו 3 ריבועים (ראה איור 11).

מיקום המלבן	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
שטח המלבן החיצוני	= 12 4×3	= 24 6×4	= 40 8×5	= 60 10×6	= 84 12×7	= 112 14×8	= 134 16×9
שטח המלבן הפנימי	2×1 = 2	4×2 = 8	= 18 6×3	8×4 = 32	= 50 10×5	12×6 = 72	14×7 = 98
ההפרש בין השטחים	10	16	22	28	34	40	46

איור 11: הפרשי שטחים

ארגון נתונים זה עזר בעת ניסיון חישוב מספר הריבועים בכל מסגרת מלבנית נתונה, כפי שנראה בהמשך כשנדון בשאלה 2 (ראה איור 2). שאלה זו כיוונה למציאת נוסחה כללית לחישוב מספר האיבר על-פי מספר ריבועים נתון.

דוגמה י – הפרשים בין השטחים : בדרך להכללה

את הדרך הבאה הציגה אותה קבוצת הסטודנטיות, אשר תשובתן על השאלה הראשונה התבססה על הפרשי השטחים של שני המלבנים (החיצוני והפנימי) (ראה איור 12) והובילה להכללה הבאה:

מידת האורך במלבן החיצוני שווה לפעמיים מיקום המלבן + 2, לדוגמה:

מספר הריבועים באורך מלבן $2 \times 4 + 2 = 10$a4

מספר הריבועים באורך מלבן 2 × 7 + 2 =16a7

מספר הריבועים באורך מלבן 2×n + 2an

מידת הרוחב במלבן החיצוני שווה למיקום המלבן +2, לדוגמה:

מספר הריבועים ברוחב מלבן 2 + 4 =6a4

מספר הריבועים באורך מלבן 7 + 2 = 9a7

מספר הריבועים באורך מלבן n+2 an

אפשר לתאר בדרך זו את שטח המלבן החיצוני באמצעות הנוסחה: 2n2+6n+4 =(n+2)×(2× +2).

את שטח המלבן הפנימי אפשר לתאר באמצעות הנוסחה: 2n×n=2n2

אם כן, חישוב ההפרש בין השטחים ייתן את מספר ריבועי המסגרת: 2n2+6n+4 – 2n2 = 6n+4

בסיכום התהליך אמרה קבוצת הסטודנטיות: "זה מדהים איך אפשר להתבסס על ידע בסיסי ולבנות בהדרגה את הנוסחה. זה הופך למשמעותי יותר".

הצגת דרכי פתרון לשאלה 3 (ראה איור 2 לעיל)

> שאלה 3: ברשותכם 66 ריבועים לבנים. עליכם להשתמש בכמות הגדולה ביותר של ריבועים מכמות זו, כדי ליצור מלבן לפי החוקיות של הסדרה הנתונה. איזה מספר מלבן הוא יהיה בסדרה?
>
> האם נשארו ריבועים שלא השתמשתם בהם? הסבירו קביעתכם.

בשאלה 3 היו נתונים הנוגעים למספר הריבועים, ועל הפותרים היה לתת את דעתם על ההכללות כדי לקבוע את מיקומו של המלבן, שנוכל להתאים לו את המסגרת.

הפתרון, שהציגו כל הנשאלים, התבסס על הפרש בין מספר הריבועים במסגרות המלבניות, מקצתם באמצעות רישום המספרים עד שהגיעו ל-64 ומניית מספר האיברים, ומקצתם באמצעות רישום בטבלה, כפי שציין אחד הפותרים: "המשכנו לרשום בטבלה (ראה איור 12), את המספרים בסדרה, עד שהגענו למספר הריבועים הקרוב ל-66. הגענו למלבן עשירי ונשאר לנו עודף של שני ריבועים".

מלבן 1	**מלבן 2**	**מלבן 3**	**מלבן 4**	**מלבן 5**	**מלבן 6**	**מלבן 7**	**מלבן 8**	**מלבן 9**	**מלבן 10**
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64

איור 12: ממשיכים את הסדרה

הנשאלות מקבוצות ב ו-ג (הסטודנטיות), הציגו עוד פתרון, הנשען על הנוסחה הכללית למציאת מספר הריבועים בכל מסגרת נתונה.

על-פי הנוסחה, מספר הריבועים בכל מסגרת מלבנית: $6n+4$, כלומר $6n+4=66$ לפיכך $6n=62$. מכיוון שמדובר ב-n שהוא מספר טבעי, הרי שמדובר במלבן שנמצא במקום העשירי ויישארו שני ריבועים עודפים.

להלן מטרת המחקר השנייה:

השוואה בין דרכי הפתרון שמציעות האוכלוסיות השונות

עשר הדוגמאות שהוצגו מציגות את כלל הפתרונות שהתקבלו. התקבלו פתרונות המתבססים על זיהוי חוקיות סדרתית על סמך מניית הריבועים וזיהוי ההפרש קבוע בין האיברים (ראה דוגמה א). יש שהנתונים מאורגנים בטבלה ובאמצעותה מגיעים לפתרון (ראה דוגמאות ב, ו, ז, ח), יש שהפתרונות נשענים על ייצוגים חזותיים (ראה דוגמאות ג, ד, ה). דרכים אחרות מבוססות על חישובי היקף ושטח מלבנים (ראה דוגמאות ח, ט, י), ויש דרכים שהאסטרטגיה שננקטה מובילה להכללה מילולית, המפרטת את תהליך החישוב לכל מצב נתון ואף לנוסחה כללית (ראה דוגמאות ה, ו, ז, י).

להלן טבלה 1, המתארת את מספר הדרכים לשאלות 1 ו-2, ואת מספר הפותרים על-פי קבוצת השיוך: קבוצה א – תלמידי כיתה ו', קבוצה ב – סטודנטיות שנה ראשונה וקבוצה ג – סטודנטיות שנה שלישית.

טבלה 1: ייצוג דרכים מגוונות בקרב שלוש האוכלוסיות

דוגמה	קבוצה א N = 20 תלמידי כיתה ו'	קבוצה ב N = 15 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה ראשונה	קבוצה ג N = 17 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה שלישית	סך כל הפותרים
דוגמה א – זיהוי הסדרה בהתבסס על ההפרש הקבוע בין מספר הריבועים במסגרות	16	15	17	48
דוגמה ב – זיהוי הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש באמצעות ארגון הנתונים בטבלה	8	0	2	10
דוגמה ג – הדגשת הריבועים הנוספים (1)	0	0	1	1
דוגמה ד – הדגשת הריבועים הנוספים (2)	0	0	1	1
דוגמה ה – הדגשת הריבועים הנוספים (3): בדרך להכללה	0	0	2	2
דוגמה ו – ארגון נתונים בטבלה: בדרך להכללה		1	4	5
דוגמה ז – מארגנים נתונים בטבלה וחוקרים את הסדרה הנוצרת בשורות ובטורים	5	3	8	16
דוגמה ח – היקף המלבנים	0	1	5	6
דוגמה ט – הפרשים בין שטחים	0	0	3	3
דוגמה י – הפרשים בין השטחים: בדרך להכללה	0	0	4	4
סך הפותרים בכל קבוצה	29	20	47	96

מתוך עיון בטבלת הפתרונות, אפשר ללמוד על שכיחותה של כל דרך בכלל הקבוצות ועל הדרכים המגוונות לכל קבוצה.

לפני 20 תלמידי קבוצה א הוצגו שלוש דרכי פתרון (דוגמאות א, ב, ז). ממוצע הפתרונות לכל תלמיד היה בין דרך אחת לשתי דרכים (1.45 דרכים לתלמיד).

לפני 15 הסטודנטיות מקבוצה ב הוצגו ארבע דרכי פתרון (דוגמאות א, ו, ז, ח). ממוצע הפתרונות לכל

סטודנט היה בין דרך אחת לשתי דרכים, אך יחסית פחות מאשר הפותרים בקבוצה א (1.333 דרכים לסטודנט).

בקרב 17 הסטודנטיות מקבוצה ג, היה ייצוג לכל אחת מעשר הדרכים. ממוצע הפתרונות לכל סטודנט היה בין שתיים לשלוש דרכים (2.764 דרכים לסטודנט).

כל הפותרים (למעט ארבעה תלמידים), הציגו את הדרך לייצוג הסדרה בהתבסס על זיהוי ההפרש בין שלושה האיברים הנתונים. ארבעה מהתלמידים שלא הציגו פתרון זה, הציגו אותה בטבלה המוצגת בדוגמה ב.

לפי הנתונים נראה, כי תלמידי בית-ספר יסודי התמודדו יפה מאוד עם הבעיה והגיעו בדרכים לא פורמליות למציאת הקשר בין מיקומו של האיבר לגודל שהוא מייצג. בלטה במיוחד עובדת הדמיון בין פתרונות הנשאלים מקבוצה א (תלמידי בית-הספר) לפתרונות של קבוצה ב (סטודנטיות שנה א).

הסטודנטיות מקבוצה ג הציגו דרכים רבות ומגוונות. במהלך שנת הלימודים השלישית שלהן הן השתתפו בקורס, אשר שם דגש במאפייני יצירתיות, בריבוי דרכי פתרון (רכיב השטף ביצירתיות) ובדרכים מגוונות (רכיב הגמישות ביצירתיות). אף לא אחת מהן, הצליחה לפתור פתרון מלא על-ידי שימוש בנוסחה למציאת איבר נתון בסדרה חשבונית. עם זאת, אפשר לראות שמרבית הדרכים היו מושתתות על איסוף נתונים מספרי ועל ייצוגם בטבלאות מגוונות. הייצוגים הוויזואליים היו נדירים והציגו אותם שתי סטודנטיות מקבוצה ג (אפשר לראות בפתרונות המתבססים על ייצוג חזותי, כפתרונות בדרכים מקוריות מבין כלל הדרכים שהוצגו). לשאלה השלישית הוצגו שתי דרכי פתרון.

להלן טבלה 2 המסכמת את מספר הפותרים (שאלות 1 ו-2) בדרכים שהוצגו על-פי קבוצת השיוך.

טבלה 2: דרכי פתרון לשאלה 3

דרך הפתרון	קבוצה א N = 20 תלמידי כיתה ו'	קבוצה ב N = 15 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה ראשונה	קבוצה ג N = 17 סטודנטיות להוראת המתמטיקה, שנה שלישית	סך כל הפותרים
רישום בטבלה או המשך הסדרה	20	15	17	52
שימוש בנוסחה	0	15	17	32

להלן מטרת המחקר השלישית:

בחינת מקומה של התנסות הסטודנטיות בפתרון בעיית חקר וניתוח דרכי פתרון, כחלק מהתפתחות הידע הפדגוגי והמודעות למאפייני יצירתיות.

כפי שצוין בתיאור מהלך המחקר, לאחר שלב ההתמודדות הראשונית עם פתרון הבעיה, נאספו כל הפתרונות והוצגו לפני הסטודנטיות מקבוצה ג, שהיו שותפות לניתוח ואפיון כלל הדרכים. ניתוח דרכי הפתרון כלל עיסוק באסטרטגיות שננקטו, ובד בבד נערכה השוואה בין דרכי הפתרון שהוצגו בכל קבוצה. תהליך זה תרם לסטודנטיות בשני מישורים:

האחד – ללמוד על ידע התלמידים בדרכי ההתמודדות שלהם עם בעיה לא שגרתית ועל האסטרטגיות שנקטו בהם.

השני – ללמוד על התפתחות הידע של סטודנטיות שנה ג במהלך הכשרתן לעומת הידע של הסטודנטיות בקבוצה ב.

להלן ציטוטים מדבריהן של שירה[1] ורונה, המתייחסות לפתרונות התלמידים, בעיסוק בידע שניכר בכל פתרון, וביחסן לידע המתמטי על-פי תכנית הלימודים:

שירה: בעיה כל כך פשוטה... אני יכולה לפתור אותה בשנייה, יש נוסחה... אבל, זו הייתה הזדמנות נהדרת, לראות כמה הרבה אפשר ללמוד ממנה... לראות שאפשר להציג אותה לתלמיד בבית-ספר יסודי, והוא יתמודד אתה... אבל, הכי חשוב בעיני, ההבדל הגדול בין לראות שאפשר לפתור את אותה בעיה בדרכים שונות, לבין ממש לנתח כל דרך ולחשוב על הידע שמאחוריה... היינו צריכות לחשוב איזה ידע הפותר, אם זה ילד או מבוגר מביא לידי ביטוי... באיזו כיתה למדו את הנושא, כמו למשל פתרון באמצעות חישובי שטחים. זה יאפשר לי בעתיד לתכנן דיון מתמטי בכיתה או איך אני יכולה לעודד חשיבה של תלמידים.

רונה: בעיה יכולה להיות פשוטה, לא צריכה להיות מסובכת, ובכל זאת לזמן פעילות מתמטית מאתגרת ומאפשרת שימוש בידע מתמטי ויצירתיות בדרכי פתרון... בעיה יכולה להיראות מתאימה לתלמידים בחטיבת הביניים, וזה מדהים לראות שגם תלמידים צעירים יכולים להתמודד אתה...

הבחנה בין דרכי הפתרון של הסטודנטיות מקבוצה ב לבין דרכי ההתמודדות של הסטודנטיות מקבוצה ג, העלתה את רמת המודעות של הסטודנטיות מקבוצה ג, באשר למשמעות ההתנסות בתהליכי למידה והוראה המכוונים לפיתוח יצירתיות.

להלן ציטוטים מדבריהן של שתי סטודנטיות (דורית ולימור), שדנו במשמעות תהליך ההתנסות במהלך הלימודים במאפייני היצירתיות ובמשמעות פתרון בעיה בדרכים מגוונות, כל אחת מהן ציינה את מידת ההפתעה לאור הפער בין דרכים המגוונות של הסטודנטיות מקבוצתה (קבוצה ג) לסטודנטיות מקבוצה ב, אשר טרם נחשפו פורמלית למאפייני היצירתיות בהוראת המתמטיקה במהלך הכשרתן להוראה.

דורית: אלמלא התבקשנו לפתור במגוון דרכים ולחשוב על ידע של התלמידים כשאנחנו ניגשות לפתרון, הייתי ישר מציבה את הנתונים בנוסחה, בדיוק כמו הסטודנטיות בקבוצה השנייה (קבוצה ב)... הבקשה גרמה לי לחשוב על מגוון דרכים לייצג את הסדרה. ההתנסות האישית הייתה חשובה. נהניתי לראות את הדרכים של התלמידים אבל יותר מזה, היה משמעותי הפער בין מגוון הדרכים שלנו (הסטודנטיות מקבוצה ג), לבין מגוון הדרכים של הסטודנטיות מקבוצה ב. הדרכים של הסטודנטיות מקבוצה ב, היו דומות מאד לאלה של התלמידים.

לימור: המודעות למאפייני היצירתיות גרמה לי לחשוב על דרכים שונות, על ייצוג בטבלה, בציור, על חישובים מכיוונים שונים.

סטודנטית אחרת, דליה, ציינה את הערך של ההתנסות האישית, כבסיס להתפתחות הידע הפדגוגי שלה:

דליה: יצאתי נשכרת בכמה רמות, ההתנסות שלי והחשיבה על עוד דרך ועוד דרך ולא

---

1. כל השמות במאמר (פרט לשמות המוזכרים בסיכום), בדויים.

> לרוץ ישר לנוסחה, הדרך הבטוחה והמהירה... ההשוואה בין הדרכים: לאחר שראיתי את הדרכים שלנו (הסטודנטיות), הדרכים של התלמידים, כיצד אנחנו התמודדנו עם הבעיה, כיצד הם התמודדו איתה, הניתוח של הדרכים, זה תרם לי המון. זה עזר לי לראות איך אפשר לחבר בין הדרכים, להשוות ביניהן ואולי מכאן להתחבר לנוסחה... להתנסות כזו תהיה השפעה על דרך ההוראה.

סיכום

אפשר ללמוד כי בבעיית מסגרת הריבועים טמון פוטנציאל יצירתי רב. פוטנציאל זה מאופיין ביכולת לגשת לפתרון דרכים רבות ואסטרטגיות מגוונות: שטף וגמישות (לב-זמיר, 2014; Lev-Zamir, 2011 Torrance, 1967). הבעיה אפשרה לכל פותר להביא ידע מתמטי אחר, וגם ליישם אסטרטגיות פתרון מוכרות וחדשות. כפי שראינו, ההתמודדות עם הבעיה אינה מחייבת ידע מתמטי פורמלי בנושא סדרות והיא זימנה עשיית קשרים בין תכנים מתמטיים מגוונים (לב-זמיר, 2014; Leikin & Levav-Waynberg, 2009). מבין דרכי הפתרון, שהוצגו לשלוש השאלות, היו פתרונות חזותיים המבוססים על איורים, פתרונות חישוביים המבוססים על פעולות קונקרטיות בשימוש בפעולות ומספרים והיו פתרונות המבוססים על נוסחאות אלגבריות. ההתמודדות עם הפתרונות זימנה עשיית קשרים הכוללים: זיהוי חוקיות בסדרות חשבוניות, חישובי היקף ושטח מלבנים, הגעה להכללות מתוך הצגת נקודות מבט שונות (לעתים לאותן דרכים ולאותן תוצאות) והבנת עקרונות מתמטיים כמו הוצאת גורם משותף אל מחוץ לסוגריים. תכנים מתמטיים אלה הם חלק מדרישות תכנית הלימודים בבית-ספר היסודי. הבעיה עודדה תהליכי חשיבה מסדר גבוה, המעודדים תהליכי חקר, ארגון נתונים, השוואה, הסקת מסקנות, יכולות הנמקה והצדקת רעיונות (לב-זמיר, 2014).

כפי שצוין בתיאור מהלך המחקר, תפקידן של הסטודנטיות במחקר זה, במיוחד של הסטודנטיות מקבוצה ג, הוא ללמוד על הידע של התלמידים ועל הידע שלהן (הסטודנטיות), כדי להיווכח בחשיבות של תהליך למידה פורמלי על מאפייני יצירתיות בהוראת המתמטיקה. תהליך זה משלב התנסות אישית מוקדמת, הכוללת חשיפה לאסטרטגיות מגוונות כבסיס לעידוד וטיפוח יצירתיות והבניית ידע בקרב תלמידיהן. תפקידן של הסטודנטיות מקבוצה ב (שנה ראשונה להכשרתם), היה בעיקר כדי לאפשר לבחון את מקומה של הכשרתן להוראה לאורך השנים בהבניית ידע פדגוגי וידע על אודות יצירתיות בהוראת המתמטיקה וזאת מתוך השוואה בין דרכי הפתרון המגוונות. ההתנסות של הסטודנטיות מקבוצה ג וניתוח הדרכים שהציגו כלל שלוש הקבוצות, אפשרו להן להבחין בדקויות בין הדרכים, באפיונן על-פי התכנים המתמטיים ובתרומתה להתפתחות הידע הפדגוגי, הכולל יכולות "האזנה" לדרכים המגוונות ולידע המתמטי המיוצג בכל דרך (Ball, 1993). התנסות זו אפשרה להן לראות כיצד דרך פתרון ותיווך מושכל של מורה עשויה להוביל להכללות, ובכך לזרוע את הזרעים שיקדמו פיתוח יצירתיות ופיתוח חשיבה אלגברית כבר בכיתות בית-הספר היסודי.

מתוך ניתוח הדרכים המגוונות שהציגו הסטודנטיות משתי הקבוצות (ראה טבלה 1), נראה שהידע שרכשו הסטודנטיות מקבוצה ג במהלך ההכשרה, הגביר בהן את המודעות למאפייני היצירתיות ולפתרון דרכים מגוונות וייצוגים רבים.

דבריהן של דורית, לימור ודליה מספקים חיזוק למשמעות שאנו, אנשי החינוך המתמטי, רואים בתהליך ההכשרה, הן בהבניית הידע הן בהעלאת רמת המודעות של המתכשרים להוראה, תשתית חיונית ליצירתיות ברמה האישית וליצירתיות המכוונת לעידוד תלמידים. תשתית זו משלבת ניתוח אסטרטגיות של התלמידים בניסיון לקשור בין דרכי הפתרון, ראיית הדמיון והשוני ביניהם וחתירה לעשיית קשרים המובילים לפיתוח חשיבה אלגברית. מתוך דבריהן אפשר ללמוד על מקומה של ההתנסות בתהליך במבט על הוראה "אחרת". בשלב זה אי אפשר ללמוד על ההשלכות העתידיות להתנסות זו ולידע הפדגוגי של הסטודנטיות מקבוצה ג, ויהיה מעניין להמשיך במחקר ולעקוב אחריהן במהלך ההוראה שלהן בשנים הבאות.

מקורות

לב-זמיר, ח' (2014). יצירתיות בהוראת המתמטיקה כפי שהיא נתפסת על ידי מורים למתמטיקה. בתוך ד' פטקין וא' גזית (עורכים), **המורה למתמטיקה: מאפייני הכשרה, ידע, הוראה ואישיות של מורים למתמטיקה בבית-הספר היסודי** (עמ' 145-164). תל-אביב: מכון מופ"ת.

לב-זמיר, ח' (2015). הפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיה לא שגרתית. בתוך א' גזית וד' פטקין (עורכים), **יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות** (עמ' 99-120). תל-אביב: מכון מופ"ת.

Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*, 373-397.

Bolden, D. S., Harries, A. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 143-157.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*, 605-618.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Hershkovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 2-15). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.

Kown, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51-61.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(4), 203-223

Lev-Zamir, H. (2011). *Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions* (Doctoral dissertation). University of Haifa, Israel.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: Author.

da Ponte, J. P. (2007). Investigation and exploration in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Presmeg, N. (2003). Creativity, mathematizing, and didactizing: Leen Streefland's work continues. *Educational Studies in Mathematics*, *54,* 127-137.

Sawyer, R. K. (2004). Creative teaching: Collaborative discussion as disciplined improvisation. *Educational Researcher, 33*(2), 12-20.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (Ed.). (2008). *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Torrance, E. P. (1967). *Scientific views of creativity and factors affecting its growth, creativity and learning*. In J. Kagan (Ed.), *Creativity and learning* (pp. 73-91). Boston: Houghton Mifflin.

Zazkis, R., & Holton, D. (2009). Snapshots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 92-111). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

ד"ר חנה לב-זמיר

עורכת כתב-העת "מספר חזק 2000", בשנים 2010-2015.

ראש החוג לחינוך מתמטי במכללת אורנים ומרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללה.

כתבה כמה פרסומים בנושא מתמטי, ביניהם שני ספרים בשם "חשבון מהעיתון".

תחום העניין המרכזי שלה הוא הכשרת מורים להוראת מתמטיקה עם דגש בפיתוח יצירתיות.