משה סטופל ורחל מוגילבסקי

העצמת חשיבותו של המקום הגיאומטרי לפתרון בעיות ומשימות בהנדסה

הקדמה

לעתים קרובות התמודדות עם משימות ובעיות בהנדסה מחייבת שימוש בתכונותיו של המקום הגיאומטרי. ניקח לדוגמה את המקרה הפשוט, שבו קבוצת נערים עמדה לחדש את הקווים במגרש כדור-סל והתקשתה להשלים את סימון קשת העיגול שבמרכז המגרש, מאחר שלא הצליחה למצוא את מיקום מרכזו. בניית אנכים אמצעיים לשני מיתרים כלשהם הייתה מביאה למציאת מיקום מרכז המעגל.

השימוש בתכונותיו של המקום הגיאומטרי – בא לידי ביטוי בבעיות הוכחה ובבעיות בנייה.

מתחום ההוראה והלימוד מתברר, שמהותו וחשיבותו של המקום הגיאומטרי אינן זוכות להדגשה ולהטמעה במהלך לימודי הנדסת המישור.

בספרי הלימוד אין פרק מיוחד, המוקדש למקום הגיאומטרי, והנושא מובלע בפרקים השוטפים, המותאמים לתכנית הלימודים[1-4]. פרקים יחודיים למקום הגיאומטרי ניתן למצוא בספרי הנדסה אנליטית[5-6], ששם מציאת אופיו ומשוואתו של המקום הגיאומטרי נעשית בהתאם לגישה של תחום לימוד זה. מבט ממוקד במקומות גיאומטריים ניתן למצוא במקורות[7-8].

המאמר הנוכחי פותח בהגדרת המקום הגיאומטרי ותכונותיו ובתזכורת למקומות גיאומטריים יסודיים, ולאחריהם מובא לקט מגוון של בעיות, בדרך כלל לא מוכרות, שלמרביתן ניתן פתרון מלא הן בגישה של הנדסת המישור והן בגישה של ההנדסה האנליטית. כמו-כן הובאו משימות לעבודה עצמית (ללא הבאת פתרון).

ניתן להציג את לקט הבעיות של המאמר – במסגרת לימוד של פרחי הוראה במתמטיקה, בקורסים של שילוב תחומי מתמטיקה, של רכישת ידע והעשרתו או כבסיס לעבודה סמינריונית.

תארנים: מקום גיאומטרי, בעיות בנייה

1. הגדרה

מקום גיאומטרי מוגדר כצורה הנדסית שלכל נקודותיה, ורק להן, תכונה משותפת, או בשפה של תורת הקבוצות: מקום גיאומטרי הוא אוסף של כל הנקודות, שהן, ורק הן, מקיימות תנאי מסוים.

מקום גיאומטרי הוא אחד מהמושגים החשובים ביותר בלימוד ההנדסה. משתמשים בו גם במסגרות הנדסה אנליטית, מכניקה ותחומי מדע נוספים.

בתחום ההנדסה האנליטית אפשר לתאר מקום גיאומטרי – כמשוואה, המקשרת בין שיעורי ה-x וה-y של הנקודות, השייכות למקום הגיאומטרי (וכך גם בהנדסה אנליטית במרחב).

בעצם, כל משוואה עם שני נעלמים מגדירה צורה גיאומטרית (גרף), שנקודותיה, ורק הן, מקיימות את המשוואה. כנ"ל – לגבי כל פונקציה.

אפשר להגדיר מקומות גיאומטריים במישור או במרחב, אך מאמר זה יתמקד במקומות גיאומטריים במישור בלבד.

להלן 3 סוגים של בעיות הקשורות במקומות גיאומטריים (מ"ג):

א. הוכחה, כי צורה מסוימת היא מקום גיאומטרי מוגדר (כלומר נתונה התשובה, ויש להוכיח שהיא מקום גיאומטרי).

לדוגמה: צריך להוכיח, כי המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים, היוצאים מנקודה אחת על המעגל, הוא גם מעגל.

ב. מציאת המקום הגיאומטרי לפי תנאים נתונים.

לדוגמה: קטע נתון זז במישור, באופן שקצותיו נעים על שוקיה של זווית ישרה. מה המקום הגיאומטרי, שיוצר אמצע הקטע?

ג. שימוש בתכונותיהם של מקומות גיאומטריים ידועים לפתרון בעיות חישוב, הוכחה ובנייה.

2. **משפטים הנובעים מהגדרת המקום הגיאומטרי** (הקשורים לבעיות מסוג א')

מהגדרתו של המקום הגיאומטרי – נובעים ארבעת המשפטים הבאים:

א. כל נקודה, השייכת למקום גיאומטרי, מקיימת את התנאי.

ב. כל נקודה, המקיימת את התנאי, שייכת למקום הגיאומטרי.

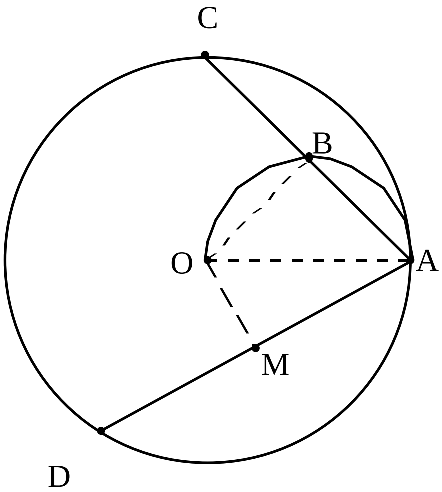
ג. כל נקודה, שאינה שייכת למקום הגיאומטרי – אינה מקיימת את התנאי.

ד. כל נקודה, שאינה מקיימת את התנאי – אינה שייכת למקום הגיאומטרי.

כדי להוכיח, שאכן המקום הגיאומטרי הוא המבוקש – צריך להוכיח את המשפטים א' ו-ב' או את המשפטים א' ו-ג'. עם הוכחת משפטים א' ו-ב' – אפשר להסתמך עליהם ולהוכיח בדרך עקיפה את המשפטים ג' ו-ד'.

נוכיח את הבעיה המופיעה בדוגמה א' (ציור מס' 1).

נתון מעגל, שמרכזו O ועליו נקודה A.



ציור מס׳ 1

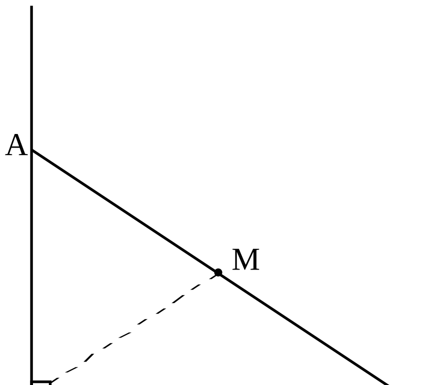
א. B תהא נקודה על המעגל שקוטרו OA. נוכיח, שהנקודה B היא נקודת האמצע של מיתר, היוצא מהנקודה A במעגל הנתון (שמרכזו O).
נעביר את AC, העובר דרך הנקודה B. OB AC (זווית ABO היא זווית היקפית הנשענת על קוטר). משולש AOC הוא שווה שוקיים. לכן גובה הבסיס (AC) חוצה אותו, כלומר הנקודה B היא אמצע המיתר AC. מ.ש.ל.

ב. AD יהיה מיתר כלשהו במעגל הנתון, ו-M נקודה שחוצה אותו. אם נחבר את הנקודה M עם מרכז המעגל O, נקבל זווית AMO – זווית ישרה – לפי המשפט: קטע, המחבר אמצע מיתר עם מרכז המעגל, מאונך למיתר. לכן זווית AMO היא זווית היקפית, הנשענת על הקוטר AO, זאת אומרת, נקודה M נמצאת על המעגל המבוקש. מ.ש.ל.

כלומר, המעגל, שקוטרו הוא AO, הוא המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים במעגל הנתון.

3. חיפוש מקומות גיאומטריים (הקשורים לבעיות מסוג ב׳)

כדי למצוא מ״ג של נקודות בעלות תכונה מסוימת – עוברים בדרך כלל את אותם השלבים שבפתרון בעיות בנייה.



ציור מס׳ 2

- ניתוח – בונים נקודה אחת מהמ״ג וקובעים קשרים עם נקודות אחרות של המ״ג. הניתוח מסתיים בהנחה שדורשת הוכחה.
- הוכחה – כמו בבעיות מסוג א׳.
- אנליזה – ניתוח מקרים שונים, התלויים בנתונים והמביאים למספר שונה של פתרונות (ללא פתרון, פתרון אחד או יותר).

את שלב הניתוח ניתן לבצע על-ידי הנדסת מישור קלאסית או על-ידי הנדסה אנליטית, כשהבחירה היא בדרך הנוחה או הקלה יותר.

נביא את פתרון הבעיה המופיעה בדוגמה ב׳ (ציור מס׳ 2).

AB יהיה אחד המצבים של קטע נתון, ו-M נקודת האמצע שלו.

נחבר את הנקודה M עם קודקוד הזווית הישרה (הנקודה C). MC הוא תיכון במשולש ישר זווית ABC, ולכן הוא שווה למחצית היתר, זאת אומרת MC הוא גודל קבוע בעת תנועת הקטע הנתון. כלומר הנקודה M נעה על המעגל, שמרכזו C ורדיוסו $\frac{AB}{2}$. לבעיה יש תמיד פתרון יחיד.

4. יישום תכונות המקומות הגיאומטריים בפיתרון בעיות (קשורים לבעיות מסוג ג׳)

בדרך כלל בבעיות, השייכות לסוג זה, מחפשים נקודה או צורה (קבוצת נקודות) לפי כמה תנאים נתונים. לפתרון המשימה מתעלמים מאחד התנאים, ואז מקבלים אינסוף פתרונות, המהווים מקום גיאומטרי של נקודות, המקיימות את התנאים האחרים. בשלב הבא מתעלמים מתנאי אחר, וגם הפעם מקבלים מקום גיאומטרי של נקודות המקיימות את התנאים, פרט לתנאי שממנו התעלמו. פתרון המשימה הוא החיתוך של המקומות הגיאומטריים הנ״ל.

נביא לדוגמה משימה מסוג ג׳.

צריך למצוא את מרכז המעגל, החוסם את המשולש ABC. ברור, כי הבעיה היא למצוא נקודה, הנמצאת במרחקים שווים משלושת קודקודי המשולש. בשלב הראשון מתעלמים מתנאי המרחק השווה גם לקודקוד C. המקום הגיאומטרי של נקודות, הנמצאות במרחקים שווים מהקודקודים A ו-B, הוא אנך אמצעי לקטע AB, כלומר מרכז המעגל המבוקש נמצא על האנך האמצעי. בשלב השני מתעלמים מתנאי המרחק השווה לקודקודA. המקום הגיאומטרי של הנקודות, הנמצאות במרחקים שווים מ-B ומ-C, הוא האנך האמצעי לקטע BC. מרכז המעגל הוא בנקודת החיתוך של שני האנכים האמצעיים. מ.ש.ל.

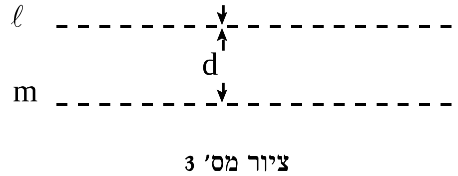
כדי לפתור בעיות מסוג זה – חשוב להכיר סוגים שונים של מקומות גיאומטריים.

לעתים קרובות טועים תלמידים בין מרכז המעגל החוסם לבין מרכז המעגל החסום של משולש, והדבר מהווה עדות לכך שמושג המקום הגיאומטרי לא הוטמע די צורכו.

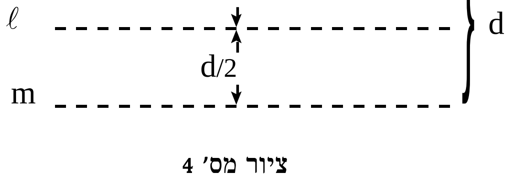
5. מקומות גיאומטריים במישור

נציג רשימה של מקומות גיאומטריים בסיסיים:

א. המקום הגיאומטרי של נקודות, הנמצאות במרחק קבוע d מישר נתון ℓ, הוא זוג ישרים k ו-m



ציור מס׳ 3

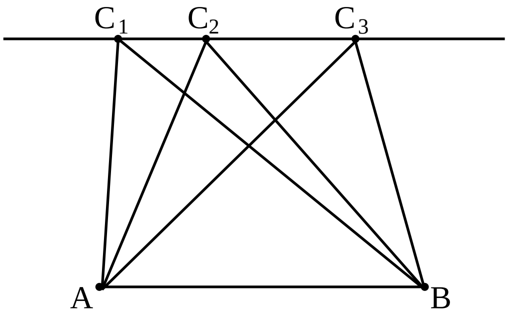


ציור מס׳ 4

המקבילים ל-ℓ ובמרחק d ממנו (ציור מס' 3).

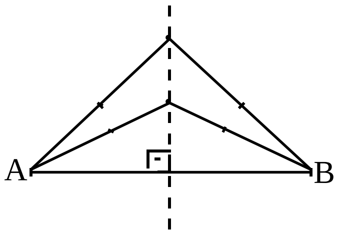
ב. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, הנמצאות במרחק שווה משני ישרים מקבילים k ו-m, הוא הישר ℓ, המקביל לשניהם בחצי המרחק שביניהם (ציור מס' 4).

ג. קו מקביל לקטע נתון, המהווה בסיס AB של משולש, הוא המקום הגיאומטרי של הקודקוד השלישי של כל המשולשים בעלי אותו שטח (ציור מס' 5).



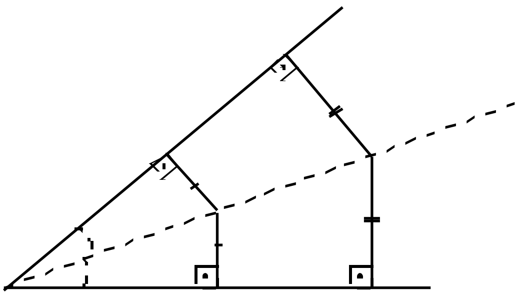
ציור מס' 5

ד. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, הנמצאות במרחקים שווים מקצות קטע AB, הוא האנך האמצעי לקטע (ציור מס' 6).

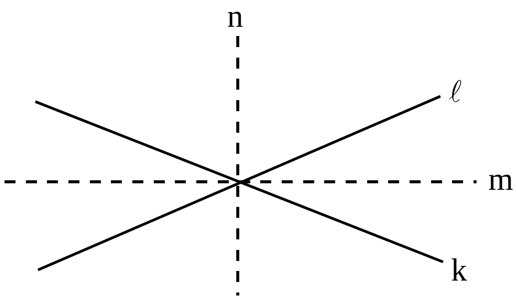


ציור מס' 6

ה. המקום הגיאומטרי של נקודות, הנמצאות במרחק שווה משוקי זווית, הוא חוצה הזווית (ציור מס' 7).

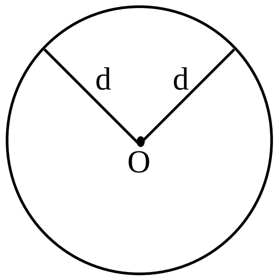

ציור מס' 7

ו. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, הנמצאות במרחק שווה משני ישרים נחתכים: k ו-ℓ, הם שני ישרים m ו-n, החוצים את הזווית בין k ו-ℓ (ציור מס' 8).
הערה: הישרים m ו-n ניצבים זה לזה.



ציור מס' 8

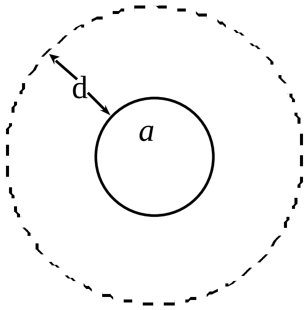
ז. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, הנמצאות במרחק קבוע d מנקודה O, הוא מעגל, שמרכזו בנקודה O ורדיוסו (מחוגו) d (ציור מס׳ 9).



ציור מס׳ 9

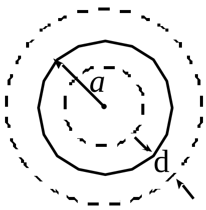
ח. המקום הגיאומטרי של נקודות, הנמצאות במרחק d ממעגל נתון בעל רדיוס a הוא שני מעגלים, אם $d < a$ (ציור מס׳ 10 א׳), ומעגל אחד, כאשר $d > a$ (ציור מס׳ 10 ב׳). מרכזי המעגלים מתלכדים עם מרכז המעגל הנתון.

$d > a$



ציור מס׳ 10 ב׳

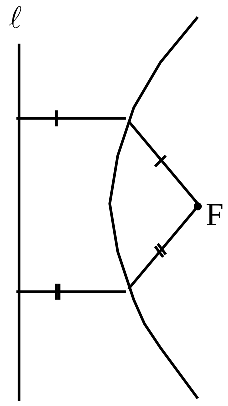
$d < a$



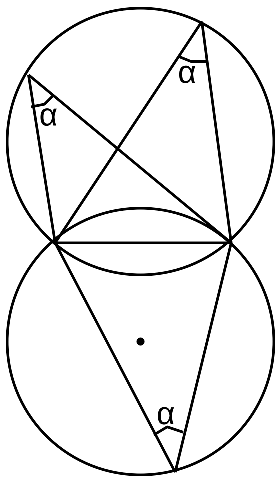
ציור מס׳ 10 א׳

ט. המקום הגיאומטרי של נקודות, שמהן רואים קטע נתון בזווית ראייה נתונה, הן שתי קשתות מעגל שוות, הנקראות קשתות ראייה של הזווית הנתונה. הקטע הנתון הוא מיתר משותף שלהן, וזווית הראייה היא זווית היקפית, הנשענת על המיתר הנ״ל (ציור מס׳ 11).

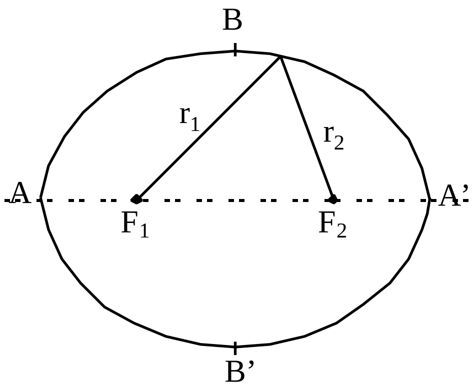
י. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה F (הנקראת מוקד) ומישר קבוע ℓ (הנקרא מדריך), הוא פרבולה (ציור מס׳ 12).



ציור מס׳ 12



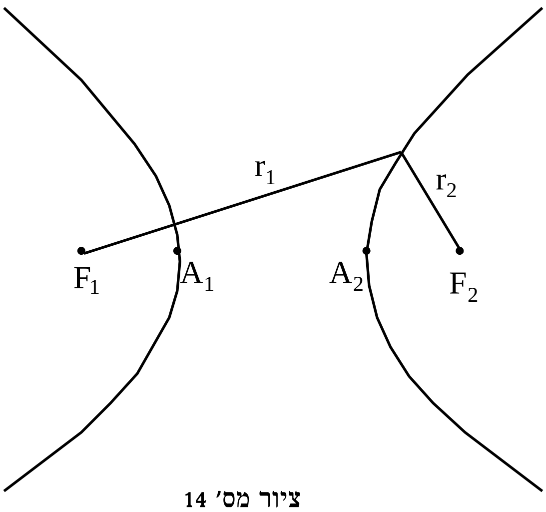
ציור מס׳ 11



ציור מס' 13

יא. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות F_1 ו-F_2 (הנקראות מוקדים), שווה לקטע קבוע שאורכו $2a$ הוא אליפסה (ציור מס' 13).

$$r_1 + r_2 = 2a$$
$$AA' = 2a$$
$$BF_1 = BF_2 = B'F_1 = B'F_2 = a$$



ציור מס' 14

יב. המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות F_1 ו-F_2 שווה לקטע, שאורכו $2a$, הוא היפרבולה (ציור מס' 14).

$$|r_1 - r_2| = 2a$$
$$A_1A_2 = 2a$$

6. לקט בעיות הקשורות במקום גיאומטרי

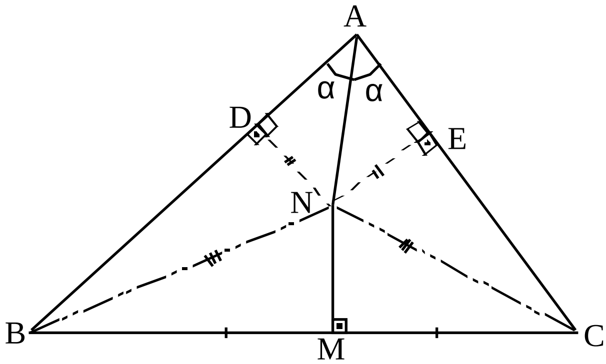
כדי להטמיע את חשיבות המקום הגיאומטרי – יוצגו משימות שונות בנושא. נבחרו בעיות ומשימות, שלרוב אינן מוכרות (חלקן מקוריות) – תוך מתן עדיפות למקומות גיאומטריים, שניתן למצוא אותם בשתי דרכים: הנדסית ואלגברית. השילוב של תחומי מתמטיקה שונים מיועד להדגיש ללומד, שענפי המתמטיקה משולבים זה בזה, ושלעיתים דרך אחת עדיפה על השנייה מבחינת הפשטות והקלות, וכך נבליט את יופייה של המתמטיקה.

לכל בעיה הובאו פתרונות מלאים בשתי הדרכים, ולרוב הבעיות ניתנו משימות המשך, בדרך כלל בעיות יישום ובעיות כאתגר עצמי.

לקט הבעיות נפתח במשימה פרדוקסית, המסתמכת על יישום תכונותיהם של שני מקומות גיאומטריים בסיסיים: אנך אמצעי וחוצה זווית.

6.1 משפט: "כל משולש הוא שווה שוקיים"

הוכח, שמשולש ABC הוא ש"ש (ציור מס' 15).



ציור מס' 15

נבנה את חוצה זווית BAC ואת האנך האמצעי לצלע BC, הנחתכים בנקודה N. נוריד את האנכים לצלעות; ND ו-NE.

מחפיפת המשולשים: ADN ו-AEN (ז.צ.ז.) – נובע ש-: AD=AE ו- DN=EN (תכונת חוצה זווית כמקום גיאומטרי).

NB=NC (תכונת האנך האמצעי לקטע). לכן משולשים DNB ו-ENC חופפים (לפי שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה). מחפיפת משולשים אלו נובע: DB=EC.

משני השיוויונים שהוכחו: AD=AE ו-BD=EC נובע, AB=AC, כלומר כל משולש הוא שווה שוקיים!!!

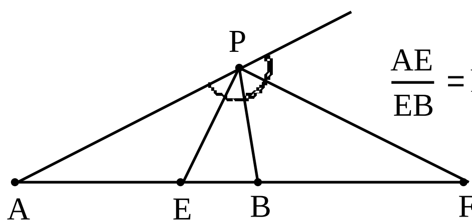
הסבר הפרדוקס:

כל שלבי ההוכחה נכונים, פרט לעובדה הראשונית, שבמשולש כלשהו – האנך האמצעי לבסיס וחוצה הזווית של הקודקוד שמולו נפגשים מחוץ למשולש, ועל-כן ההמשך איננו נכון. רק במשולש ש"ש מתלכדים זה עם זה האנך האמצעי לבסיס וחוצה זווית הראש.

מציאת מקומות גיאומטריים

6.2 מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שייחס מרחקיהן משתי נקודות נתונות **A** ו-**B** שווה למספר נתון **k**, כאשר $\mathbf{k > 0}$ ו-$\mathbf{k \neq 1}$?

פתרון בדרך א' – הנדסת המישור (ציור מס' 16)



ציור מס' 16

נתון קטע AB. נקבע עליו נקודה E באופן ש- $\frac{AE}{EB} = k$

(ביצוע מיקום הנקודה בעזרת משפט תלס).

באופן דומה נקבע נקודה F על המשך הקטע AB באופן ש- $\frac{AF}{BF} = k$.

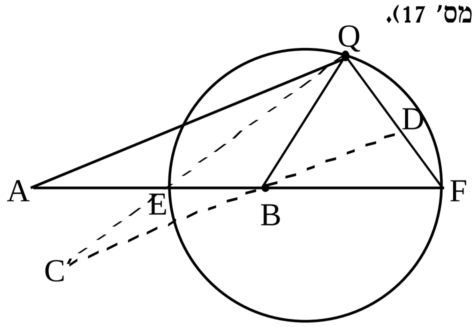
נניח, כי הנקודה P שייכת למקום הגיאומטרי, זאת אומרת $\frac{PA}{PB} = k$.

נחבר את הנקודה P עם הנקודות: A, B, E ו-F.

לפי הבנייה וההנחה $k = \frac{AF}{BF} = \frac{PA}{PB}$, ונובע מכך ש-PE חוצה את הזווית APB (משפט הפוך למשפט חוצה הזווית). באופן דומה מהקשר $k = \frac{AF}{EF} = \frac{PA}{PB}$ נובע, כי PF חוצה את הזווית החיצונית לזווית המשולש APB. כידוע, הזווית בין חוצי זוויות צמודות היא בת 90^0 ($\measuredangle EPF=90^0$), זאת אומרת, שהנקודה P נמצאת על מעגל שקוטרו EF. הנקודות E ו-F קבועות, ולכן כל הנקודות, המקיימות את התנאי, נמצאות על המעגל הנ"ל.

הוכחת המשפט ההפוך

Q תהא נקודה כלשהי על מעגל שקוטרו EF (ציור מס' 17).



ציור מס' 17

הנקודות E ו-F נקבעו, כפי שתואר בתחילת ההוכחה.

צ"ל, שהנקודה Q מקיימת את היחס $\frac{QA}{QB} = k$.

נעביר דרך הנקודה B ישר, המקביל ל-AQ. נסמן ב-C וב-D את נקודות החיתוך של ישר זה עם המשך הישר QE ועם המיתר QF – בהתאמה. מדימיון המשולשים: AEQ ו-BEC נובע $k = \frac{AF}{BF} = \frac{AQ}{BD}$.

על סמך דימיון המשולשים: AQF ו-BDF נובע: $k = \frac{AE}{EB} = \frac{AQ}{BC}$, ומשניהם נובע $k = \frac{AQ}{BD} = \frac{AQ}{BC}$, כלומר CB=BD, זאת אומרת QB – תיכון במשולש CQD. משולש CQD הוא משולש ישר זווית (EQF – זווית היקפית, הנשענת על קוטר). מאחר שהתיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר, הרי QB=BC, אבל הוכח, כי $k = \frac{AQ}{BC}$. לכן $k = \frac{AQ}{BQ}$. מ.ש.ל.

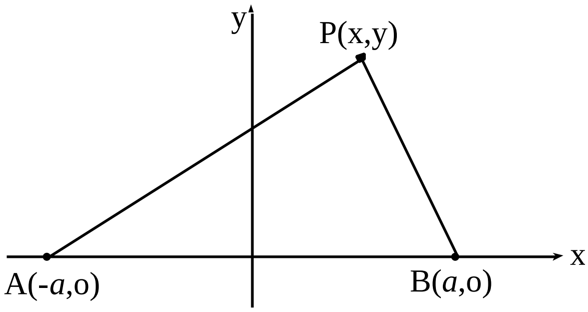
אנליזה

כאשר $k > 0$ ו-$k \neq 1$, הפתרון הוא יחיד (מעגל אפולוניוס). אם $k = 0$, אז המקום הגיאומטרי הוא נקודה A בלבד. אם $k = 1$, אז המקום הוא האנך האמצעי לקטע AB.

פתרון דרך ב׳ –הנדסה אנליטית

נסמן את המרחק AB ב-2a. נבחר מערכת צירים באופן שציר ה-x עובר דרך הנקודות A ו-B, וציר y חוצה את הקטע AB (ציור מס׳ 18). בהתאם לבחירת מערכת הצירים יהיו שיעורי הנקודות כדלקמן:

$A(-a,o)$ ו-$B(a,o)$.



ציור מס׳ 18

P(x,y) תהא נקודה כלשהי על המקום הגיאומטרי. לפי התנאי $\frac{PA}{PB} = k$ ובעזרת נוסחת המרחק בין שתי נקודות במישור – נקבל את הקשר הבא:

$$\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2} = k\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$$

נעלה בריבוע,
$$x^2+2ax+a^2+y^2 = k^2x^2-2k^2ax+k^2a^2+k^2y^2$$

נסדר איברים,
$$(k^2-1)x^2-2a(k^2+1)x+(k^2-1)y^2 = -(k^2-1)a^2$$

נחלק ב-$k^2-1\neq0$,
$$x^2-2\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+y^2 = -a^2$$

נבצע השלמה לריבוע,
$$\left(x-\frac{a(k^2+1)}{(k^2-1)}\right)^2+y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

מכאן נובע, כי הנקודה P נמצאת על מעגל, שמרכזו בנקודה $\left(\frac{a(k^2+1)}{(k^2-1)},0\right)$ (על ציר ה-x)

ורדיוסו $\left|\frac{2ak}{k^2-1}\right|$.

קל להראות, שכל נקודה Q עבורה $\frac{QA}{QB}\neq k$ אינה נמצאת על המעגל. דבר זה מוכיח, כי המעגל הנ״ל הוא המקום הגיאומטרי המבוקש.

בעיית יישום

מוצר מסוים מיוצר בשני מפעלים: A ו-B. עלות הייצור בשני המפעלים שווה, אך מחיר ההובלה

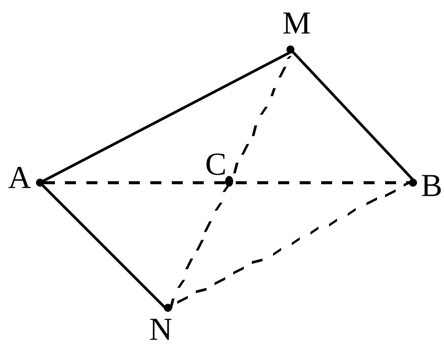
לק"מ ממפעל A לבית הלקוח נמוך פי k ממחיר ההובלה לק"מ ממפעל B לבית הלקוח. אילו קונים, מבחינת אזור מגורים, יעדיפו לקנות במפעל A, ואילו יעדיפו לרכוש אותו במפעל B?

פתרון

אם מרחק מקום מגוריו של לקוח ממפעל A גדול פי k ממרחקו ממפעל B, אז עלות הרכישה שווה. זאת אומרת, כי ללקוחות, הנמצאים על מעגל אפולוניוס המתאים, אין הבדל כספי בעלות הרכישה. לקוחות, הנמצאים בתוך העיגול, יעדיפו רכישה במפעל B (יותר זול). לעומתם, לקוחות, המתגוררים מחוץ למעגל, יעדיפו קנייה במפעל A (יותר זול).

6.3 מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות, שסכום ריבועי מרחקיהן משתי נקודות נתונות שווה לריבוע של קטע נתון שאורכו a.

פתרון בדרך א' – הנדסת מישור



ציור מס' 19

נסמן ב-A וב-B את שתי הנקודות הנתונות. M תהא אחת מנקודות המקום הגיאומטרי (ציור מס' 19). נסמן $AB=\ell$. המקום הגיאומטרי מקיים את התנאי:

$$MA^2 + MB^2 = a^2$$

נסמן ב-C את אמצע הקטע AB, ונאריך את קטע MC כאורכו – עד לנקודה N. התקבלה מקבילית AMBN (מרובע, שאלכסוניו חוצים זה את זה). כידוע, קיים קשר בין צלעות המקבילית לאלכסוניה; $2(MA^2+MB^2)=AB^2+MN^2$. בהתאם לסימונים – מקבל הקשר את הצורה הבאה: $2a^2=\ell^2+MN^2$. נחלץ את MN.

$$MN = \sqrt{2a^2 - \ell^2} \qquad CM = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - \ell^2} = \text{קבוע}$$

מאחר ש-CM הוא גודל קבוע – בהתאם לתנאים הנתונים, הרי שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל, שמרכזו C (נקודת האמצע של קטע AB) ורדיוסו CM.

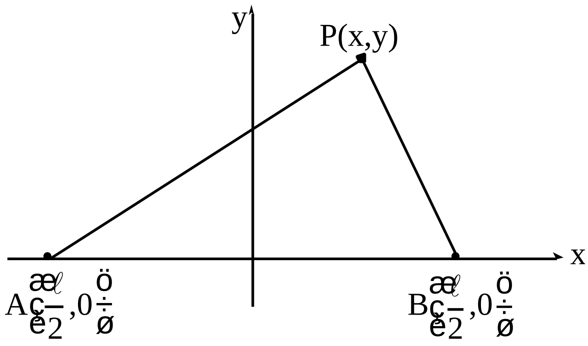
קל להוכיח ,שאם $MA^2+MB^2\neq a^2$, אז הנקודה M אינה נמצאת על המעגל. לבניית הקטע CM ניתן להיעזר במאמר[8].

אנליזה

א. אם $2a^2 > \ell^2$ יש לבעיה פתרון שהוא מעגל.

ב. אם $2a^2 = \ell^2$, אז המקום הגיאומטרי מורכב מנקודה אחת בלבד, והיא C – אמצע קטע AB.

ג. אם $2a^2 < \ell^2$ אין פתרון לבעיה.



ציור מס' 20

פתרון בדרך ב' – הנדסה אנליטית

נבחר במערכת צירים באופן שציר ה-x עובר דרך הנקודות הנתונות A ו-B, וציר ה-y חוצה את הקטע (ציור מס' 20).

P(x,y) תהא נקודה, השייכת למקום הגיאומטרי: $PA^2+PB^2=a^2$.

בעזרת נוסחת המרחק בין שתי נקודות במישור – נקבל,

$$\left(x+\frac{\ell}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2+y^2=2a^2 \qquad x^2+y^2=\frac{2a^2-\ell^2}{4}$$

לפי הקשר האחרון בין x ו-y רואים, שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל, שמרכזו בראשית הצירים (אמצע הקטע AB), ורדיוסו שווה ל- $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2-\ell^2}$ מ.ש.ל.

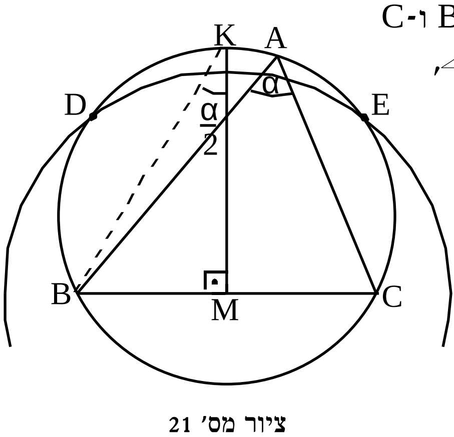
בעיית יישום

בנה משולש לפי זווית הראש החדה α, רדיוס המעגל החוסם R וסכום ריבועי השוקיים d^2.

ניתוח:

נניח, שהמשולש המבוקש הוא ABC. הנקודות A, B ו-C שייכות למעגל, שרדיוסו R, $\measuredangle BAC=\alpha$, $AB^2+AC^2=d^2$ (ציור מס' 21).

נתעלם מהתנאי של סכום ריבועי השוקיים, ונבנה מעגל שרדיוסו R. נבחר עליו נקודה כלשהי A. בקודקוד A נבנה את הזווית α. שוקי הזווית קובעים את הבסיס BC של המשולש. קיימים אינסוף משולשים עם בסיס BC וזווית הראש α (כל הזווית ההיקפיות, הנשענות על אותה קשת – שוות).



ציור מס' 21

בשלב השני נתעלם מהתנאי הראשון, ונבנה את המקום

הגיאומטרי של הנקודות, שסכום ריבועי מרחקיהן מ- B ל-C הוא d^2. כידוע ממשימה 6.3 זהו מעגל, שמרכזו M (אמצע BC) ורדיוסו שווה ל- $\frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - BC^2}$.

הנקודות: D ו-E – נקודות החיתוך של שני המעגלים – הן הנקודות המבוקשות לקודקודA, והן מקיימות את שני התנאים.

אנליזה

לפי משפט הסינוסים $BC=2R\sin\alpha$, והתנאי לקיום המעגל השני הוא $2d^2 > 4R^2\sin^2\alpha$ או $d > R\sqrt{2}\sin\alpha$.

כדי שהמעגלים ייחתכו, צריך להתקיים התנאי $MK \geq r$, כאשר MK האנך האמצעי ל-BC עד לחיתוך עם המעגל, שרדיוסו R ו-r רדיוס המעגל השני.

$MK = BM\,ctg\frac{\alpha}{2}$ או $MK=R\sin\alpha\, ctg\frac{\alpha}{2}$. נציב זאת בתנאי

$$R\sin\alpha\, ctg\frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - 4R^2\sin^2\alpha}$$

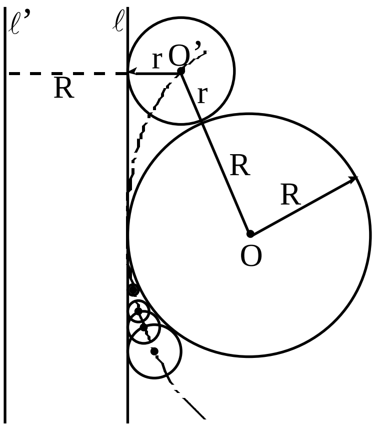
נחלץ את d^2 ונוציא שורש ונקבל $d \leq 2R\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ מכאן, שקיים פתרון (פתרונות) לבעיה, רק אם:

$$R\sqrt{2}\sin\alpha < d \leq 2R\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

6.4 יש למצוא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים, המשיקים למעגל נתון, שרדיוסו R ולמשיק שלו ℓ. (הערה: מקום גיאומטרי שאינו מעגל).

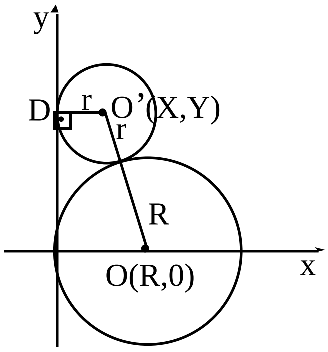
פתרון בדרך א' – הנדסת המישור

נסמן ב-(R,O) את רדיוסו ומרכזו של המעגל הנתון, וב-(r,O') את רדיוסו ומרכזו של המעגל המשיק (ציור מס' 22). במרחק R מהמשיק הנתון – נעביר את הישר המקביל ℓ'. המרחק בין מרכזי המעגלים OO' הוא R+r, והוא שווה למרחק שבין המרכז O' לבין הישר ℓ'. לפיכך הנקודה O' מקיימת את הגדרת הפרבולה. המקום המבוקש הוא פרבולה, שמוקדה מרכז המעגל הנתון (O) ומדריכה הוא הישר ℓ'.



ציור מס' 22

פתרון בדרך ב׳ – הנדסה אנליטית



ציור מס׳ 23

משוואת המעגל הנתון תהא: $(x-R)^2+y^2=R^2$, דהיינו מרכז המעגל על ציר ה-x בנקודה (R,0), והוא עובר דרך ראשית הצירים. ציר ה-y יהא הישר המשיק. נסמן ב-$O'(X,Y)$ את מרכז המעגל, המשיק למעגל הנתון (ציור מס׳ 23).

$O'D=OO'-R=r=X$ (D – נקודת ההשקה לציר ה-y)

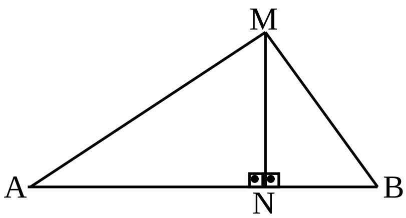
$$\sqrt{(X-R)^2+(Y-0)^2}-R=X$$

נעביר את R לאגף הימני, נעלה בריבוע ונקבל $Y^2=4RX$.

קיבלנו, שהמקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים הוא פרבולה, שהפרמטר שלה $P=2R$, כלומר מוקדה נמצא בנקודה (R,0) – במרכז המעגל הנתון.

6.5 מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות, שהפרש ריבועי מרחקיהן משתי הנקודות הנתונות שווה לריבוע של קטע נתון.

פתרון בדרך א׳ – הנדסת המישור



ציור מס׳ 24

A ו-B תהיינה הנקודות הנתונות, ו-a אורך הקטע הנתון.

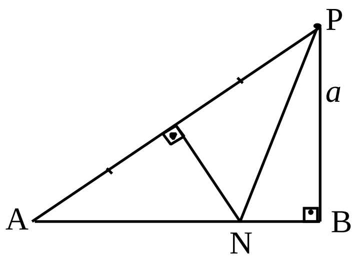
M תהא אחת מנקודות המקום הגיאומטרי (ציור מס׳ 24).

מהנקודה M נוריד אנך MN לישר AB. במשולש AMN לפי משפט פיתגורס, $AM^2=AN^2+MN^2$

במשולש BMN לפי משפט פיתגורס, $BM^2=BN^2+MN^2$

נחסר את המשוואות ונקבל, $AM^2-BM^2=AN^2-BN^2$,

זאת אומרת $AN^2-BN^2=a^2$. שיוויון זה מראה, שגם הנקודה N שייכת למקום הגיאומטרי. הנקודה N היא היטל של הנקודה M על הישר AB.



ציור מס׳ 25

היות ו-M היא נקודה כלשהי על המקום הגיאומטרי, ההנחה היא, שהמקום הגיאומטרי הוא אנך לישר AB, העובר דרך הנקודה N, שמקיימת $AN^2-BN^2=a^2$. נתאר את הבנייה למציאת הנקודה N.

בנקודה B נבנה אנך ל-AB, שאורכו a ($BP=a$). נבנה אנך אמצעי לקטע AP, החותך את הקטע AB בנקודה N (ציור מס׳ 25).

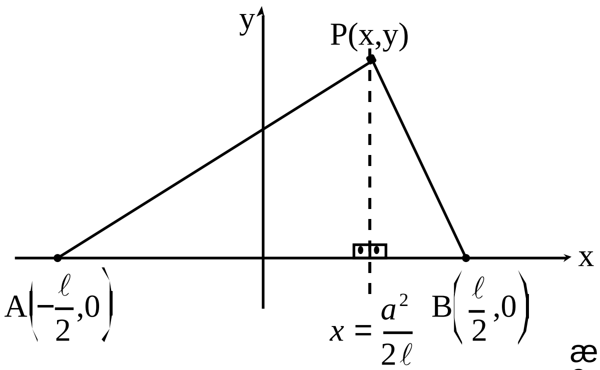
נוכיח, כי התקבלה הנקודה המבוקשת: AN=NP (תכונת אנך אמצעי) על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש PBN מקבלים $NP^2-BN^2=a^2$. מ.ש.ל.

פתרון בדרך ב׳ – הנדסה אנליטית

נסמן ב-ℓ את המרחק AB, ונבחר מערכת צירים באופן ש-$A\left(-\frac{\ell}{2},0\right)$ ו-$B\left(\frac{\ell}{2},0\right)$. P(x,y) תהא נקודה על המקום הגיאומטרי (ציור מס׳ 26).

לפי ההגדרה $PA^2-PB^2=a^2$

$$\left(x+\frac{\ell}{2}\right)^2+y^2-\left(x-\frac{\ell}{2}\right)^2-y^2=a^2$$



ציור מס׳ 26

נקבל $x=\frac{a^2}{2\ell}$, כלומר המקום הגיאומטרי הוא ישר המאונך ל-AB. מ.ש.ל.

בעיית יישום (לעבודה עצמית)

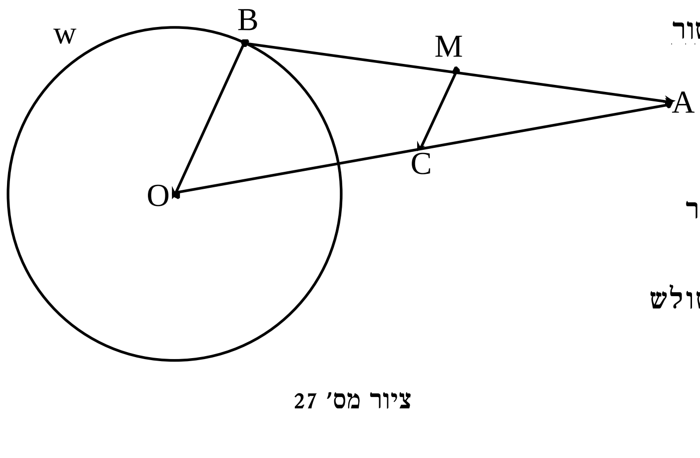
יש לבנות משולש לפי בסיס נתון, זווית הראש והפרש הריבועים של השוקיים.

6.6. נתון מעגל w ונקודה A מחוץ לו. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים, המחברים את הנקודה A עם נקודות המעגל w (ציור מס׳ 27).

פתרון בדרך א׳ – הנדסת המישור

M תהא אחת מנקודות המקום הגיאומטרי, זאת אומרת AM=MB. נחבר את הנקודות A ו-B עם מרכז המעגל. נעביר MC מקביל ל-OB.

MC – קטע אמצעים במשולש ABO.



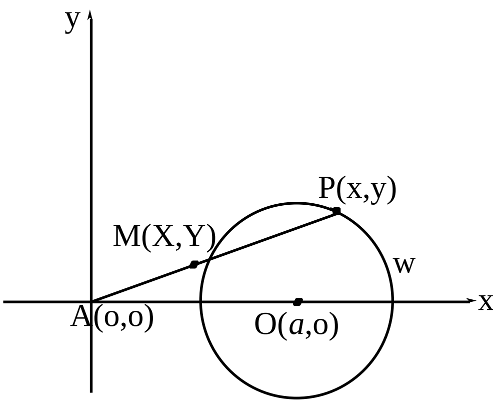
ציור מס׳ 27

לכן הנקודה C היא אמצע של קטע קבוע AO וכן $MC=\frac{1}{2}OB$. נקודה C אינה תלויה בנקודה M שעל המקום הגיאומטרי. זאת אומרת, כי כל הנקודות, השייכות למקום הגיאומטרי, נמצאות במרחק שווה מ-C, והמרחק הוא מחצית הרדיוס של המעגל.

המסקנה: המקום הגיאומטרי המבוקש הוא מעגל בעל מרכז C (אמצע הקטע AO) ורדיוס, השווה למחצית רדיוס המעגל הנתון.

פתרון בדרך ב' – הנדסה אנליטית

נבחר מערכת צירים, שבה מרכז המעגל על ציר ה-x והנקודה A בראשית הצירים. r יהא רדיוסו של המעגל שמרכזו בנקודה $O(a, o)$ (ציור מס' 28).



ציור מס' 28

משוואת המעגל במערכת הצירים שנבחרה היא: $(x-a)^2+y^2=r^2$. $P(x,y)$ תהא נקודה על המעגל ותהא $M(X,Y)$ נקודת האמצעי של הקטע AP, דהיינו נקודה על המקום הגיאומטרי.

$$X=\frac{x}{2} \quad x=2X \;,\; Y=\frac{y}{2} \quad y=2Y$$

נציב את x ו-y במשוואת המעגל:

$$(2X-a)^2+(2Y)^2=r^2 \qquad \left(X-\frac{a}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

קיבלנו משוואת מעגל בעל מרכז $\left(\frac{a}{2},o\right)$ ורדיוס $\frac{r}{2}$. מ.ש.ל.

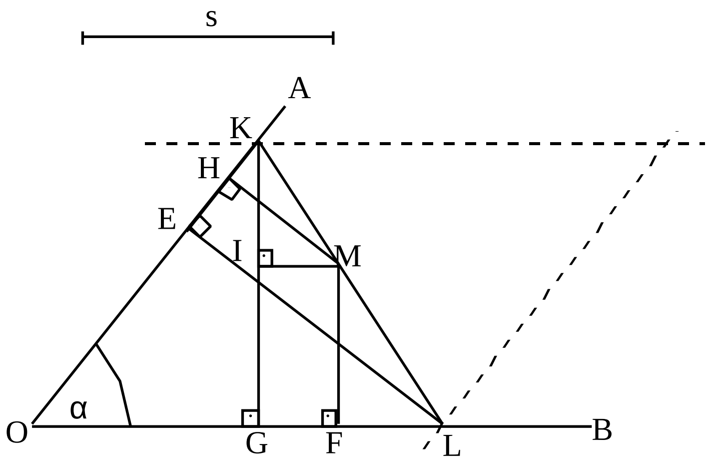
בעיית יישום לעבודה עצמית

נתונים מעגל w, נקודה A מחוץ לו וישר MN.

מצא על ישר MN נקודה, החוצה את הקטע, המחבר את הנקודה A עם מעגל w. צריך לחקור את הפתרון.

6.7. מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות, שסכום מרחקיהן משוקי זווית נתונה שווה לקטע בעל אורך נתון s.

מקום גיאומטרי של נקודות, הנמצאות במרחק s מהשוק OB הוא ישר, המקביל לקרן OB במרחק s ממנה. K- נקודת המפגש שלו עם הקרן OA שייכת למקום הגיאומטרי המבוקש (ציור 29).



ציור מס' 29

באופן דומה הנקודה L– נקודת החיתוך של הישר המקביל לקרן OA, ונמצא במרחק s ממנה, עם הקרן DB, שייכת אף היא למקום הגיאומטרי המבוקש.

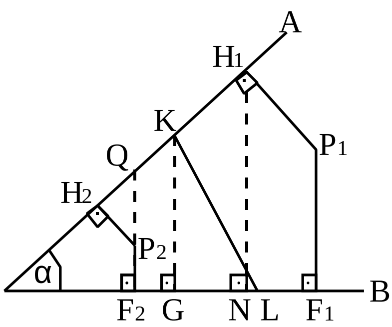
נוכיח, כי הקטע KL הוא המקום הגיאומטרי המבוקש.

נבחר נקודה כלשהי M על הקטע KL, ונוכיח, שהיא שייכת למקום הגיאומטרי. נוריד אנכים:

MF OB, MH OA, KG OB, LE OA ו- MI KG. לפי הבנייה הקודמת, KG=LE=s.

המשולשים: KEL ו- KGL חופפים לפי ניצב ויתר, ולכן $\measuredangle EKL = \measuredangle GLK$. מצד שני, $\measuredangle KMI = \measuredangle GLK$ הן זוויות מתאימות (MI||OB ו- KL חותך).

ΔMIK ΔMKH (ז.צ.ז.). מחפיפת המשולשים – נובע: MH=IK. לכן MH+MF=KI+IG=s. בכך הוכחנו, שכל נקודה על הקטע KL שייכת למקום הגיאומטרי המבוקש.



ציור מס' 30

נוכיח, שכל נקודה בתוך הזווית, שאינה נמצאת על הקטע KL, אינה שייכת למקום הגיאומטרי (ציור מס' 30).

ניקח נקודות P_1 ו-P_2, שהן בתוך הזווית, אך אינן על הקטע KL. נוריד מהן אנכים לשוקי הזווית.

מהשרטוטים רואים, כי

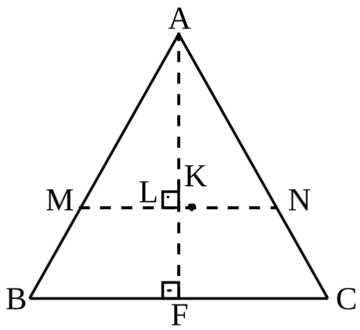
$$P_1F_1+P_1H_1 > H_1N > GK = s$$

$$P_2F_2+P_2H_2 < QF_2 < GK = s$$

ואז $P_1F_1+P_1H_1 > s$ ו- $P_2F_2+P_2H_2 < s$. זאת אומרת, שהנקודות P_1 ו-P_2 אינן שייכות למקום הגיאומטרי. בכך הוכחנו, כי המקום הגיאומטרי, המקיים את התנאי, הוא הקטע KL.

בעיות יישום

1. הוכח, כי במשולש ש"ש סכום מרחקיה של כל נקודה על הבסיס משוקי המשולש הוא גודל קבוע, השווה לגובה שוק המשולש (בעיה לעבודה עצמית).
2. הוכח, כי במשולש שווה צלעות סכום מרחקיה של נקודה פנימית במשולש מצלעות המשולש הוא גודל קבוע, השווה לגובה המשולש.

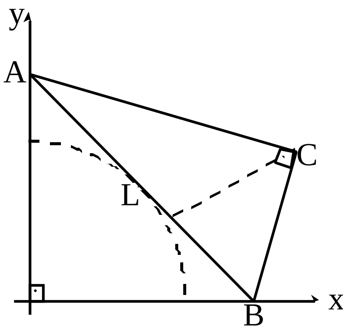


ציור מס' 31

הוכחה

במשולש ש"צ ABC (ציור מס' 31) נבחר נקודה כלשהי K. נעביר דרכה קטע MN, המקביל לבסיס. לפי בעיית היישום הקודמת, הקטע MN הוא מקום גיאומטרי של נקודות, שסכום מרחקיהן מצלעות משולש AMN (גם ש"צ) הוא גודל קבוע, השווה לגובה AL של משולש AMN (הגובה לשוק שווה לגובה לבסיס). מרחק הנקודה K מהצלע BC שווה לקטע LF, שיחד עם AL הוא הגובה של המשולש ABC. מ.ש.ל.

הערה: ניתן להוכיח בעיה זו בדרכים נוספות: הנדסת מישור, טריגונומטריה והנדסה אנליטית.



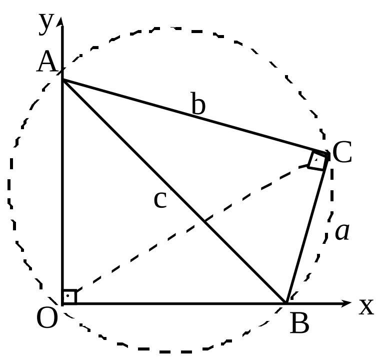
ציור מס' 32

משימות נוספות של מציאת מקום גיאומטרי

7.1 נתון משולש ישר זווית **ABC**(**$\angle C=90^0$**). מצא את המקום הגיאומטרי של קודקוד הזווית הישרה **C**, כאשר הקודקודים **A** ו-**B** נעים על שני ישרים מאונכים (ציור מס' 32).

הערה: בשלב ראשון כדאי לתת לתלמידים כמשימה למצוא את המקום הגיאומטרי על-ידי הזזת מודל המשולש על שוקיה של זווית ישרה. באותה הזדמנות ניתן למצוא את המקום הגיאומטרי של נקודת אמצע היתר L.

מהניסוי מקבלים, שהקודקוד C נע על קטע של קו ישר (שהמשכו ראשית הצירים), ואילו נקודת אמצע היתר נעה על קשת מעגל, שרדיוסו – מחצית היתר, ומרכזו – קודקוד הזווית הישרה של הישרים. יש לתת את הדעת, שהמרחק בין הנקודה L (אמצע היתר) לנקודה C (קודקוד הזווית הישרה) הוא מחצית היתר.



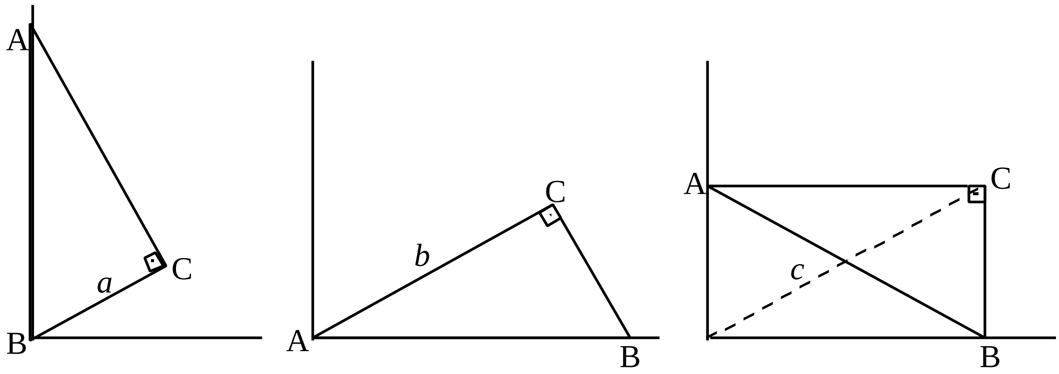
ציור מס' 33

פתרון בדרך א' – הנדסת המישור

הנקודה C תהא – אחד המצבים של קודקוד הזווית הישרה (ציור מס' 33). מרובע AOBC הוא בר-חסימה ($\angle O = \angle C = 90^0$) · לכן $\angle COB = \angle BAC$ (זוויות היקפיות, הנשענות על אותה קשת). היות וזווית BAC היא קבועה, כל נקודה c נמצאת על קרן, היוצרת עם הישר OX זווית השווה ל-BAC. המקום הגיאומטרי הוא רק קטע על הקרן (כפי שנמצא – ציור מס' 32). כדי לקבוע את קצות הקטע – נמצא את המרחקים המינימלי והמקסימלי של הנקודה C מהנקודה O.

נסמן: $AB=c$, $AC=b$ ו-$BC=a$, ונניח כי $BC \le AC$.

נתבונן בשלושת המצבים המיוחדים של משולש ABC (ציור מס' 34 א', ב', ג').



א' ב' ג'

ציור מס' 34

לפי הציור, המרחקים של C מקודקוד הזווית הישרה שווים a, b, c – בהתאמה.

נוכיח, שבמקרה הכללי מתקיים: אורך היתר ≤ OC ≤ מהניצב הקצר יותר.

מנקודה C, במצב כלשהו של המשולש, נוריד אנך CF לציר ה-x. $CF \le a$.

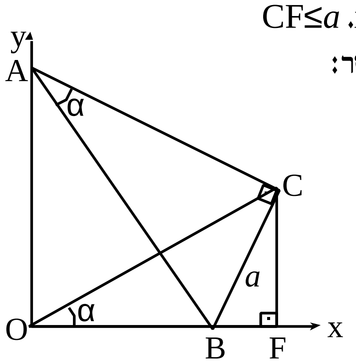
(ציור מס' 35) ומתקבל $\Delta COF \sim \Delta ABC$. מהדימיון קיים הקשר:

$$\frac{CO}{AB} = \frac{CF}{BC} \qquad \frac{CO}{c} = \frac{CF}{a} \le 1$$

זאת אומרת, $CO \le c$

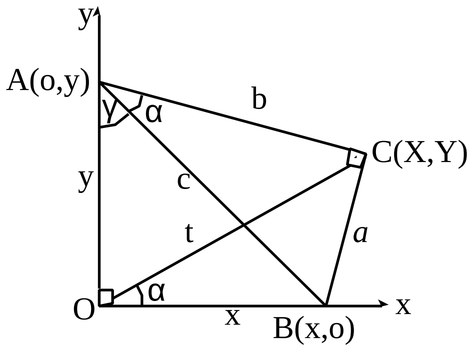
נסמן $\angle BAC = \alpha$. היות וקבענו $a \le b$, לכן

$\angle OBC \le \angle ABC \le \alpha$ · לכן ב-ΔOBC $CO \ge BC = a$.



ציור מס' 35

מסקנה: המקום הגיאומטרי הוא קטע C_1C_2 על קרן, היוצרת עם ישר OX זווית α, ולפיכך $OC_1=a$ ו-$OC_2=c$.



ציור מס' 35 א'

פתרון בדרך ב' – הנדסה אנליטית

נסמן את שיעורי הנקודות כדלקמן:
$B(x,o)$, $A(o,y)$ ו-$C(X,Y)$, (ציור מס' 35 א').
היות וראינו שהמקום הגיאומטרי נמצא על קרן OC, היוצר זווית α עם ציר ה-x, הרי שמשוואת הישר, שנקודות המקום הגיאומטרי נמצאות עליו, היא: $Y = tg\alpha\ X$. לפי משולש ABC,
$tg\alpha = \frac{a}{b}$, ולכן משוואת הישר היא $Y = \frac{a}{b}X$.

אנליזה למציאת קצות הקטע של המקום הגיאומטרי.

נסמן $OC=t$, $\measuredangle BAO=\gamma$. יש למצוא מינימום ומקסימום של הערך t, כאשר קודקודים A ו-B נעים על הצירים.

לפי משפט הקוסינוסים במשולש OAC, $t^2=y^2+b^2-2by\cos(\alpha+\gamma)$, $0\le y\le c$

$$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=\frac{b}{c}\frac{y}{c}-\frac{a}{c}\frac{x}{c}=\frac{by-ax}{c^2}$$

$$t^2=y^2+b^2-\frac{2by}{c^2}(by-ax)=\frac{1}{c^2}(c^2y^2-2b^2y^2+2abxy+c^2b^2)$$

לפי משולש AOB, $x=\sqrt{c^2-y^2}$, נציב את ערך x במשוואת המרחק

$$t^2=\frac{1}{c^2}\left(c^2y^2-2b^2y^2+2aby\sqrt{c^2-y^2}+c^2b^2\right)\qquad(*)$$

נבצע גזירה,

$$(t^2)'y=\frac{1}{c^2}\left[2c^2y-4b^2y+\frac{2ab(c^2-2y^2)}{\sqrt{c^2-y^2}}\right]=\frac{2}{c^2}\left[(a^2-b^2)y+\frac{ab(c^2-2y^2)}{\sqrt{c^2-y^2}}\right]$$

נשווה את הנגזרת ל-0:

מכאן, $$(a^2-b^2)y=\frac{ab(2y^2-c^2)}{\sqrt{c^2-y^2}}\qquad(**)$$

נסמן: $a^2-b^2=k$ ו-$ab=p$, ונעלה בריבוע את שני האגפים:

$$k^2y^2 = \frac{p^2\left(4y^4 - 4c^2y^2 + c^4\right)}{c^2 - y^2} \qquad c^2k^2y^2 - k^2y^4 = 4p^2y^4 - 4p^2c^2y^2 + p^2c^4$$

או, $\left(4p^2 + k^2\right)y^4 - c^2\left(4p^2 + k^2\right)y^2 + p^2c^4 = 0$

$$4p^2 + k^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2) = c^4$$

נציב זאת ונקבל: $c^4y^4 - c^6y^2 + p^2c^4 = 0 => y^4 - c^2y^2 + a^2b^2 = 0$

נסמן, $z=y^2$ ונקבל, $z^2-c^2z+a^2b^2=0$

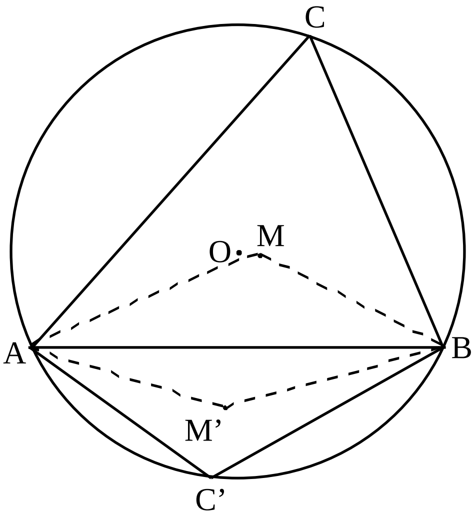
$$z_{1,2} = \frac{c^2 \sqrt{c^4 - 4p^2}}{2} = \frac{c^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2}$$

$$z_1 = a^2, y_1{}^2 = a^2 \qquad y_1 = a$$

$$z_2 = b^2, y_2{}^2 = b^2 \qquad y_2 = b$$

הצבת פתרונות למשוואה (**) מראה, כי $y=b$ הוא שורש מיותר. כדי למצוא מינימום ומקסימום של t בתחום $o \le y \le c$, נציב לנוסחה (*) את הקצוות של הקטע הסגור $[o,c]$ וגם ערך $y=a$, החשוד כנקודת קיצון:

$t(c)=a$; $t(a)=c$; $t(0)=b$ לפי ההנחה: $a \le b$. לכן $t_{min}=a$, $t_{max}=c$ מ.ש.ל.



ציור מס' 36

7.2. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים, החסומים במשולשים בעלי בסיס משותף, שהוא מיתר במעגל חוסם נתון.

מאחר ש-AB צלע נתונה במעגל בעל רדיוס נתון, הרי שהם קובעים את זווית הראש של המשולש C. כדי לפשט את הבעיה – נניח, כי C זווית חדה. נסמן ב-M את מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ציור מס' 36). O – מרכז המעגל החוסם.

נבצע חישוב זווית:

$$\measuredangle AMB = 180^0 - \left(\frac{1}{2}\measuredangle A + \frac{1}{2}\measuredangle B\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\measuredangle A + \measuredangle B\right) =$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \measuredangle C\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle C$$

כלומר $\measuredangle AMB$ היא בעלת גודל קבוע.
לפיכך המקום הגיאומטרי הוא קשת, שממנה רואים את הקטע AB בזווית היקפית של $90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle C$ (בניית הקשת שייכת לבניית יסוד בהנדסת המישור).

אם הזווית C קהה, הרי הקודקוד C יהיה מהצד השני של AB (קודקוד בציור 36), זאת אומרת $C' = 180^0 - \measuredangle C$, ואז $\measuredangle AM'B = 180^0 - \frac{1}{2}\measuredangle C$. לפיכך קיימת אפשרות נוספת למקום גיאומטרי, והוא הקשת, שממנה רואים את הקטע AB בזווית $180^0 - \frac{1}{2}\measuredangle C$ (C זווית חדה).

המסקנה: המקום הגיאומטרי מורכב משתי קשתות הבנויות על הקטע AB.
לבעיה קיים פתרון רק בתנאי שהצלע הנתונה אינה גדולה מקוטר המעגל. במקרה של "שוויון" – המקום הגיאומטרי מורכב משתי קשתות של מעגל, סימטריות לגבי הצלע AB.

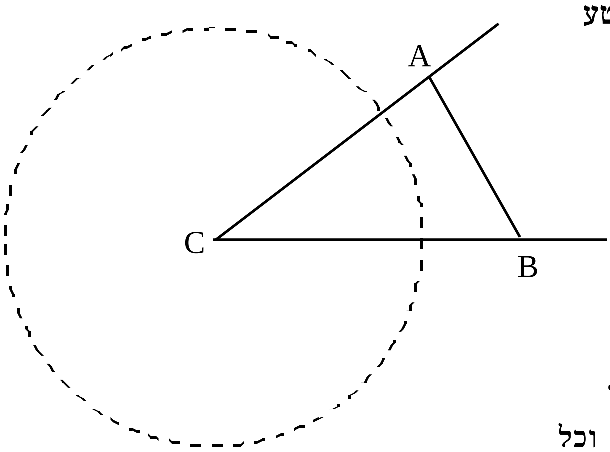
בעיות יישום לעבודה עצמית

7.2.1. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים, החסומים במשולשים בעלי בסיס משותף וזוויות הראש שוות.

7.2.2. בנה משולש על-פי הבסיס, זווית הראש ורדיוס המעגל החסום.

7.2.3. בנה משולש ישר זווית על-פי היתר ורדיוס המעגל החסום.

7.3. שתי נקודות, המהוות קצות קטע נתון **AB**, נעות על שני ישרים, הנחתכים בנקודה **C**. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים, החוסמים את המשולשים **ABC**.

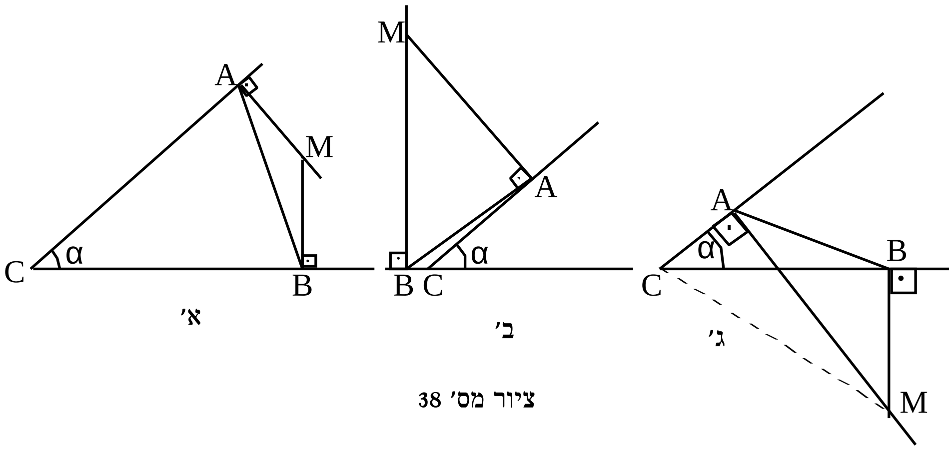


ציור מס' 37

בכל המשולשים ABC שנוצרים – שווים הבסיס AB וזווית הראש C. לכן כל המעגלים, החוסמים אותם הם בעלי אותו רדיוס (משפט הסינוסים). היות וכל המעגלים המבוקשים עוברים דרך הנקודה C (קודקוד קבוע בכל המשולשים), אז מרכזיהם נמצאים

במרחק שווה מ-C (ציור מס' 37).

מסקנה: המקום הגיאומטרי הוא מעגל עם מרכז בנקודה C ורדיוס השווה לרדיוס של כל אחד מהמעגלים, החוסם משולש כלשהו, המקיים את התנאים, או במילים אחרות, ל- $\frac{AB}{2\sin(}$.



ציור מס' 38

7.4. שתי נקודות, המהוות קצות קטע נתון AB, נעות על שני ישרים, הנחתכים בנקודה C. בנקודות A ו-B בונים אנכים לישרים. מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות חיתוך האנכים.

מקרים שונים של בניית נקודות M, השייכות למקום הגיאומטרי, נראים בציור מס' 38 א', ב', ג'. ברור, שמרובע ABCM הוא בר-חסימה. יתר על-כן, CM הוא קוטר המעגל, החוסם את משולש ABC. לפי בעיה 7.3. כל המעגלים, החוסמים את המשולשים ABC, הם שווי רדיוס, ולכן CM הוא גודל קבוע.

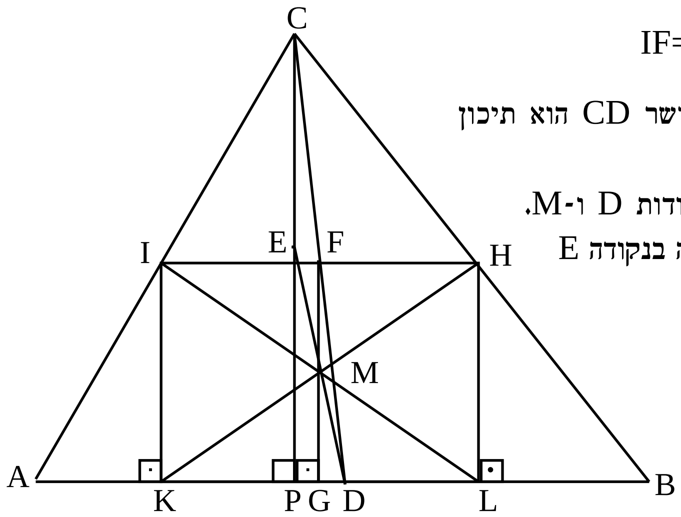
מסקנה: המקום הגיאומטרי המבוקש הוא מעגל, שמרכזו C ורדיוסו שווה לקוטר המעגל החוסם משולש ABC כלשהו, המקיים את תנאי הבעיה.

7.5. מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות חיתוך אלכסוני המלבנים, החסומים במשולש נתון באופן ששני קודקודי המלבן ממוקדים על בסיס המשולש, ושני האחרים – על צלעותיו (ציור מס' 39).

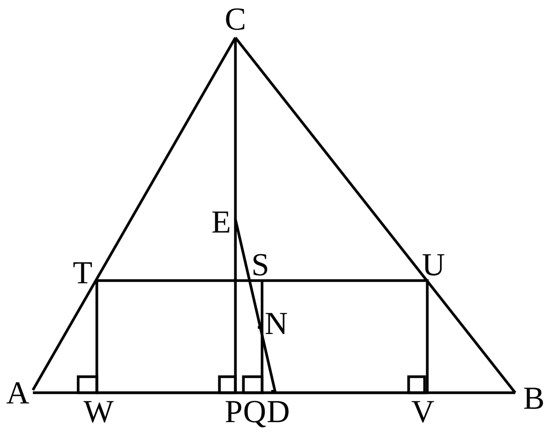
הנקודה M תהא אחת מנקודות המקום הגיאומטרי. דרך M נעביר קטע FG הניצב לבסיס. נחבר את הקודקוד C עם F, עד אשר המשכו יחתוך בנקודה D את הבסיס. מדמיון המשולשים הבאים:

$\Delta CIF \sim \Delta CAD$

ו-$\Delta CFH \sim \Delta CDB$



ציור מס' 39



ציור מס' 40

נובע: $\frac{IF}{AD}=\frac{FH}{DB}$, אך מ-IF=FH

נובע, ש-AD=DB, כלומר הישר CD הוא תיכון במשולש ABC.

נוריד גובה CP, נחבר את הנקודות D ו-M. המשכו של הישר חותך את הגובה בנקודה E (ציורים 39 ו-40).

מדימיון המשולשים:

$\Delta DGM \sim \Delta DPE$

ו-$\Delta DFM \sim \Delta DCE$

נובע, כי: $\frac{MG}{PE}=\frac{MF}{EC}$,

ומ-MG=MF נובע, ש-PE=EC, זאת אומרת DE הוא תיכון במשולש DCP.

הקטע ED, הכולל את הנקודה M (אחת מנקודות המקום הגיאומטרי) מחבר את נקודת אמצע הבסיס AB עם אמצע הגובה לבסיס.

הנחה: הקטע DE – ללא קצותיו – הוא המקום הגיאומטרי (בנקודות D ו-E המלבן עובר לקטע).

א. הוכחנו, שהנקודה M, שהיא אחת מנקודות המקום הגיאומטרי, נמצאת על הקטע הנ"ל.

ב. נוכיח, שכל נקודה על הקטע הנ"ל היא נקודת החיתוך של אלכסוני מלבן כלשהו מקבוצת המלבנים הנ"ל.

ניקח נקודה כלשהי על הקטע DE – הקטע המחבר את נקודת אמצע הבסיס D עם נקודת אמצע הגובה לבסיס E (ציור מס' 40).

נוריד ל-AB את האנך NQ. נאריך את NQ באורך זה ונקבל את הנקודה S באופן ש-NQ=NS.

דרך הנקודה S נעביר מקביל TU לבסיס, ומקצותיו נוריד אנכים לבסיס UV ו-TW. קל מאוד להראות, שהנקודה N היא נקודת מפגש אלכסונים במלבן TUVW. מ.ש.ל.

7.6. מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות, שאורכי המשיקים מהן לשני מעגלים נתונים שווים ביניהם.

לבעיה זו ישנם יישומים טכנולוגיים במערכות מכניות (בטרנספורמציות מכניות) ברובוטיקה ובמכניקה עדינה.

בניגוד למקרים הקודמים – נציג תחילה את הפתרון על-ידי הנדסה אנליטית.

פתרון בדרך א' – הנדסה אנליטית

(O,R) ו-(O_1,r) יהיו המעגלים הנתונים (ציור מס' 41).

נבחר מערכת צירים, באופן שציר ה-x עובר דרך מרכזי המעגלים, ואחד מהם נמצא בראשית הצירים: $O(0,0)$;

$O_1(m,0)$.

M תהיה – נקודה על המקום הגיאומטרי.

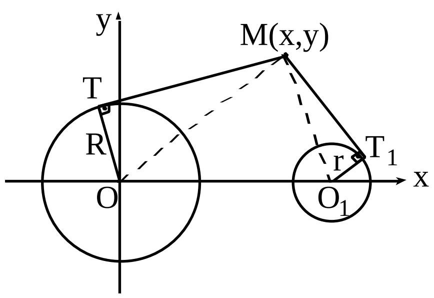
לפי משפט פיתגורס, $MT^2=OM^2-R^2$,

$MT_1^2=O_1M^2-r^2$.

נבטא את שוויון $MT=MT_1$ בעזרת נוסחת המרחק בין שתי נקודות: $x^2+y^2-R^2=(x-m)^2+y^2-r^2$

נפתח את הביטוי ונקבל: $x=\dfrac{R^2-r^2+m^2}{2m}$

כלומר, המקום הגיאומטרי הוא קו ישר במאונך לישר OO_1.



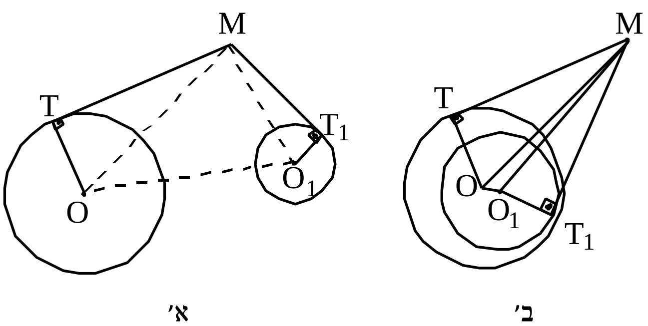
ציור מס' 41

פתרון בדרך ב' – הנדסת המישור

נתאר שני מקרים (ציור מס' 42 א', ב'). היות

$OM^2-O_1M^2=R^2-r^2$-ו,

הרי שהתקבלה הבעיה 6.5 שלפיה הפתרון הוא ישר MN המאונך לישר OO_1.



ציור מס' 42

בנייה:

צריכים למצוא על הישר OO_1

נקודה N באופן ש-$ON^2-O_1N^2=R^2-r^2$.

הגודל, R^2-r^2, הוא ניצב במשולש ישר-זווית בעל יתר R וניצב r.

נסמן $OO_1=d$, ומכאן – $ON^2-(d-ON^2)=R^2-r^2$, או $ON=\frac{R^2-r^2+d^2}{2d}$.

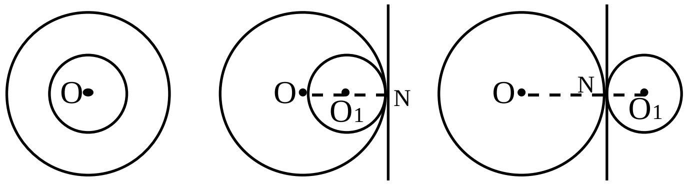
לתיאור הבנייה ראה מקור (9).

אנליזה:

לצורך חקירה נסמן ב-x את מרחק הנקודה N מהמעגל הגדול:

$$x = ON - R = \frac{[d-(R+r)]\,[d-(R-r)]}{2d}$$

א. אם המעגלים נמצאים אחד מחוץ לשני (ציור מס׳ 42 א׳), אז $d>R+r$ ו-$d>R-r$ ולכן $x>0$.
אם המעגלים נמצאים אחד בתוך השני (ציור מס׳ 42 ב׳), אז $d<R+r$ וגם $d<R-r$, ולכן שוב $x>0$.
מסקנה: כאשר המעגלים לא נחתכים, אז $ON>R$, זאת אומרת הישר, המהווה את המקום הגיאומטרי, נמצא מחוץ למעגל הגדול. באותה דרך אפשר להוכיח, כי הישר נמצא גם מחוץ למעגל הקטן. אם $R=r$, אז $ON=\frac{d}{2}$, זאת אומרת, שהישר חוצה את הקטע OO1.



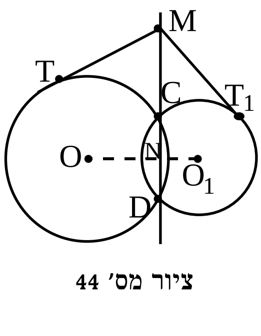
א׳ ב׳ ג׳

ציור מס׳ 43

ב. אם למעגלים יש מרכז משותף (ציור מס׳ 43 א׳), אז $d=0$ ואורך ON לא מוגדר.
במקרה זה לא קיים מקום גיאומטרי – גם משיקולים לוגיים.

ג. אם מעגלים משיקים מבפנים (ציור מס׳ 43 ב׳), אז $d=R-r$, ולכן $x=0$.
אם המעגלים משיקים מבחוץ (ציור מס׳ 43 ג׳), אז $d=R+r$ ולכן $x=0$, כלומר בשני המקרים המקום הגיאומטרי הוא המשיק המשותף לשני המעגלים.

ד. אם המעגלים נחתכים (ציור מס׳ 44), נעביר חותך משותף CD, ונבחר עליו נקודה שרירותית M על החלק החיצוני של החותך.

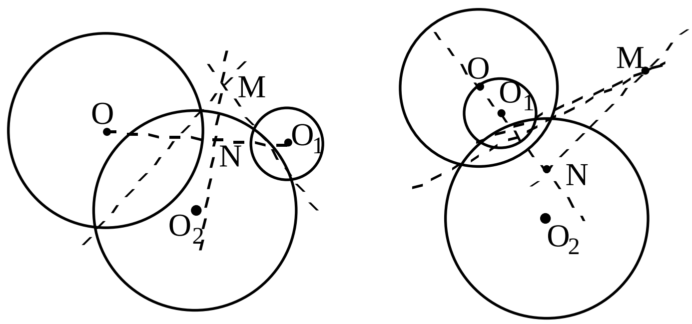


ציור מס׳ 44

נבנה משיקים MT ו-$MT1$ למעגלים. לפי המשפט על משיק חותך, $MD = MT_1^2$ $MT^2 = MC$, כלומר $MT=MT1$, והנקודה M שייכת למקום הגיאומטרי.
מסקנה: אם המעגלים נחתכים, אז המקום הגיאומטרי הוא החלק החיצוני של החותך המשותף.

בנייה חֲלופית

במקרים ג' ו-ד' הבנייה נובעת מהחקירה.
במקרה א' אפשר למצוא את הנקודה N על הישר OO_1, כפי שתואר בבעיה 6.5.
נתאר דרך הרבה יותר פשוטה, כפי שנראה בציור מס' 45 א', ב'.



א' ב'

ציור מס' 45

נזכיר, כי המעגלים (O,R) ו-(O_1,r) אינם נחתכים.
נבנה מעגל כלשהו O_2, החותך את שני המעגלים O ו-O_1. החלק החיצוני של החותך, המשותף למעגלים O ו-O_2, הוא המקום הגיאומטרי של נקודות, שמהן אורכי המשיקים ל-O ול-O_2 שווים. החלק החיצוני של החותך המשותף של מעגלים O_1 ו-O_2, הוא המקום הגיאומטרי של נקודות, שמהן אורכי המשיקים ל-O_1 ול-O_2 שווים.
הנקודה M – נקודת המפגש של החותכים שייכת למקום הגיאומטרי המבוקש. אנך מהנקודה M לישר OO_1 הוא המקום הגיאומטרי המבוקש.

מראי מקומות

1. אבירי, ח' (1972). מבחר בעיות בהנדסה לבגרות. תל-אביב, רביב.
2. גורן, ב' (1996). גיאומטריה של המישור. מישלב – מפעלי תרבות וחינוך.
3. אספיס, א' (1981). הנדסת המישור, טריגונומטריה והנדסת המרחב. הוצאת המחבר.
4. אלפסי, ז' (חש"ד). 100 משפטים בהנדסת המישור. תל-אביב, האולפן לבגרות – לחמן.
5. גורן, ב' (1995). גיאומטריה אנליטית (5 י"ל). תל-אביב, א.א.ח.ר. אופסט מאור בע"מ.
6. אבירי, ח' (1988). גיאומטריה אנליטית. מישלב – מפעלי תרבות וחינוך.

7. Geltner, P. (1995). **Geometry for college.** Boston.

8. Rainich, G. (1968). **Geometry for teachers: an introduction to geometrical theories.** Wiley, New York.

9. אוקסמן, ל', סטופל, מ' (תשנ"ח). עוד על בניות הנדסיות ייחודיות, שנתון ד', שאנן – המכללה הדתית לחינוך, חיפה.