הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה

אבי סיגלר, המכללה הטכנולוגית למקצועות התעופה, חיפה; מכללת ״אפרתה״, ירושלים
משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה

הקדמה

מחקרים ומאמרים למיניהם מראים את החשיבות הרבה של ידע מתמטי מקיף ואת היכולת להשתמש בכלים מתמטיים רבים, המאפשרים למצוא דרכי פתרון מסוימים לאותה משימה גאומטרית ובכך מוצאים את הפתרון הפשוט והברור ביותר וחושפים את היופי הגלום במתמטיקה (יאנובסקי, 2011; לייקין, 2006; לייקין, לבב-ויינברג ולטמן, 2012; Leikin & Lev, 2007; Lowrie, Logan, & Scriven, 2012; Stupel & Ben-Chaim, 2013; Stylianides, 2009). לעתים הכרת משפט או נוסחה, שאינם נמצאים "במלאי הרגיל", מאפשרת להגיע לפתרון בשורה אחת או שתיים.

מבחינת האופי של ההוכחות אפשר לחלק אותן לשתי קבוצות עיקריות: ההוכחה הסטנדרטית וההוכחה האלגנטית. את ההוכחה ללא מילים אפשר לכלול כתת-קבוצה של ההוכחה האלגנטית. כמובן, שהשאיפה היא להגיע להוכחה האלגנטית או להוכחה ללא מילים, אם כי להוכחה האחרונה אפשר להגיע רק במקצת המשימות.

ההוכחה הסטנדרטית

בדרך כלל ההוכחה הסטנדרטית בנויה לפי תבנית מוכרת מראש ומתקבלת לפי הדרך שבחר בה הפותר. היא מתקבלת על סמך הניסיון שלו לפתור בעיות מגוונות, ונראית לו כדרך שתביא אותו אל היעד – פתרון המשימה. מבחינת החשיבה, הפותר סובר שזו הדרך הנכונה והבטוחה וכי יצליח להתגבר על שלבי הביניים ולהתקדם אל המטרה הסופית.

ההוכחה האלגנטית

כשמה כן היא, קצרה ומתבססת על אלמנטים מפתיעים כגון שימוש בטריק מתמטי, במשפט או בנוסחה לא מוכרים. ההוכחה האלגנטית משמשת מקור גאווה לפותרים ובכך היא גם ממריצה אותם להתמודדות עם בעיות אתגריות ברמה גבוהה יותר, אשר מעוררת חשיבה רב-כיוונית ומציאת פתרונות בלתי-קונבנציונליים.

בהוכחה ללא מילים מופיעים בקצרה **נתון, סימונים וצריך להוכיח** (זסלבסקי ווינצקי, 1992; Brown, 1999; Dreyfus, 1991). כמו כן מופיע איור אחד, או יותר, לפעמים בלי כל תוספת, ובמקרים אחרים, בתוספת ביטויים מתמטיים מעטים, בלי נימוקים מילוליים כל שהם. קיימת הנחה כי מתוך התבוננות חזותית באיור ובביטויים המתמטיים, יבין בעל ידע מתמטי מתאים את ההוכחה של המשימה ויוכל לנמק

בעצמו כל שלב בהוכחה ובכך יפתח את יכולת ההוכחה החזותית.

בשנות השבעים החלו להופיע משימות הוכחה מסוג כזה בכתבי-עת מסוימים.

המתמטיקאי נלסן (Nelsen, 1993, 2001) הוציא שני ספרים שבכל אחד מהם אוסף גדול של הוכחות ללא מילים בשם .P.W.W , עם חלוקה לתחומי המתמטיקה הרבים.

ראו (Rao, cited in Shirali, 2012, p. 14), מתמטיקאי שעסק בהוכחות ללא מילים, הביע את חשיבותן במשפט:

> אלגנטיות – אי אפשר לתרגם, רק להדגים. לא ייאמן איזה סגנון יכול להיות למתמטיקאים ולמתמטיקה.
>
> Elegance, they say, cannot be defined, merely demonstrated.
>
> Mathematics – and mathematicians — can have incredible style.

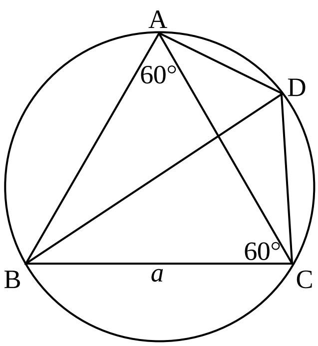
במדור זה אנו מציגים כמה משימות מתמטיות עם הוכחות אלגנטיות ומפתיעות ובכך להציג את היופי הגלום במתמטיקה.

משימה א׳

במשולש שווה-צלעות החסום במעגל – כאשר מחברים נקודה על המעגל עם שלושת הקדקודים של המשולש, סכום האורכים של שניים מהמיתרים שווה לאורך המיתר השלישי.

משולש שווה צלעות ΔABC בעל צלע באורך a חסום במעגל. דרך הנקודה D העבירו מיתרים DA, DB, ו-DC.

יש להוכיח ש-$BD = AD + DC$, כפי שנראה באיור 1.



איור 1

את משימה זו, שמופיעה בספרי לימוד ואף הופיעה באחת מבחינות הבגרות, אפשר לפתור בכל מיני דרכים: גאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה (Stupel & Ben-Chaim, 2013). כאן תוצג הוכחה המבוססת על שימוש במשפט תלמי (פתולמאוס):

בכל מרובע שחסום במעגל – סכום המכפלות של הצלעות הנגדיות שווה למכפלת האלכסונים.

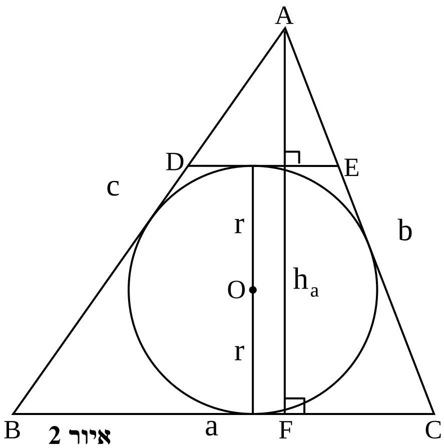
על-ידי שימוש במשפט תלמי: $BD*AC=AB*DC + BC*AD \Rightarrow BD=AD + DC$.

ההוכחה מופיעה בשורה אחת – בתנאי שמכירים ומשתמשים במשפט הנ"ל.

משימה ב'

כל צלע של משולש, גדולה באורכה ביותר מפעמיים הרדיוס של המעגל החסום במשולש (a, b, c > 2r).

ההוכחה הסטנדרטית המקובלת למשימה זו היא שימוש בכלים טריגונומטריים. תובא כאן הוכחה שלדעתנו נמצאת בקטגוריה של הוכחה אלגנטית ("הוכחה ללא מילים"), כפי שנראה באיור 2.

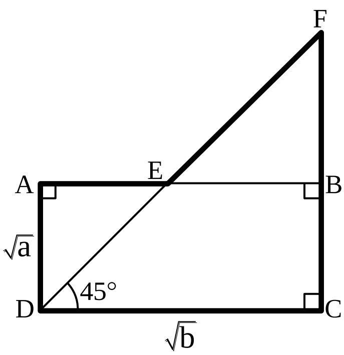


איור 2

$$\left.\begin{array}{l} 2r<h_a<b\ ,\ c \\ 2r<h_b<a\ ,\ c \end{array}\right\} \Rightarrow\ a\ ,\ b\ ,\ c>2r$$

משימה ג'

הוכחה גאומטרית אלגנטית לאי-שוויון בין הממוצע החשבוני לממוצע הגאומטרי (ראה איור 3).



איור 3

נתון: מלבן ABCD

$AD=\sqrt{a}\ ,\ DC=\sqrt{b}\ ;\ \measuredangle ADE=\measuredangle CDE=\measuredangle 45°\ ,\ a\ ,\ b>0\ ;$

$$\begin{array}{ccc} S_{AEFCD} & > & S_{\measuredangle ABCD} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{2}+\dfrac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}{2} & > & \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \Rightarrow\ \dfrac{a+b}{2}>\sqrt{a\cdot b} \end{array}$$

הערות:

(1) אם $a=b$ $\Leftarrow$ $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{a\cdot b}$

(2) כמובן שאפשר להוכיח את אי-השוויון בדרך אלגברית ובדרכים אחרות.

(3) הרחבה על נושא הממוצעים האחרים ראו בתוך בן-חיים (2015), זסלבסקי ווינצקי (1992), מוגילבסקי וסטופל (2006), רימר ובן-חיים (1986).

משימה ד׳

משפט והיפוכו בהקשר לתכונה מיוחדת של טרפז

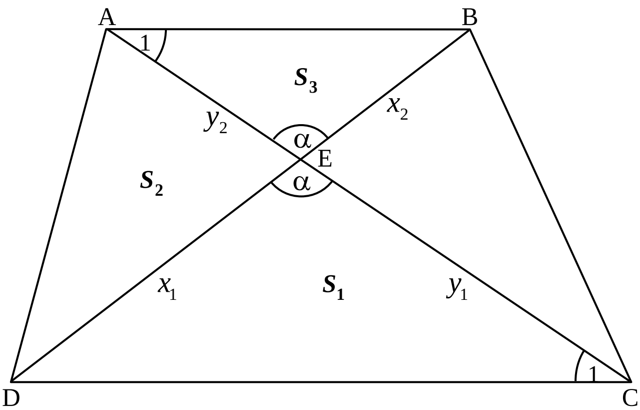
סימון:

$S_1 = S_{\Delta DEC}$, $S_2 = S_{\Delta ADE}$

$S_3 = S_{\Delta BEA}$ (ראה איור 4)

(א) נתון: ABCD טרפז.

אזי: $S_2{}^2 = S_1 \cdot S_3$.



איור 4

הוכחה:

$$= \frac{y_1}{y_2} \Longrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2} x_1 \cdot y_2 \sin\alpha \qquad S_1 = \tfrac{1}{2} x_1 \cdot y_1 \sin\alpha\ ,\ S_3 = \tfrac{1}{2} x_2 \cdot y_2 \sin\alpha$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$S_2{}^2 = \tfrac{1}{4} x_1{}^2 \cdot y_2{}^2 \sin^2\alpha \qquad S_1 \cdot S_3 = \tfrac{1}{4} x_1 \cdot \underbrace{y_1 \cdot x_2}_{x_1 \cdot y_2} \cdot y_2 \sin^2\alpha$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$S_2{}^2 = S_1 \cdot S_3 \Longleftarrow S_1 \cdot S_3 = \tfrac{1}{4} x_1{}^2 \cdot y_2{}^2 \sin^2\alpha$$

(ב) נתון: $S_2{}^2 = S_1 \cdot S_3$

אזי ABCD הוא טרפז

$$S_2{}^2 = S_1 \cdot S_3$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Longrightarrow \Delta DEC \sim \Delta BEA \Longrightarrow \measuredangle A_1 = \measuredangle C_1$$

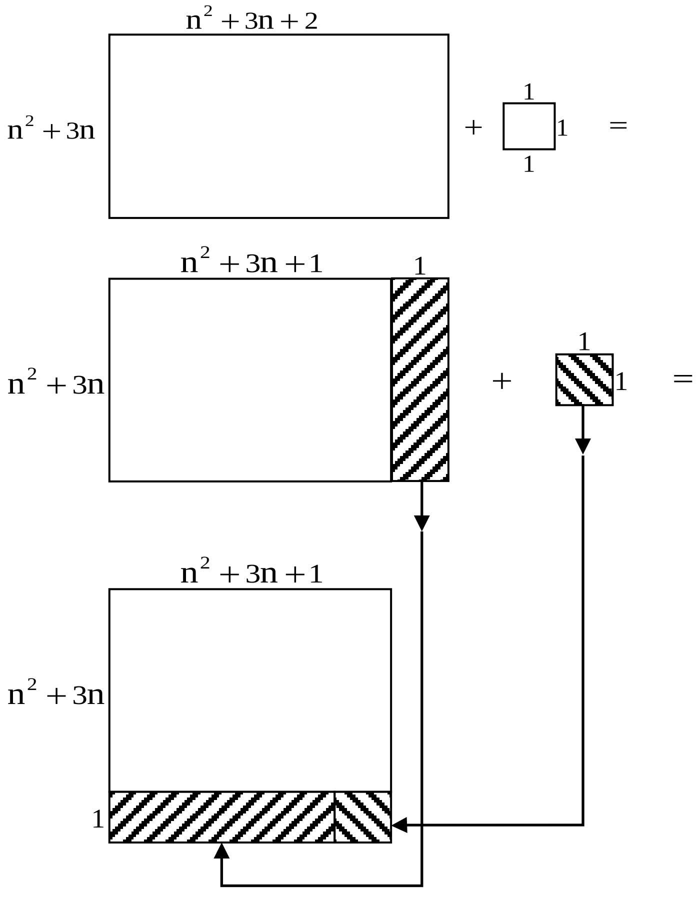
$$\Downarrow$$

טרפז $ABCD \Leftarrow AB \parallel DC$

משימה ה׳

המכפלה של ארבעה מספרים עוקבים ובתוספת 1 היא ריבוע של מספר טבעי.

$$\underbrace{n\overbrace{(n+1)(n+2)}^{n^2+3n+2}(n+3)}_{n^2+3n}+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$



איור 5

הביטוי המתמטי לקבלת ריבוע של מספר טבעי הוא,

$$\Rightarrow\quad n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$$

הערה 1: הוכחת התכונה לעיל מבוססת על התכונה: כשמכפילים שני מספרים טבעיים שהפרשם 2

ומוסיפים 1, התוצאה היא ריבוע של מספר טבעי. כאשר מכפילים ארבעה מספרים טבעיים, ההפרש בין המכפלה של שני המספרים הקיצוניים ובין המכפלה של שני המספרים האמצעיים הוא 2, ולכן הכפלת המכפלות בתוספת 1 נותנת ריבוע של מספר טבעי.

הערה 2: כשבודקים את המכפלה של 4 מספרים טבעיים עוקבים כשמוסיפים להם את איברי סדרה חשבונית: $(n+3+3k), (n+2+2k), (n+1+k), n$, כאשר k – מספר טבעי, מתברר שיש להוסיף לתוצאה את החזקה הרביעית של $(k+1)$ כדי לקבל ריבוע של מספר טבעי. זוהי למעשה הכללה ומשימה 3 היא מקרה פרטי שלה עבור $k=0$.

הביטוי האלגברי למקרה הכללי הוא:

$$n(n+1+k)(n+2+2k)(n+3+3k)+(k+1)^4=[n^2+3n(k+1)+(k+1)^2]^2$$

משימה ו׳

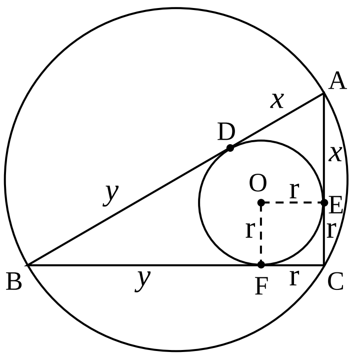
(שתי הוכחות באיור אחד).

במשולש ישר-זווית ΔABC $(\measuredangle C=90°)$ (ראה איור 6).

יש להוכיח:

(א) סכום הניצבים של משולש ישר זווית שווה לסכום הקטרים של המעגל החסום והמעגל החוסם אותו: $a+b=2r+2R$.

(ב) הוכחה נוספת של משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$



איור 6

הוכחה:

(א) $OF=FC=CE=EO=r \quad , \quad AB=2R$

$$BD=BF=y \quad , \quad AD=AE=x$$

$$BC+CA=y+r+r+x=2r+x+y=2r+2R$$

(ב) $a+b=c+2r \quad \Rightarrow \quad c=x+y \; , \; b=x+r \; , \; a=y+r$

$$r=\frac{a+b-c}{2} \quad (I) \quad \Rightarrow \quad a+b=c+2r$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot b}{2}$$

$$r=\frac{a\cdot b}{a+b+c} \quad (II) \quad \Rightarrow \quad r=\frac{S_{\Delta ABC}}{P}=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$(I) = (II) \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)-c}{2} = \frac{a \cdot b}{(a+b)+c} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

משימה ז׳

להוכיח שעבור כל משולש ΔABC מתקיים הקשר הבא: $r \le \frac{1}{2}R$

להלן נדגים את שני סוגי ההוכחות: ההוכחה הסטנדרטית (אם כי מפתיעה) וההוכחה האלגנטית (הוכחה ללא מילים).

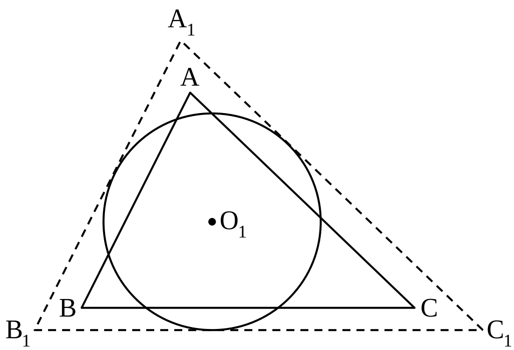
א. ההוכחה הסטנדרטית

טענה 1

יהיה r רדיוס המעגל החסום במשולש ΔABC.

בונים מעגל שמרכזו O_1 בעל רדיוס r_1 שחותך את צלעות המשולש ΔABC (ראה איור 7).

בונים את משולש $\Delta A_1B_1C_1$ שצלעותיו מקבילות לצלעות המשולש ΔABC ומשיקות למעגל O_1. ברור ש- $r_1 > r$.



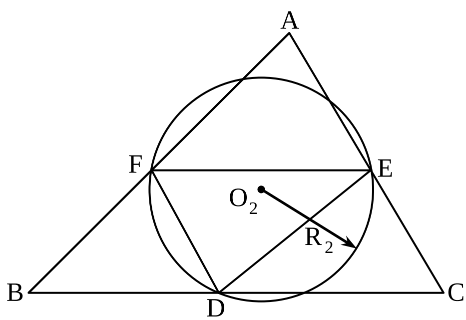
איור 7

הוכחה:

נוצר משולש $\Delta A_1B_1C_1$ הדומה למשולש ΔABC אך גדול ממנו בשטחו, ולכן,

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r_1^2}{r^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad r_1 > r$$

וזאת על-פי המשפט: היחס בין שטחי משולשים דומים שווה ליחס בין ריבועי הרדיוסים של המעגלים החסומים בהם.



איור 8

טענה 2

במשולש ΔABC שרדיוס המעגל החוסם אותו הוא R ורדיוס המעגל החסום בו הוא r , וכן הנקודות: D, E, F הן אמצעי הצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה, והנקודה O_2 היא מרכז המעגל החוסם את משולש

ΔDEF שרדיוסו R_2, אזי קיים ש- $R_2=\frac{1}{2}R$ (ראה איור 8).

הערה: טענה 2 היא מקרה פרטי של טענה 1.

הוכחה:

משולש ΔDEF דומה למשולש ΔABC עם יחס דמיון של $1:2$ (כי הקטעים: DE, EF ו-FD הם קטעי אמצעים).

לכן $R_2=\frac{1}{2}R$ (לפי יחס הדמיון).

לפי טענה 1 מקבלים ש- $R_2>r$ ולפי טענה 2 התקבל ש- $R_2=\frac{1}{2}R$, ולכן $r<\frac{1}{2}R$.

ברור שכאשר המשולש ΔABC הוא שווה-צלעות, המעגל העובר דרך הנקודות D, E, ו-F משיק לצלעות המשולש ΔABC, ולכן: $r=\frac{1}{2}R$. מכאן: $r\le\frac{1}{2}R$.

הערה:

את הקשר הנזכר לעיל מוכיחים בדרכים רבות, בין השאר:

- באמצעות נוסחת אוילר: $d^2=R(R-2r)$, כאשר d הוא המרחק בין מרכז המעגל החוסם למרכז המעגל החסום.
- באמצעות אי-שוויונים טריגונומטריים (Stupel & Ben-Chaim, 2013).
- באמצעות יחסים בין שטחים.

להלן קישור לחקר דינמי של הקשר בין הרדיוסים של המעגל החוסם והחסום במשולש: http://tube.geogebra.org/m/2321293

בקישור זה אפשר לעקוב דרך קבע אחר הקשר בין ערכו של רדיוס המעגל החסום לערכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש בעזרת תוכנת גאוגברה. כשגוררים את אחד מקדקודי המשולש אפשר לראות בכל מצב את המעגל החוסם, את המעגל החסום, את המעגל העובר דרך נקודות האמצע של הצלעות, את מרכזי המעגלים וכן את הרדיוסים שלהם.

(ב) ההוכחה האלגנטית (הוכחה ללא נימוקים מילוליים)

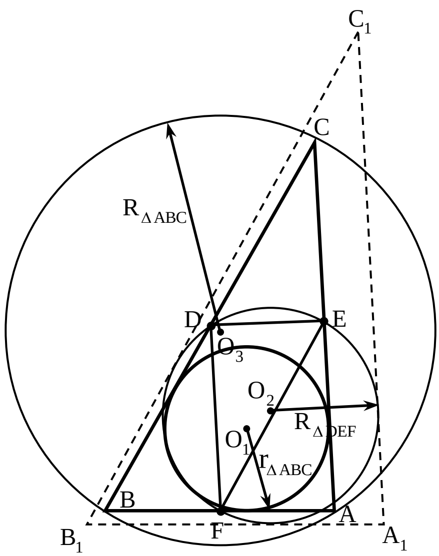
ראה איור 9:

$$\left.\begin{array}{l} AF=FB \\ BD=DC \\ AE=EC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow R_{\Delta ABC}=2\cdot R_{\Delta DEF}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 \parallel AB \\ A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ r_{\Delta A_1B_1C_1}=R_{\Delta DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \;,\; \Delta ABC \subset \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow r_{\Delta A_1B_1C_1} > r_{\Delta ABC}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{\Delta DEF} > r_{\Delta ABC}$$



איור 9

סיכום

הוכחה או פתרון של משימה מתמטית מחייבים הנמקה מילולית או בעזרת סימונים מתמטים מקובלים לכל שלב של המשימה. ההנמקה היא למעשה הוכחה לכך שאכן הדרך נכונה ומתבססת על הנתונים, על משפטים ידועים, על פעולות מתמטיות וכדומה.

כיוון שלעתים קרובות ישנן כמה דרכי פתרון למשימה מסוימת באותו תחום מתמטי או על-ידי שילוב של כמה תחומים במתמטיקה, רצוי למצוא את הפתרון האלגנטי ביותר (הפשוט והקצר), אשר במקרים רבים אפשר להציג אותו בלי מילים כמו בדוגמאות לעיל, המפתחות את יכולת ההוכחה הוויזואלית.

רשימת מקורות

בן-חיים, ד' (2015). דרכי בנייה שונות לממוצעים המתמטיים והסדר ביניהם. בתוך מ' סטופל וק' זיסקין (עורכים), **בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות** (עמ' 72-86). חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

זסלבסקי, א' ווינצקי, ג' (1992). **הוכחות ויזואליות ללא מילים (כמעט)**. חיפה: הטכניון, "קשר חם". אוחזר מתוך http://highmath.haifa.ac.il/data/sadnaot/sadna31.pdf

יאנובסקי, ל' (2011). פתרון בעיות לא שגרתיות בעזרת שיטות מקוריות מתחומים מתמטיים שונים. **על"ה, 45**, 36-42.

לייקין, ר' (2006). על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות. **על"ה, 36**, 8-14.

לייקין, ר', לבב-ויינברג, ע' ולטמן, א' (2012). ריבוי פתרונות לבעיה בגאומטריה והכללת הבעיה. **על"ה, 47**, 30-36.

מוגילבסקי, ר' וסטופל, מ' (2006). **מפלאי אי-השוויונים של הממוצעים**. חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

רימר, ד' ובן-חיים, ד' (1986). מרוב ממוצעים – רואים את היער. **שבבים, 9**(25).

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*. New York:

Routledge.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-48). Assisi, Italy.

Leikin, R., & Lev, H. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, Korea.

Lowrie, T., Logan, T., & Scriven, B. (2012). Perspectives in geometry and measurement in the Australian curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen, & D. Siemon (Eds.), *Engaging the Australian curriculum mathematics: Perspectives from the field* (pp. 71-88). Retrieved from http://www.merga.net.au/node/223

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words I: Exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2001). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Shirali, S. (2012). Proof without words. *At Right Angles, 1*(1), 14-16.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). Plane geometry and trigonometry – Related fields: Do they work hand in hand? *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(1), 43-74.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning and proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288.

פרופ׳ משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.

מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים.

פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו״ל.

עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה.

בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי״ס שש-שנתי.

ד״ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד״ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.

מרצה במכללת אפרתה.

פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.