הדגמת דרכי-פתרון שונות לארבע משימות הנדסיות

הקדמה

המתמטיקה מורכבת ממכלול של תחומים, המשולבים זה בזה. בשל כך ניתן להתמודד עם המשימות, שבדרך כלל שייכות לתחום אחד (גאומטריה בבעיות שיוצגו) עם דרכי-פתרון מתחומים אחרים.

פתרון בעיות רבות בגאומטריה מחייב להעביר קווי-עזר ובניות, שבלעדיהם קשה להגיע לפתרון. העברת קווי-עזר מתאימים היא בעיה לא קלה בפני עצמה, המחייבת ראייה עמוקה וניסיון רב[1-2].

יחד עם זאת, על-ידי שימוש בדרכי פתרון וידע מתחומים אחרים של המתמטיקה – ניתן לקבל פתרונות פשוטים ומהירים יותר[3-4].

במאמר יוצגו ארבע משימות יפות מהגאומטריה הקלסית, כשלכל משימה יובאו מספר פתרונות גאומטריים, המלווים בפתרונות נוספים מהתחומים: טריגונומטריה, הנדסה אנליטית ואלגברה וֶקטורית (בחלק מהמשימות).

הקורא מוזמן לבחור את הפתרון הנאה ביותר בכל אחת מהמשימות, ויש להניח, שהבחירה לא תהיה אחידה.

מכל מקום, המשימות ודרכי הפתרון מהוות מקור להעשרת הידע ולרכישת מיומנויות להתמודדות עם בעיות אחרות.

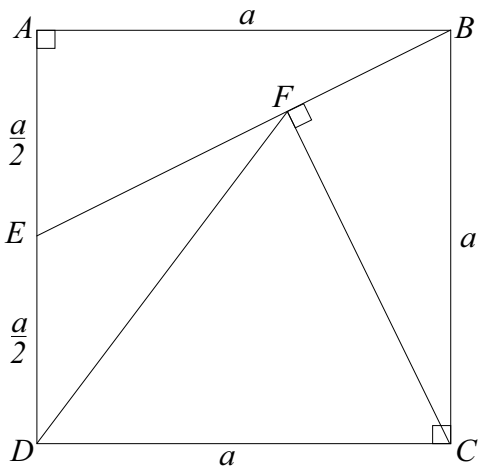
למעוניינים במשימות נוספות, שניתן לפתור אותן תוך שילוב תחומים במתמטיקה ושימוש בדרכים לא שגרתיות –מוצע לעיין במראי מקומות, שיש בהם מגוון רחב של בעיות ואתגרים[5-7].

תארגים: *פתרונות חלופיים, שילוב תחומי מתמטיקה*

שנתון *"יקב"* – תשס"ד כרך ט'

משימה מס' 1

נתון ריבוע שאורך צלעו a . מחברים את הקדקוד B עם הנקודה E, שהיא אמצע הצלע AD. מהקדקוד C מורידים אנך CF לקטע BE. הוכח, שהאורך של DF שווה לאורך צלע הריבוע (ציור מס' 1).



ציור מס' 1

א – הוכחות גאומטריות

<u>דרך א'</u>

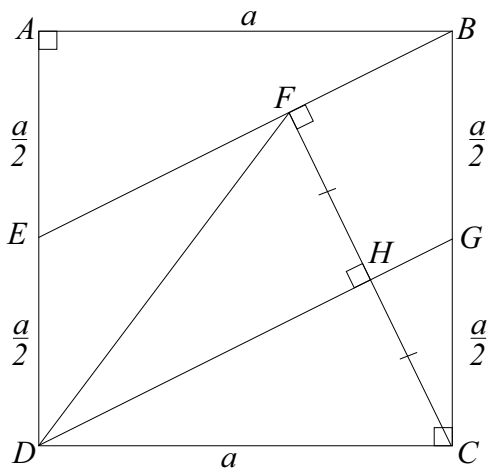
מחברים את הקדקוד D עם הנקודה G – אמצע הצלע BC (כנראה בציור מס' 2). הישר DG חותך את הישר CF בנקודה H.

המרובע DGBE הוא מקבילית, ולכן GH קטע אמצעים במשולש CFB. מעובדה זו נובע CH=FH

$\sphericalangle DHF=90^0$ (כי EB||DG – זוויות מתחלפות).

מכאן DH אנך אמצעי ל-FC. מעובדה זו נובע: DF=DC=a (תכונת האנך האמצעי)

מ.ש.ל.

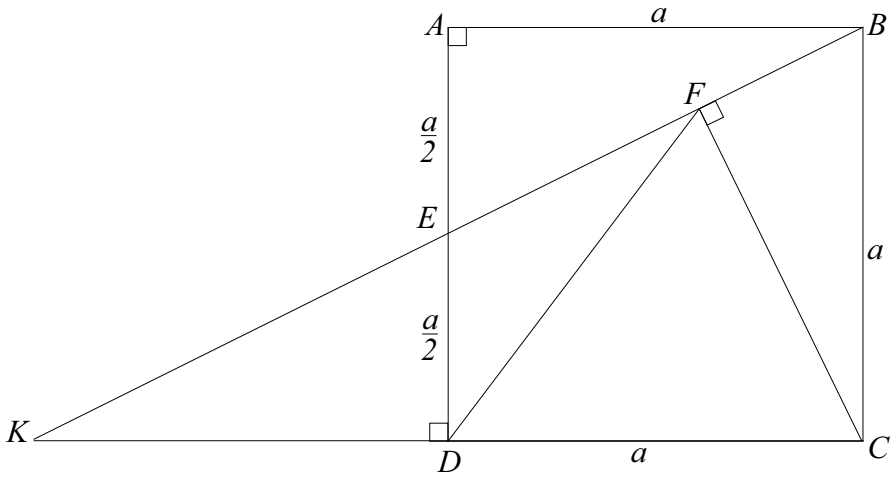


ציור מס' 2

<u>דרך ב'</u>

ממשיכים את הישר EB עד לחיתוכו עם המשך DC (כנראה בציור מס' 3). המשולשים ABE ו-DKE חופפים (ז.צ.ז.). מהחפיפה נובע AB=KD=DC=a. מסקנה DF הוא תיכון ליתר במשולש ישר זווית, ולכן הוא שווה למחצית היתר, כלומר FD=DC=a

מ.ש.ל.



ציור מס' 3

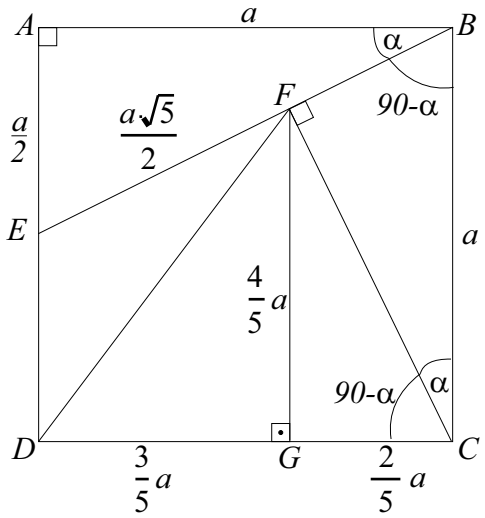
דרך ג'

משימוש במשפט פיתגורס במשולש ABE מקבלים

$$EB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

המשולשים ABE ו-FCB דומים, כפי שנראה מסימון הזוויות בציור מס' 4.

על-ידי שימוש ביחס צלעות מתאימות במשולשים דומים – מקבלים $FC = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. מהנקודה F מורידים אנך FG לצלע DC. על-ידי שימוש ביחס הדמיון במשולשים GFC ו-ABE מקבלים: $FG = \frac{4}{5}a$ ו- $GC = \frac{2}{5}a$, ולכן $DG = \frac{3}{5}a$.

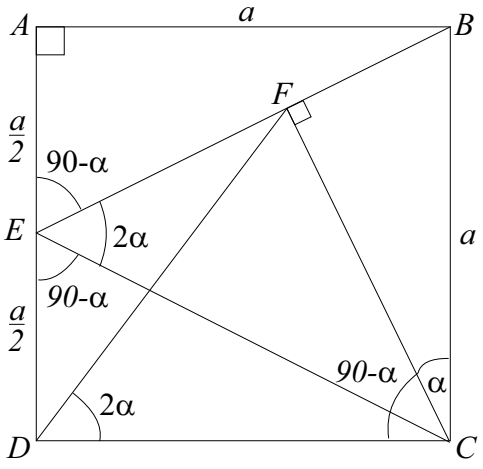


ציור מס' 4

על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש DFG מקבלים $DF = a$

מ.ש.ל.

דרך ד'



ציור מס' 5

מסמנים $\measuredangle BCF = \alpha$. בהתאם לחישוב זוויות במשולשים השונים מקבלים:

$$\measuredangle AEB = \measuredangle DEC = \measuredangle FCD = 90\text{-}\alpha$$

מכאן, $\measuredangle BEC = 2\alpha$ (ציור מס' 5).

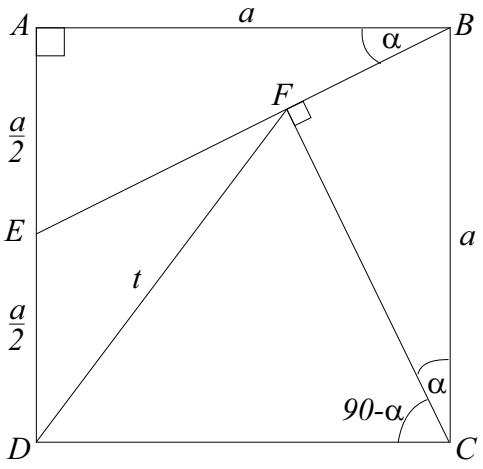
המרובע EFCD הוא בר-חסימה

$(\measuredangle EDC = \measuredangle CFE = 90^0)$

מכאן נובע: $\measuredangle FEC = \measuredangle FDC = 2\alpha$ (זוויות היקפיות, הנשענות על הקשת FC). לכן הזווית השלישית במשולש DFC היא $\measuredangle DFC = 90\text{-}\alpha$, כלומר משולש DFC הוא ש"ש: $DF=DC=a$ מ.ש.ל.

ב – הוכחה על-ידי טריגונומטריה

דרך א'



ציור מס' 6

בהתאם לסימון של דרך ג' בגאומטריה $CF = a \cdot \cos\alpha$. על-ידי שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש DFC (ציור מס' 6) – מקבלים:

$$t^2 = a^2 + a^2\cos^2\alpha - 2a^2\cos\alpha\cdot\cos(90-\alpha)$$
$$t^2 = a^2(1+\cos^2\alpha - \sin 2\alpha)$$

לפי משולש EAB, $tg\alpha = \frac{1}{2}$

ומזה נובע: $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

הצבת ערכי הפונקציות נותן:

$$t^2 = a^2\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}\right]=a^2$$

מכאן, $t=a$

מ.ש.ל.

<u>דרך ב'</u>

הפתרון המוצע הוא שילוב של דרך ד' בגאומטריה עם דרך א' בטריגונומטריה.

הקטע EC, שאורכו $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ הוא קוטר המעגל, החוסם את המרובע EDCF. לכן $R=\frac{EC}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{4}$

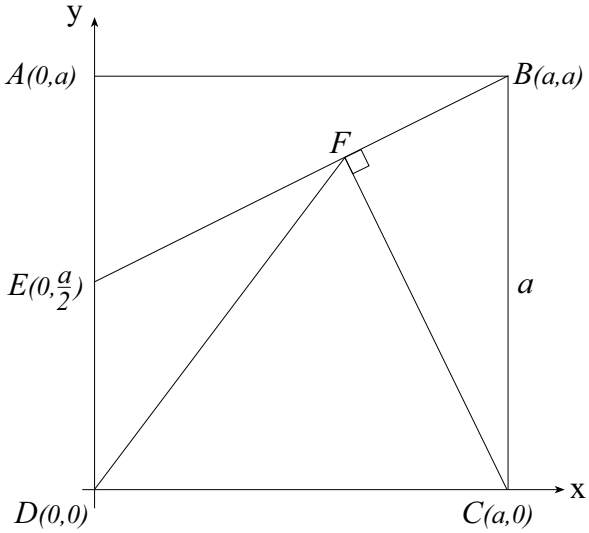
$\measuredangle$FCD = 90-α, ולכן לפי משפט הסינוסים במשולש FCD

$$\frac{DF}{\sin(90-\alpha)}=2R \Rightarrow DF=2R\cos\alpha=2\cdot\frac{a\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=a$$

מ.ש.ל.

ג – הוכחה על-ידי הנדסה אנליטית

בוחרים מערכת צירים באופן שהקדקוד D בראשית הצירים ושיעורי הקדקוד הנגדי B(a,a) (ציור מס' 7).



ציור מס' 7

משוואת EB היא $y=\frac{1}{2}(x+a)$.

משוואת CF היא y=-2(x-a) .

שיעורי נקודות החיתוך F של הישרים CF

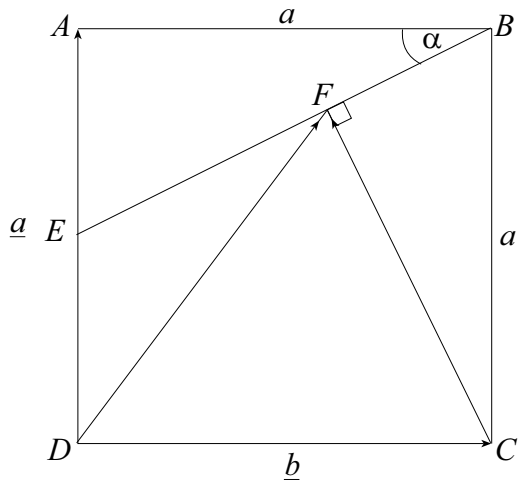
ו-EB הם $F\left(\frac{3}{5}a,\frac{4}{5}a\right)$

מכאן,

$$DF=\sqrt{\left(\frac{3}{5}a-0\right)^2+\left(\frac{4}{5}a-0\right)^2}=a$$

מ.ש.ל.

ד – הוכחה על-ידי אלגברה וקטורית



ציור מס' 8

נסמן: $\overrightarrow{DA}=\underline{a}$ $\overrightarrow{DC}=\underline{b}$ (ציור מס' 8).

היות ו-ABCD ריבוע, הרי $|\underline{a}|=|\underline{b}|$

בהתאם לסימון $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}$.

הנקודה F נמצאת על הקטע EB. לכן $\overrightarrow{EF}=\lambda\left(\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}\right)$,

$$\overrightarrow{CF}=-\underline{b}+\frac{1}{2}\underline{a}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(1+\lambda)\underline{a}+(\lambda-1)\underline{b}$$

היות ו- $EB\perp CF$, לכן $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=0$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}(1+\lambda)\underline{a}+(\lambda-1)\underline{b}\right]=0$$

$$\frac{1}{4}(1+\lambda)|\underline{a}|^2+(\lambda-1)|\underline{b}|^2=0 \quad (\underline{a}\cdot\underline{b}=0).$$

לפי הנתון: $|\underline{a}|=|\underline{b}|$, $\frac{1}{4}(1+\lambda)+(\lambda-1)=0$. מכאן $\lambda=\frac{3}{5}$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\underline{a}+\lambda\left(\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}\right)=\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{b}\right)=\frac{4}{5}\underline{a}+\frac{3}{5}\underline{b}$$

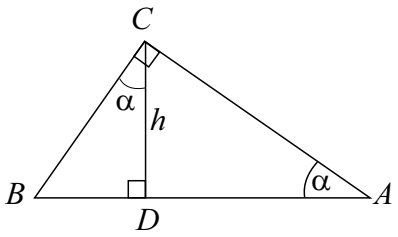
$$\left|\overrightarrow{DF}\right|^2=\left(\frac{16}{25}+\frac{9}{25}\right)|\underline{a}|^2=|\underline{a}|^2\Rightarrow DF=a$$

מ.ש.ל.

משימה מס' 2

נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^0$), שבו היתר גדול פי 4 מגובה המורד עליו. מצא את זוויות המשולש.

מסמנים את הגובה ליתר ב-h (DC=h), ולכן AB=4h (כנראה בציור מס' 9).



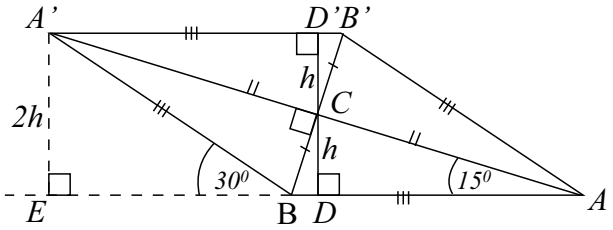
ציור מס' 9

א – מציאת הזוויות על-ידי שימוש בגאומטריה

דרך א'

נאריך את AC באורכו עד לנקודה 'A, ונאריך את BC באורכו עד לנקודה 'B (ציור מס' 10).

המרובע שהתקבל 'ABA'B הוא המעוין (מרובע, שבו האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה).הגובה למעוין – ערכו 2h (DD'=2h).



ציור מס' 10

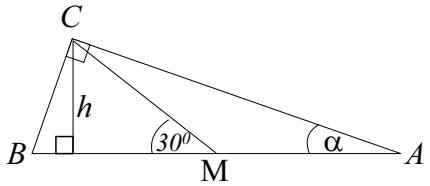
נוריד את הגובה מהקדקוד 'A להמשך הצלע AB, ונסמן נקודה זו ב-E. במשולש A'BE הניצב A'E=2h והיתר A'B=4h. לפיכך ערך זוויות A'BE הוא 30^0.

$\sphericalangle B'AB = \sphericalangle A'BE = 30^0$ (זוויות מתאימות).

מכאן $\sphericalangle CAB = 15^0$ (אלכסוני המעוין חוצים את זוויותיו).

דרך ב'

מעבירים את התיכון CM (ציור מס' 11). כידוע, "התיכון ליתר שווה למחצית היתר". לפיכך CM=2h, ומכאן $\sphericalangle CMB = 30^0$ (הניצב שווה למחצית היתר). משולש CMB ש"ש (CM=MB=2h). לכן $\sphericalangle B = 75^0$, ומכאן $\sphericalangle BAC = 15^0$.



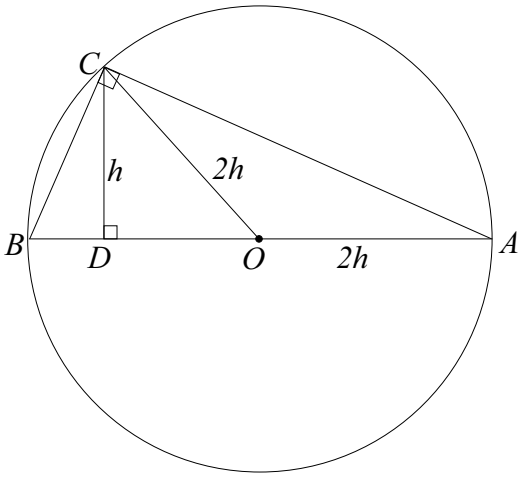
ציור מס' 11

<u>דרך ג'</u>

נחסום את המשולש במעגל. היות ו-90^0 C $=\measuredangle$, אז היתר AB הוא קוטר במעגל, שרדיוסו 2h (ציור מס' 12).

במשולש ישר הזווית CDO (O – מרכז המעגל), הגובה CD=h, והיתר OC=R=2h.

מכאן $\measuredangle COD = 30^0$, ולכן $\measuredangle CAO = 15^0$ (זווית היקפית, הנשענת על אותה הקשת של הזווית המרכזית).



ציור מס' 12

ב – על-ידי שימוש בטריגונומטריה

<u>דרך א'</u>

שילוב בין גאומטריה וטריגונומטריה (ציור מס' 9)

על-פי המשפט: "הגובה ליתר הוא הממוצע ההנדסי של היטלי הניצבים על היתר" – נרשום:

$$h^2 = AD \cdot BD = AD(4h - AD) \Rightarrow AD^2 - 4h \cdot AD + h^2 = 0$$

פתרון המשוואה: $AD = \dfrac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 4h^2}}{2} = h\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

כלומר קיימות שתי אפשרויות: I. $AD = h(2+\sqrt{3})$

II. $AD = h(2-\sqrt{3})$

נסמן את הזוויות $\measuredangle CAB = \alpha$, ונקבל עבור אפשרות I

$$tg\alpha = \frac{h}{h\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 15^0 \Rightarrow \beta = 75^0$$

עבור אפשרות II

$$tg\alpha = \frac{h}{h\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 75^0 \Rightarrow \beta = 15^0$$

כלומר הזוויות החדות של המשולש הן: 15^0 ו-75^0.

דרך ב'

מחישוב זוויות מקבלים, שגם זווית BCD ערכה α. על-ידי שימוש בטריגונומטריה של משולשים ישרי זווית (ACD ו-BCD) – נקבל $BD = h \cdot tg\alpha$ ו- $AD = h \cdot ctg\alpha$.

$$AB = 4h = AD + DB = h \cdot ctg\alpha + h \cdot tg\alpha$$

מצמצמים בשני האגפים ב-h, ומקבלים משוואה טריגונומטרית: $ctg\alpha + tg\alpha = 4$. נחליף את הקוטנגנס בטנגנס, ונקבל משוואה ריבועית: $\frac{1}{tg\alpha} + tg\alpha = 4 \Rightarrow tg^2\alpha - 4tg\alpha + 1 = 0$

הפתרונות:
$$tg\alpha = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 15^0$$
$$tg\alpha = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 75^0$$

הערות: – הפתרונות א' וב' מחייבים בשלב הסופי להשתמש במחשבון למציאת $arctg\alpha$

– את המשוואה הטריגונומטרית ניתן לפתור בדרך נוספת, שאינה מחייבת בסיום שימוש במחשבון, כמתואר להלן:

$$tg\alpha + tg\alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 4$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = 15^0, \qquad \alpha_2 = 75^0$$

התייחסות מתודית:

בדומה למשימה הקודמת – את המשימה הזו ניתן לתת לתלמידים בארבעה מועדים של לימוד המתמטיקה – בהתאם לידע שלהם בכל שלב:

בשלב הראשון כשנרכש ידע בסיסי בהנדסת מישור (חפיפת משולשים, קווים מקבילים, תכונות של משולשים ומרובעים מיוחדים), ניתן לצפות לפתרון לפי דרכים א' ו-ב' של הגאומטריה.

בשלב שני כשנלמד הפרק על המעגל, ניתן לצפות לפתרון לפי דרך ג' של הגאומטריה.

בשלב השלישי כשנרכשו ידע בדמיון משולשים, יכולת לפתור משוואות ריבועיות וידע בסיסי בטריגונומטריה (טריגונומטריה במשולש ישר זווית בלבד), מסוגלים התלמידים למצוא את הפתרון לפי דרך א' של טריגונומטריה.

בשלב הרביעי כשנרכשה מיומנות לפתרון משוואה טריגונומטרית, ניתן להגיע לפתרון בדרך ב' של טריגונומטריה.

משימה מס' 3

נתון משולש ש"ש בעל צלעות נתונות. מצא:

א. את r – רדיוס המעגל החסום במשולש.

ב. את R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

א – מציאת רדיוס המעגל החסום r

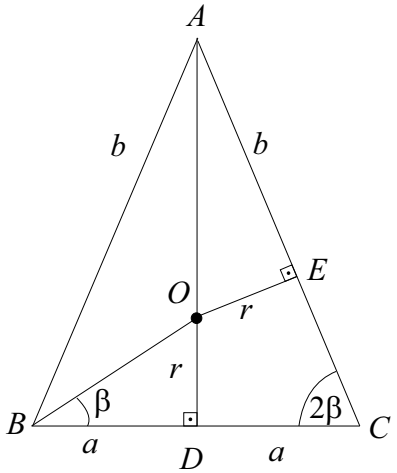
נתון: AB=AC=b – שוקיים

BC=2a – בסיס

נסמן: זוויות בסיס, $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 2\beta$.

ידוע, שמיקום מרכז המעגל החסום הוא מפגש חוצי-הזווית, ובמשולש ש"ש הוא נמצא על הגובה לבסיס AD.

נסמן את מרכז המעגל ב-O, ונחבר את קדקוד B עם מרכז המעגל (ציור מס' 13).



ציור מס' 13

א – על-ידי שימוש בגאומטריה

<u>דרך א'</u>

בהתאם למשפט חוצה הזווית (BO – חוצה זווית במשולש ABD)

$$\frac{AO}{OD}=\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{b^2-a^2}-r}{r}=\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad r=a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

<u>דרך ב'</u>

ממרכז המעגל נוריד אנך OE לצלע AC (ציור מס' 13). הנקודה E היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק (OE=r). המשולשים AOE ו-ABD דומים. על-ידי שימוש ביחס הדמיון – מקבלים בדומה לדרך א' $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}-r}{r}$ ומכאן, $r=a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$

ב– על-ידי שימוש בטריגונומטריה

דרך א'

לפי משולש OBD, $r = a \cdot tg\beta$. נבטא את ערך $tg\beta$ באמצעות a ו-b, וזאת – על סמך זהויות טריגונומטריות והגדרת הפונקציות הטריגונומטריות:

$$tg\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$$

ממשולש ABD מקבלים: $\cos 2\beta = \frac{a}{b}$ ו- $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

נציב ערכים אלו בזהות הטריגונומטרית הנ"ל:

$$tg\beta = \frac{1-\frac{a}{b}}{\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}} = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$. ומכאן $$r = a \cdot tg\beta = a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

דרך ב'

מציאת r תיעשה על-ידי שילוב של ידע בהנדסה עם ידע בטריגונומטריה.

ידוע, ש- $r = \frac{S}{p}$, כאשר S הוא שטח המשולש ו-p חצי היקפו $r = \frac{\frac{2ab\sin 2\beta}{2}}{\frac{2a+2b}{2}} = \frac{ab\sin 2\beta}{a+b}$.

על-ידי הצבת sin2β, כפי שנמצא בדרך א', מקבלים $r = a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$

תלמיד, שעדיין אינו יודע טריגונומטריה, יכול להשתמש בנוסחת הרון לחישוב שטח משולש תוך הצבת הצלעות ו-$p=a+b$.

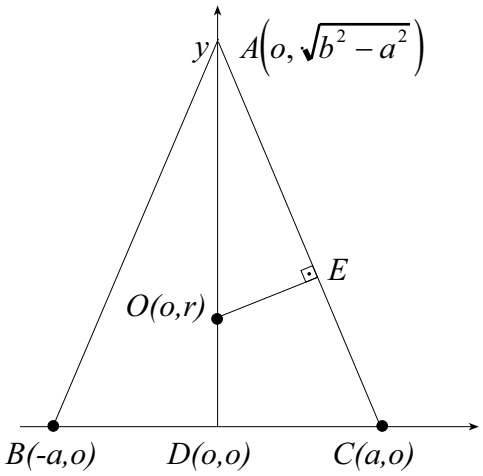
$$S = \sqrt{p(p-2a)(p-b)(p-b)} = a\sqrt{b^2-a^2}$$

ומכאן, $$r = \frac{S}{p} = a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

ג – על-ידי שימוש בהנדסה אנליטית

נמקם את קדקוד המשולש במערכת צירים, כשהבסיס הוא על ציר ה-x, אמצעו מתלכד עם ראשית הצירים, והגובה לבסיס מתלכד עם הציר y.

בהתאם לכך, שיעורי הקדקודים ומרכז המעגל החסום הם: $A\left(0,\sqrt{b^2-a^2}\right)$, $C(a,0), B(-a,0)$, ו-O(0,r) (ציור מס' 14).



ציור מס' 14

המשוואה המפורשת של השוק AC היא $y=-\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}(x-a)$, ולכן המשוואה הכללית של השוק, $\sqrt{b^2-a^2}\,x+ay-a\sqrt{b^2-a^2}=0$.

בעזרת נוסחת המרחק של נקודה מִיָּשָׁר – נחשב את המרחק של מרכז המעגל החסום O מהשוק AC השווה לרדיוס r.

$$r=\frac{\left|\sqrt{b^2-a^2}\cdot 0+ar-a\sqrt{b^2-a^2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{b^2-a^2}\right)^2+a^2}}$$, ואז

$$r=\frac{a\left(\sqrt{b^2-a^2}-r\right)}{b}$$

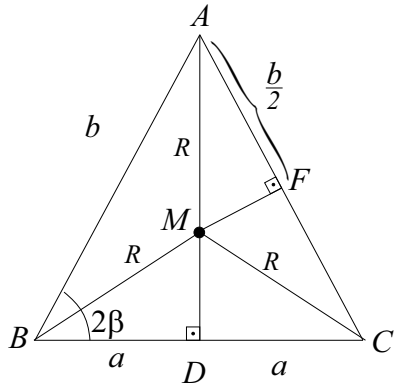
חילוץ r מהמשוואה נותן $r=a\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$

ב – מציאת רדיוס המעגל החוסם – R

א' – על-ידי שימוש בגאומטריה

<u>דרך א'</u>

מרכז המעגל החוסם נמצא על גובה לבסיס. נסמן את המרכז באות M (ציור מס' 15).



ציור מס' 15

$$MD = AD - R = \sqrt{b^2 - a^2} - R$$

על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש MBD,

$$R^2 = a^2 + \left(\sqrt{b^2 - a^2} - R\right)^2$$

מחלצים את R ומקבלים $R = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$

<u>דרך ב'</u>

נוריד מהנקודה M אנך לשוק AC, ונקבל את נקודה F, החוצה את השוק (ΔMAC – ש"ש).

מדמיון המשולשים: ADB ו-AFM – מקבלים:

$$\frac{R}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{b^2 - a^2}} \Rightarrow R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$$

<u>דרך ג'</u>

לפי הנוסחה: $R = \dfrac{abc}{4S}$. כמו במשימה הקודמת – אפשר לחשב את השטח S לפי נוסחת הרון:

$S = a\sqrt{b^2 - a^2}$, ולכן $R = \dfrac{2a \cdot b \cdot b}{4a\sqrt{b^2 - a^2}} = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$

ב' – על-ידי שימוש בטריגונומטריה

על-פי משפט הסינוסים, $2R = \dfrac{b}{\sin 2\beta} \Rightarrow R = \dfrac{b}{2\sin 2\beta}$

נציב $\sin 2\beta = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, ונקבל $R = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$

ג' – על-ידי שימוש בהנדסה אנליטית

נמקם את קדקודי המשולש במערכת צירים,

כשהבסיס הוא על ציר ה-x, אמצעו – עם ראשית הצירים, והגובה לבסיס מתלכד עם ציר ה-y. נסמן את מרכז המעגל החוסם ב-M(o,n) (ציור מס' 16).

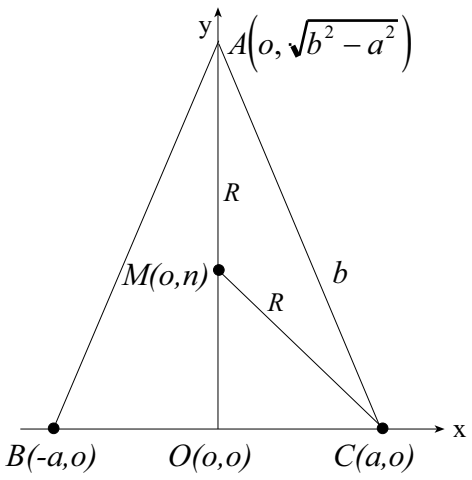
היות ו-AM=CM=R, הרי על-ידי שימוש בנוסחת המרחק בין שתי נקודות – אפשר לחלץ את *n*:

$$\sqrt{a^2+n^2}=\sqrt{\left(\sqrt{b^2-a^2}-n\right)^2}$$

$$n=\frac{b^2-2a^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$$

לאחר מציאת n נציב את ערכו, ונחַשב את הרדיוס.

$$R=CM=\sqrt{a^2+n^2}=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$$

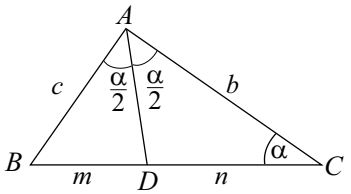


ציור מס' 16

הערה: יש לתת את הדעת, שמיקום מרכז המעגל החוסם יכול להיות מחוץ למעגל (משולש קהה זווית), ועל הקורא להתבונן במקרה זה.

משימה מספר 4

הוכח, שריבוע אורך חוצה הזווית במשולש – שווה להפרש שבין מכפלת שתי צלעות סמוכות לבין מכפלת הקטעים של הצלע השלישית, שנחתכו על-ידי חוצה הזווית (ציור מס' 17).



ציור מס' 17

נסמן: AD חוצה זווית, AC=b , AB=c, BD=m, DC=n

צ"ל: $AD^2=b\cdot c-m\cdot n$

א' – על-ידי גאומטריה

חוסמים את המשולש במעגל, ומסמנים ב-M את נקודת המפגש של המשך חוצה הזווית עם המעגל (ציור מס' 18).

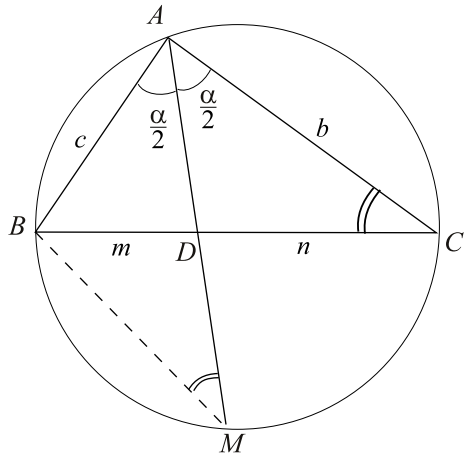
$\Delta ABM \sim \Delta ADC$ (ז.ז.)

לכן לפי יחס הדמיון,

$$\frac{AD}{c}=\frac{b}{AD+DM} \quad \Rightarrow \quad AD^2+AD\cdot DM=b\cdot c$$

ידוע, ש- $AD\cdot DM=m\cdot n$ (מכפלת קטעי מיתרים נחתכים), ולכן $AD^2=bc-mn$

מ.ש.ל.



ציור מס' 18

ב' – על-ידי טריגונומטריה

לפי משפט הקוסינוסים במשולשים ABD ו-ADC

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AD^2+c^2-m^2}{2c\cdot AD}=\frac{AD^2+b^2-n^2}{2b\cdot AD}$$

מכאן,

$$b\cdot AD^2+bc^2-bm^2=c\cdot AD^2+b^2c-cn^2$$

או, $AD^2(b-c)=bc(b-c)+bm^2-cn^2$

מחלקים שני האגפים ב-b-c (אם $c=b$, מדובר במשולש ש"ש, וההוכחה מתקבלת מיידית על-ידי שימוש במשפט פיתגורס).

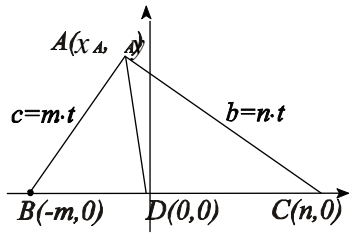
* מתקבל $AD^2=b\cdot c+\frac{bm^2-cn^2}{b-c}$

לפי התכונה של חוצה זווית פנימית במשולש,

$$\frac{m}{n}=\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad c=b\cdot\frac{m}{n}$$

נציב קשר זה ב-(*), ונקבל: $AD^2=b\cdot c-m\cdot n$

מ.ש.ל.



ציור מס' 19

ג' – על-ידי הנדסה אנליטית

בוחרים מערכת צירים באופן שציר x מתלכד עם צלע BC, ונקודת החיתוך של חוצה הזווית AD עם הצלע BC הוא בראשית הצירים (ציור מס' 19).

נסמן את שיעורי קדקודי המשולש:

$$C(n,0), \qquad B(-m.0), \qquad A(x_A, y_A)$$

על-פי תכונת חוצה הזווית הפנימית קיים מספר t ולכן

$$AB = m \cdot t, \qquad AC = n \cdot t$$

אורכי הצלעות:

$$AB = \sqrt{(x_A + m)^2 + {y_A}^2} = m \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_A^2 + 2mx_A + m^2 + y_A^2 = m^2 t^2$$

$$AC = \sqrt{(x_A - n)^2 + {y_A}^2} = n \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_A^2 - 2nx_A + n^2 + y_A^2 = n^2 t^2$$

נחסר את המשוואות ונקבל:

$$(m^2 - n^2)t^2 = 2x_A(m+n) + m^2 - n^2 \quad \Rightarrow \quad x_A = \frac{1}{2}(m-n)(t^2 - 1) \ \ (*)$$

לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות,

$$AD^2 = x_A^2 + Y_A^2 = n^2 t^2 + 2x_A n - n^2 .$$

על-ידי הצבת x_A כמופיע ב-(*) מקבלים:

$$AD^2 = n^2 t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(m-n)(t^2 - 1)n - n^2 = m \cdot n \cdot t^2 - m \cdot n = m \cdot n \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{m} - mn$$

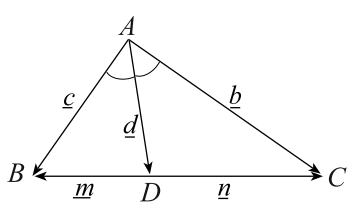
מכאן, $AD^2 = b \cdot c - m \cdot n$

מ.ש.ל.

ד' – על-ידי אלגברה וקטורית

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{c}, \quad \overrightarrow{AC} = \underline{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \underline{d}$

$\overrightarrow{DB} = \underline{m}, \quad \overrightarrow{DC} = \underline{n}$



ציור מס' 20

(ציור מס' 20).

הנוסחה לווקטור חוצה הזווית היא, $\overrightarrow{AD} = \lambda_1 \underline{c} + \lambda_2 \underline{b}$

כאשר, $\lambda_1 = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{b}|+|\underline{c}|}$, $\lambda_2 = \frac{|\underline{c}|}{|\underline{b}|+|c|}$

$\underline{n} = \underline{b} - \underline{d} = \lambda_1(\underline{b} - \underline{c})$ ובאופן דומה, $\underline{m} = \lambda_2(\underline{c} - \underline{b})$

צ"ל כי – $|\underline{d}|^2 = |\underline{b}|\cdot|\underline{b}| + |\underline{c}| - |\underline{n}|\cdot|\underline{m}|$

מצד אחד, $|\underline{d}|^2 = |\lambda_1\underline{c} + \lambda_2\underline{b}|^2 = \lambda_1^2|\underline{c}|^2 + 2\lambda_1\lambda_2\underline{b}\cdot\underline{c} + \lambda_2^2|\underline{b}|^2$

מצד שני, $|\underline{b}|\cdot|\underline{c}| - |\underline{n}|\cdot|\underline{m}| = |\underline{b}|\cdot|\underline{c}| - \lambda_1|\underline{b} - \underline{c}|\cdot\lambda_2|\underline{c} - \underline{b}| =$

$$= |\underline{b}|\cdot|\underline{c}| - \lambda_1\lambda_2\left(|\underline{b}|^2 - 2\underline{b}\cdot\underline{c} + |\underline{c}|^2\right) =$$

$$= |\underline{b}|\cdot|\underline{c}| - \lambda_1\lambda_2|\underline{b}|^2 + 2\lambda_1\lambda_2\underline{b}\cdot\underline{c} - \lambda_1\lambda_2|\underline{c}|^2$$

נותר להוכיח, ש- $\lambda_1^2|\underline{c}|^2 + \lambda_2^2|\underline{b}|^2 = |\underline{b}|\cdot|\underline{c}| - \lambda_1\lambda_2|\underline{b}|^2 - \lambda_1\lambda_2|\underline{c}|^2$

נעביר אגפים, ונוכיח, כי $\lambda_1^2|\underline{c}|^2 + \lambda_1\lambda_2|\underline{c}|^2 + \lambda_2^2|\underline{b}|^2 + \lambda_1\lambda_2|\underline{b}|^2 = |\underline{b}|\cdot|\underline{c}|$,

או $\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)|\underline{c}|^2 + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)|\underline{b}|^2 = |\underline{b}|\cdot|\underline{c}|$

משום ש- $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, הרי שעל-ידי הצבה – מקבלים $\lambda_1|\underline{c}|^2 + \lambda_2|\underline{b}|^2 \overset{?}{=} |\underline{b}|\cdot|\underline{c}|$

כשמציבים את ערכי λ_1 ו- λ_2 מתקבל השוויון.

מ.ש.ל.

רואים, שבמשימה מס' 4 ההוכחה באמצעות אלגברה וֶקטורית היא ארוכה ומורכבת יחסית ומחייבת מיומנות ושליטה בתחום. על-כן ידע ויכולת יישום במספר תחומי מתמטיקה – מאפשרים למצוא את דרך הפתרון הקצרה והפשוטה ביותר.

מראי מקומות

1. אביטל, ש' (1991). **מתמטיקה בהנאה.** תל-אביב, עם עובד.
2. ארבל, ב' (1990). **אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיקה.** תל-אביב, האוניברסיטה הפתוחה.
3. גלנדר, צ' (תשנ"ה). "מספר הוכחות לבעיה ידועה בגאומטריה", **אתגר, 34-35 – גליונות למתמטיקה,** הפקולטות למתמטיקה בטכניון– חיפה ובמכון ויצמן למדע – רחובות.
4. מוגילבסקי, ר', סטופל, מ' (תשס"ב). "העצמת חשיבותו של המקום הגאומטרי לפתרון משימות ובעיות בהנדסה". **שאנן, ח' – שנתון המכללה האקדמית הדתית לחינוך,** חיפה.
5. סטופל, מ', אוקסמן, ל' (תשנ"ז). "שילוב תחומים בפתרון בעיות במתמטיקה", **שנתון אמי"ת – רשת חינוך מוסדות בישראל.**
6. סטופל, מ', מוגילבסקי, ר' (תשנ"ט). "משימות הוכחה בהנדסה, המתבססות על בנייה חלופית". **שאנן, ה' – שנתון המכללה האקדמית הדתית לחינוך,** חיפה.
7. Stevenson, F.W. (1992). **Exploratory Programs in Mathematics.**