רחל מוגילבסקי ומשה סטופל

פתרון בעיות בהנדסת המישור
על-ידי שימוש בטרנספורמציות

הקדמה

הגיאומטריה לפי ההגדרה של המתמטיקאי הרמני קליין, היא "מדע החוקר תכונות של צורות, שאינן משתנות בטרנספורמציות של מישור (מרחב)".

השימוש בטרנספורמציות שונות, יסודיות ובין מורכבות – מאפשר, במקרים רבים, פתרון פשוט יותר של בעיות בהנדסת מישור[1-4].

בלימודי ההנדסה של חטיבת-הביניים והחטיבה העליונה – נעשה שימוש בבנייה של קווי-עזר ואף בבניות חלופיות פשוטות, אך כמעט ללא נעשה שימוש בטרנספורמציות – הזזה, שיקוף ביחס לישר או לנקודה, סיבוב, הומותטיה (מושג, המוזכר רק במסגרת לימודי הנדסה מתקדמים).

פתרון בעיות, אפילו פשוטות, על-ידי שימוש בטרנספורמציות – מפתח את הראייה ההנדסית, מקנה כלים חלופיים ומדגים כיצד ניתן לבצע התמרה של צורה גיאומטרית.

ביצוע הטרנספורמציות מחזק את התפיסה, שצורה גיאומטרית איננה משהו "קפוא", אלא דבר שאפשר להניע.

בשלב הראשון אפשר להשתמש במשולשים חומריים, או בצורות גיאומטריות אחרות, כדי להדגים תכונה גיאומטרית זו או אחרת.

דגמים, קיפולי נייר וכד' הם תמצית מהותה של הגיאומטריה היסודית בשלבה הנסיוני. לעיתים קרובות דווקא השלב הנסיוני הוא זה המוביל אותנו אל ההוכחה המתמטית המדויקת.

במהלך התנועה ניתן להדגיש, לצורך הבנה, אפיונים חשובים של הפעולה – תוך התייחסות לתכונות המיוחדות של הצורה.

במאמר מוצג מכלול מקיף של 38 בעיות. בכל תת-נושא הוגדר סוג הטרנספורמציה בצירוף התכונות המרכזיות שלה.

הרוב המכריע של המשימות הן בעיות בנייה, שפתרונן מבוסס על ביצוע טרנספורמציות מסוגים שונים. לבעיות הבנייה הובאו בדרך כלל ניתוח, תיאור, הוכחה וחקירה לגבי התנאים לקבלת פתרון וקביעת מספר הפתרונות האפשריים. בעיות חישוב ובעיות הוכחה – כלולות אף הן במכלול המוגש.

ראוי לציין, שפעולות הטרנספורמציה מבוססות על בניות יסודיות המוכרות לתלמידים, כגון העתקת קטע או זווית והעברת קו מקביל. לכן הטכניקה המעשית לא הובאה בתיאור הבנייה. חלק מהבעיות ניתנו לעבודה עצמית ולהתנסות.

הגישה המיוחדת לפתרון המשימות, כפי שמוצגת במאמר זה, מיועדת להקנות ולהטמיע כלים נוספים, המאפשרים התמודדות עם אתגרים מתמטיים, לעיתים בצורה פשוטה בהשוואה לשיטות שימושיות

תארנים: *טרנספורמציות, הזזה, שיקוף, סיבוב, הומותטיה, בניות חלופיות.*

ומקובלות.
הטרנספורמציה היא פונקציה, שמעבירה צורה אחת לאחרת, ובכך היא מהווה גשר בין אלגברה להנדסה. באותם הרעיונות משתמשים בבניית גרפים של פונקציות שונות ובתחומי מדע אחרים.

הגדרה והצגת מושגים

הגדרה 1 – טרנספורמציה (העברה)

טרנספורמציה של מישור היא פונקציה חד-חד ערכית, שמתאימה לכל נקודה A של המישור את התמונה שלה (image) A' . הנקודה A נקראת המקור של A' לפי הטרנספורמציה.
אם F היא צורה כלשהי במישור, אזי אוסף הנקודות שלה לאחר ביצוע טרנספורמציה מסוימת יוצר את הצורה F'. במילים אחרות: F' מתאימה ל-F בהתאם לטרנספורמציה.

הגדרה 2 – טרנספורמציה איזומטרית

טרנספורמציה איזומטרית או בקיצור איזומטריה היא טרנספורמציה, השומרת על מרחקים. המשמעות היא, שאם A ו-B הן נקודות במישור ו-A', B' הן התמונות שלהן בהתאמה, אז אורך הקטע A'B' שווה לאורך הקטע AB.
הזזה, שיקוף ביחס לישר, סיבוב, שיקוף ביחס לנקודה הם סוגים שונים של איזומטריות יסודיות.
הוכח, כי כל טרנספורמציה של מישור ניתנת לבטא כהרכבה של טרנספורמציות יסודיות

הגדרה 3 – הומותטיה

הומותטיה היא טרנספורמציה המתייחסת למרכז O ומתאימה לכל נקודה X נקודה X' על הישר OX ולכן $OX' = k \cdot OX$. כאשר k נקרא מקדם הדמיון. גם ההומותטיה היא טרנספורמציה יסודית, אך איננה איזומטרית מישום שאינה שומרת על מרחק קבוע בין הנקודות.
לאורך המאמר משולבות הגדרות לכל טרנספורמציה יסודית ומצוינות תכונות יסודיות שלהן ללא הוכחה.
הגדרות ותכנות של טרנספורמציות איזומטריות ניתן למצוא במקור[3].

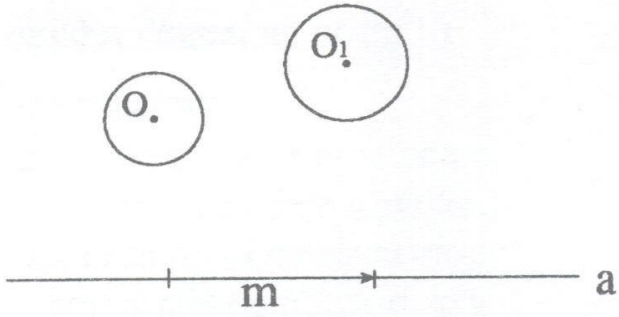
1. **הגדרת הזזה:** הזזה היא טרנספורמציה, המזיזה את כל אחת מנקודות המישור בכיוון קבוע ולמרחק קבוע.

תכונות של הזזה:

א. הזזה מעבירה קטע נתון לקטע מקביל ושווה לו (או לקטע שווה לו, הנמצא על אותו ישר).
ב. הזזה מעבירה מעגל למעגל שווה (וכל צורה גיאומטריה – לצורה גיאומטרית חופפת).
ג. הזזה מעבירה ישר לישר מקביל או מתלכד.

בעיה 1.1

נתונים שני מעגלים שמרכזיהם O ו-O_1 ורדיוסיהם R ו-R_1 (מכאן ואילך נסמן מעגלים בצורה: (O,R) ו-(O_1,R_1)) וקטע m על ישר a – כנראה בציור מס' 1.



ציור מס' 1

יש לבנות קטע XY, השווה ומקביל ל-m, כשקצותיו נמצאים על המעגלים.

הערה: כל בעית בנייה מורכבת מארבעה שלבים:

א. ניתוח הבעיה

ב. תיאור הבנייה

ג. הוכחת הבנייה

ד. חקירת הבנייה, לגבי מספר הפתרונות.

בבעיות פשוטות אפשר לדלג על חלק מהשלבים.

תיאור הבנייה:

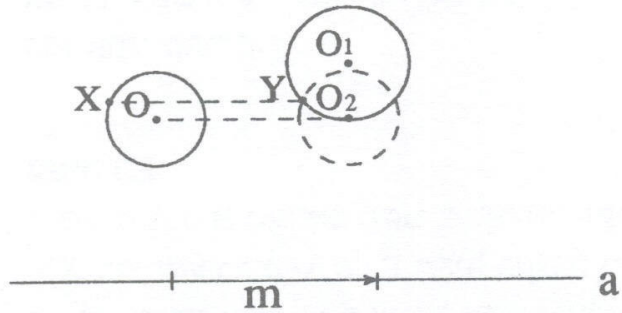
נזיז את המעגל (O,R) בווקטור $\vec{m}$.

נסמן ב-Y את אחת מנקודות החיתוך של המעגלים (O_2,R) ו (O_1,R_1)

וב-X את מקורה בהזזה.

קל להראות, כי הקטע XY הנראה בציור מס' 2 הוא הקטע המבוקש.

אפשר גם לבצע את הבנייה על-ידי הזזה של המעגל (O_1,R_1) בווקטור $-\vec{m}$.



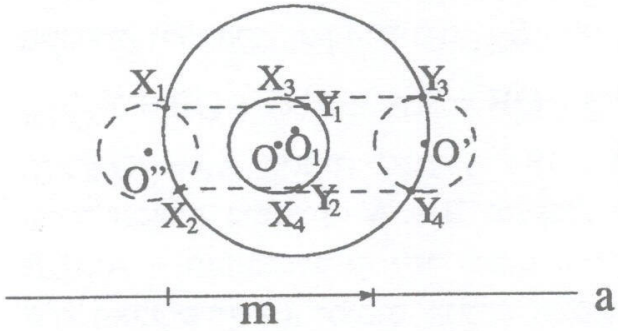
ציור מס' 2

חקירה:

במקרה הפרטי כש-$R_1=R$ וגם $\overline{OO_1}=\vec{m}$, ישנם אינסוף פתרונות לבעיה. במקרה כללי יש לבעיה לכל היותר ארבעה פתרונות.

מקרה של ארבעה פתרונות נראה בציור מס' 3.

מזיזים את המעגל (O,R) בווקטור $\vec{m}$ ומקבלים את המעגל (O',R), החותך את המעגל (O_1,R_1) בשתי נקודות. כאשר מזיזים את המעגל (O,R) בווקטור $-\vec{m}$ מקבלים את המעגל (O",R), החותך את המעגל (O_1,R_1) בנקודות. X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 ו-X_4Y_4 – הם הקטעים המבוקשים.



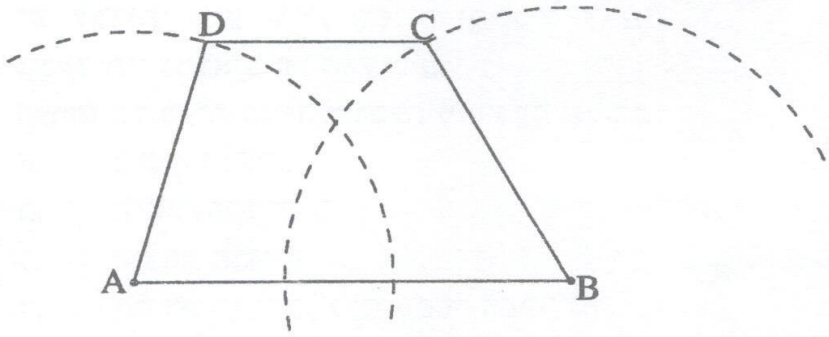
ציור מס' 3

בעיה 1.2

לבנות טרפז על-סמך 4 צלעות נתונות.

ניתוח הבעיה:

נניח, שהטרפז כבר בנוי. נבנה 2 מעגלים (A,AD) ו-(B,BC), כנראה בציור מס' 4. נותר לבנות את הבסיס העליון DC, שקצותיו על המעגלים והוא מקביל לבסיס AB.



ציור מס' 4

קיבלנו, למעשה, את הבעיה 1.1

תיאור הבנייה:

בונים קטע AB, השווה לבסיס הגדול של הטרפז. בונים 2 מעגלים, שמרכזיהם A ו-B ורדיוסיהם שווים לשוקיים המתאימות. בונים קטע מקביל ל-AB, השווה לבסיס הקטן של הטרפז כמתואר בבעיה 1.1.

חקירה:

אם AD+DC+CB>AB, מתקבל פתרון יחיד (קיים גם טרפז שיקופי, החופף לטרפז הבנוי, שלמעשה הוא אותו פתרון).

בעיה 1.3

יישובים A ו-B נמצאים משני צידיה של תעלה מים בעלת שפות מקבילות. היכן צריכים לבנות גשר XY כדי שהדרך מ-A ל-B תהיה הקצרה ביותר?

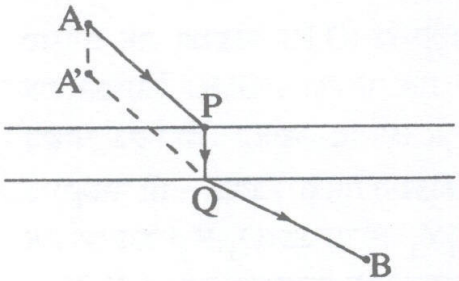
הבעיה ידועה והפתרון המקובל מבוסס על עקרון השיקוף, אך ראוי להביא פתרון גם על-ידי הזזה.

ניתוח הבעיה:

נניח כי APQB היא דרך כלשהי – כנראה בציור מס' 5.

נזיז את הקטע AP למרחק PQ בכיוון תעלת המים, וכך נקבל את הקטע A'Q. המרובע APQA' הוא מקבילית ולכן הדרך בין הישובים S_{AB} היא: S_{APQB} כדלקמן,

$$S_{APQB} = AP + PQ + QB = AA' + A'Q + QB = S_{AA'QB}$$



ציור מס' 5

הקטע AA'=PQ, הוא גודל קבוע, השווה לרוחב תעלת המים. הדרך הקצרה ביותר מ-A' ל-B תתקבל, כאשר הנקודות: A',Q,B – תהיינה על קו ישר (סכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית). לסיכום, הנקודה המבוקשת Y היא נקודת החיתוך של הישר A'B עם שפת התעלה הקרובה ליישוב B.

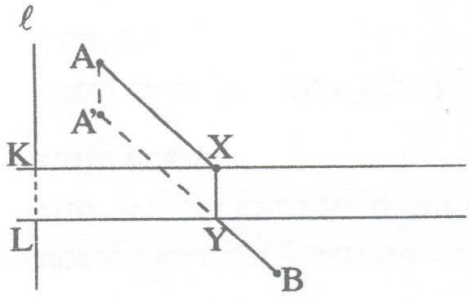
תיאור הבנייה:

נבנה ישר ℓ המאונך לשפות התעלה – כנראה בציור מס' 6.

נסמן ב-KL את הקטע של ℓ בין שפות התעלה.

נזיז את נקודה A מרחק KL לכיוון שפת התעלה. מתקבלת נקודה 'A שהיא התמונה של A.

נחבר את הנקודה A עם הנקודה B. נסמן ב-Y את נקודת החתוך של A'B עם שפת התעלה הקרובה ליישוב B.



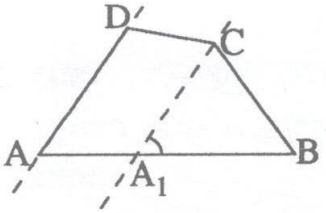
ציור מס' 6

מהנקודה Y נוריד אנך לשפת התעלה השנייה, ונקבל את נקודת X.
XY הוא הגשר המבוקש.
ההוכחה שהפתרון יחידי – פשוטה לקורא.

בעיה 1.4

לבנות מרובע ABCD, כשנתונות זוויותיו והצלעות הנגדיות AB ו-CD.

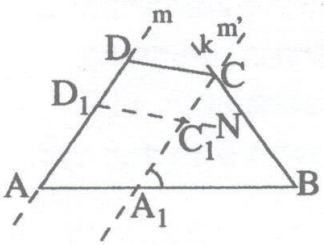
ניתוח הבעיה:



ציור מס' 7

נניח, כי הבעיה פתורה – כנראה בציור מס' 7. נזיז את הישר AD בכיוון הווקטור $\overrightarrow{DC}$ למרחק DC.
התמונה של ישר AD הוא ישר המקביל לו ועובר דרך הקודקוד C.
ישר התמונה חותך את הצלע AB בנקודה A_1. מניתוח זה נובעת הבנייה.

תיאור הבנייה:

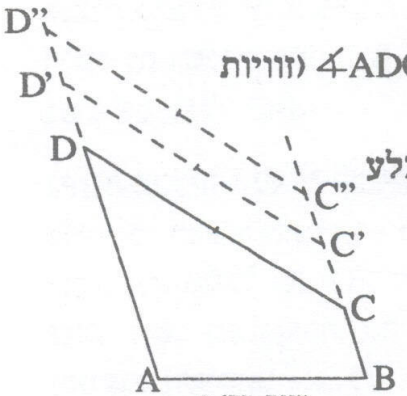


ציור מס' 8

בונים קטע AB, ובקצותיו בונים את הזוויות A ו-B. מתקבלות הקרנים m ו-k כנראה בציור מס' 8. על הקרן m יש למצוא את הנקודה D. משום ש-$\measuredangle ADC$ ואורך הצלע DC נתונים, הרי לשם המשך הבנייה נבחר על הקרן m נקודה כלשהי D_1 ונבנה זווית $\measuredangle AD_1N$ השווה לזווית $\measuredangle ADC$.

נזיז את הישר m למרחק DC בכיוון הווקטור $\overrightarrow{D_1N}$. ישר התמונה m' של הישר m חותך את הקרן k בנקודה C. נותר להעביר ישר DC מקביל לישר D_1N, ומתקבל המרובע המבוקש.

הוכחה:



ציור מס' 9

הצלע AB והזויות שבקצותיה הן לפי הנתון. לפי הבנייה $\measuredangle ADC=\measuredangle AD_1C_1$ (זוויות מתאימות בין המקבילים DC ו-D_1N והחותך m).
כלומר, הצורה DCC_1D_1 היא מקבילית. לכן גם הצלע DC היא הצלע המבוקשת.

חקירה:

הזווית C מיותרת, משום שסכום הזוויות במרובע הוא 360^0.
אם $\measuredangle A+\measuredangle B \neq 180^0$, אז יש לבעיה פתרון יחיד.
אם $\measuredangle A+\measuredangle B = 180^0$, הצלעות AD ו-BC מקבילות והפתרון תלוי באורך של CD:
אם האורך של CD קטן מהמרחק שבין שתי הצלעות אז אין פתרון, ואם האורך של CD גדול מהמרחק שבין הצלעות, אז יש אינסוף פתרונות, שהם טרפזים כנראה בציור מס' 9.

בעיות לפתרון עצמי

בעיה 1.5

נתונים שני מעגלים וישר ℓ. להעביר ישר, המקביל ל-ℓ באופן שבחיתוכו עם המעגל יווצרו שני מיתרים שווים.

בעיה 1.6

לבנות את המקום ההנדסי של נקודות, שסכום מרחקיהן משני ישרים נתונים שווה לאורך קטע נתון.

2. הגדרת השיקוף ביחס לישר

נקודות A ו-A' נקראות נקודות שיקופיות ביחס לישר ℓ, אם הישר ℓ מאונך לקטע AA' וחוצה אותו.

תכונות של שיקוף ביחס לישר:

א. השיקוף מעביר קטע לקטע שווה לו.

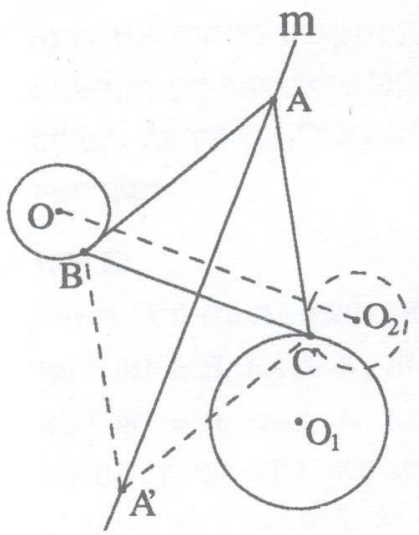
ב. השיקוף מעביר מעגל למעגל שווה לו.

ג. השיקוף מעביר ישר לישר. אם ישר a חותך את ציר השיקוף ℓ, אז התמונה a' חותכת את ℓ באותה נקודה. הישרים a ו-a' יוצרים זוויות שוות עם ℓ באותה נקודה. אם $a \parallel \ell$ אז גם $a' \parallel \ell$ ואם $a \perp \ell$ אז a' מתלכד עם a.

לקט הבעיות שיופיעו בנושא – פתרונן מתבסס על בניית נקודות שיקופיות.

בעיה 2.1

נתון ישר m ושני מעגלים (O,R) ו (O_1,R_1) משני צדדיו.
לבנות משולש שווה צלעות ABC, באופן שהקודקוד A נמצא על הישר m ושני קודקודיו B ו-C נמצאים על המעגלים, וכן הישר m ניצב לצלע BC.



ציור מס' 10

ניתוח הבעיה ותיאור הבנייה:

נניח, כי הבעיה פתורה – כנראה בציור מס' 10.
נבנה את מעגל (O_2,R), שהוא המעגל השיקופי למעגל (O,R) ביחס לישר m. נקודה C היא נקודת החיתוך של המעגל (O_1,R_1) והמעגל השיקופי (O_2,R). מכיוון שישר m הוא גובה וגם חוצה זווית במשולש, אזי הנקודה B היא תמונה של הנקודה C בשיקוף ביחס לישר m.
הנקודה A היא נקודת חיתוך הקשת (C, BC) עם הישר m, וכמובן יש לה נקודה שיקופית A' ביחס לישר BC (למעשה אותו פתרון).

חקירה:

לבעיה מספר פתרונות אפשריים: 1,0 או 2 תלוי במספר נקודות החיתוך של המעגלים (O_1,R_1) ו- (O_2,R).

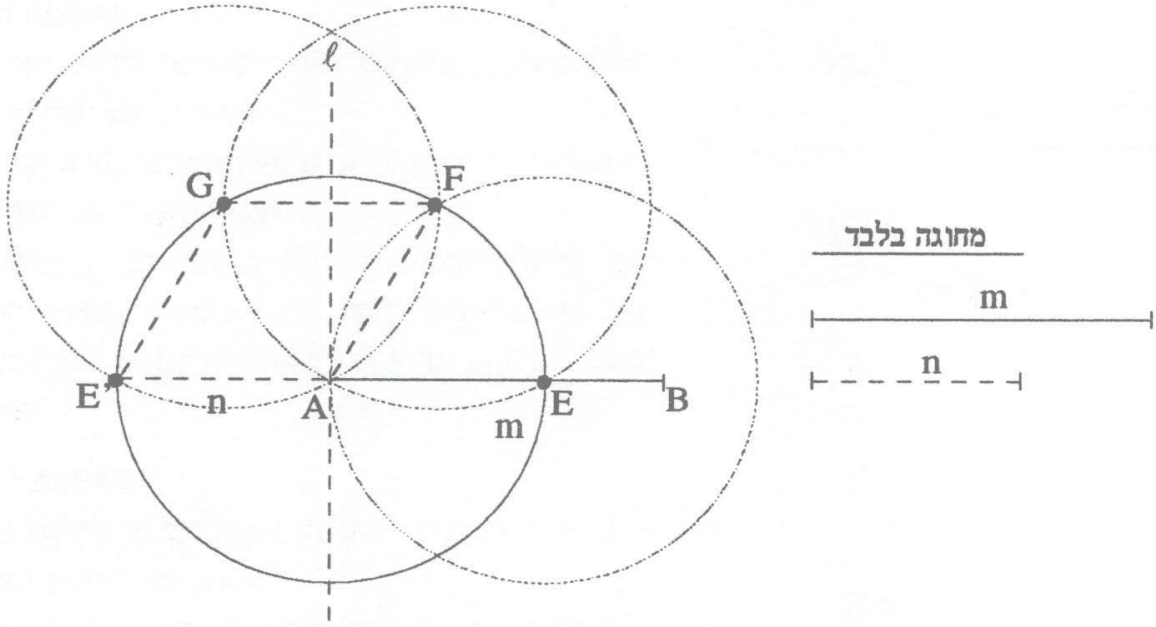
בעיה 2.2

נתונים קטעים שאורכיהם m ו-n. יש לבנות את הקטע m+n בעזרת מחוגה בלבד.

ניתוח הבעיה ותיאור בנייה:

נניח שהקטע m>n. נסמן את הקטע m ב-AB.

אם נחוג את המעגל (A,n), הוא יחתוך את הקטע AB בנקודה E – כנראה בציור מס' 11. מחפשים את הנקודה 'E שהיא הנקודה השיקופית לנקודה E ביחס לישר ℓ המאונך לישר AB ועובר דרך A. מהנקודה E חגים מעגל (E,n) החותך את המעגל (A,n) בנקודה F. מהנקודה F חגים מעגל (F,n) החותך את המעגל (A,n) בנקודה G. מהנקודה G חגים מעגל (G,n), החותך את המעגל (A,n) בנקודה 'E. אורך הקטע BE'=m+n, מ.ש.ל.



ציור מס' 11

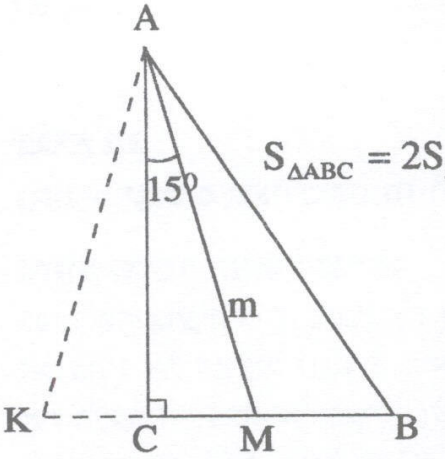
ההוכחה מבוססת על העובדה, שהמרובע E'GFA הוא מעוין בעל צלע n וזווית חדה של 60^0.

בעיה 2.3 (בעיה חישוב)

במשולש ישר זווית ABC($\measuredangle C=90^0$) אורך התיכון לניצב הקטן שווה ל-m. התיכון יוצר זווית של 15^0 עם הניצב הגדול. להביע את שטח המשולש באמצעות m.

פתרון:

נבנה נקודה K שיקופית לנקודה M ביחס לישר AC – כנראה בציור מס' 12.



ציור מס' 12

ברור מהבנייה, ש- $\Delta KAC \cong \Delta MAC$

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta AMC} = S_{\Delta KAM} = \frac{1}{2}AM \cdot AK\sin 30^0 = \frac{1}{2}m^2\sin 30^0 = \frac{m^2}{4}$$

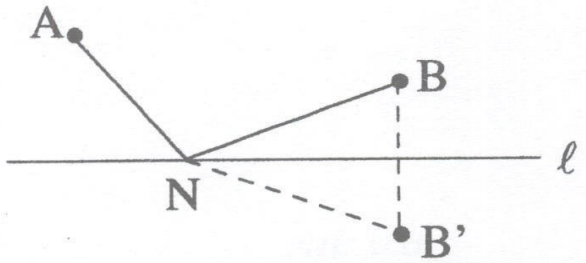
מ.ש.ל.

בעיה 2.4

נתון ישר ℓ ושתי נקודות A ו-B באותו הצד של הישר. למצוא על הישר ℓ נקודה M באופן שסכום הקטעים AM+MB יהיה הקטן ביותר.

בעיה זו ידועה מאוד, בדרך כלל בשם "הפרה והרפת"[1,6] נביא את פתרונה כבסיס לפיתרון הבעיה הבאה.

ניתוח הבעיה:



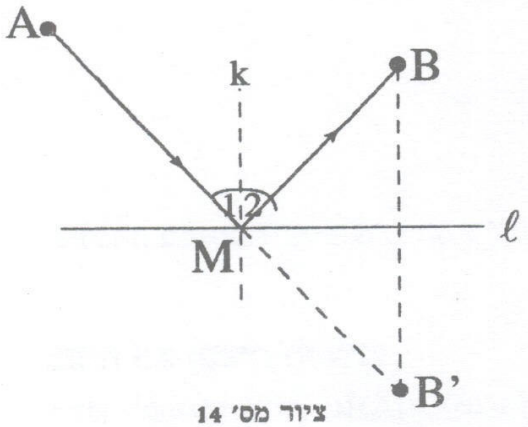
ציור מס' 13

נבנה את נקודה 'B השיקופית לנקודה B ביחס לישר ℓ – כנראה בציור מס' 13.

לכל נקודה N, הנמצאת על הישר ℓ מתקיים 'NB=NB, ולכן 'AN+NB=AN+NB.

זאת אומרת, כי הסכום AN+NB שווה לאורך הקו השבור 'ANB ומעונינים בקו השבור הקצר ביותר. הקו השבור הקצר ביותר הוא הקטע 'AB ומכאן נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:



ציור מס' 14

בונים נקודה 'B שיקופית לנקודה B ביחס לישר ℓ – כפי שנראה בציור מס' 14.

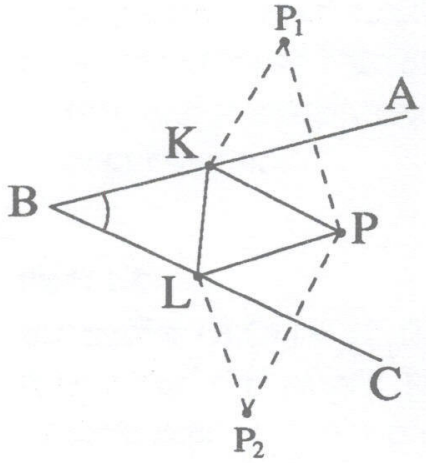
הנקודה M – נקודת החיתוך של 'AB עם הישר ℓ – היא הנקודה המבוקשת. ושוב ההוכחה מסתמכת על המשפט, שסכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית.

הערה

מפתרון הבעיה קל להוכיח ש- $\measuredangle M_1 = \measuredangle M_2$ (k ישר הניצב לישר ℓ בנקודה M). זאת אומרת, שאת הדרך הקצרה ביותר מאפיין, שזווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה וזה עקרון פרמה לגבי ההתנהגות של קרן אור, הנעה תמיד בדרך הקצרה ביותר.

בעיה 2.5

נתונה זווית חדה ABC ובתוכה נקודה P. למצוא על שוקי הזווית BA ו-BC נקודות M ו-N בהתאמה, באופן שהיקף המשולש MPN יהיה הקטן ביותר.



ציור מס' 15

ניתוח הבעיה:

הנקודה P_1 תהיה נקודה שיקופית לנקודה P ביחס לישר BA. הנקודה P_2 שיקופית לנקודה P ביחס לישר BC (ציור מס' 15) על סמך תכונת השיקופיות ניתן בקלות להראות, כי לכל שתי נקודות K ו-L על שוקי הזווית היקף המשולש KPL

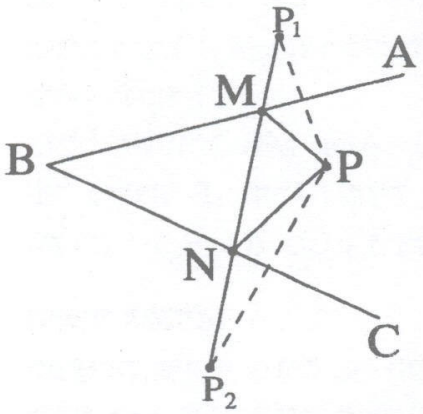
$KP+KL+LP=KP_1+KL+LP_2$

זאת אומרת, שהיקף המשולש שווה לאורך הקו השבור P_1KLP_2. כדי שההיקף יהיה הקטן ביותר, הקו השבור חייב להפוך לקטע ישר, ומכאן נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:

נבנה את הנקודות P_1 ו-P_2 – כמתואר בניתוח הבעיה. נחבר את הנקודות P_1 ו-P_2. נקודות החיתוך של הקטע P_1P_2 עם שוקי הזווית הן הנקודות המבוקשות (ציור מס' 16).

ההוכחה והחקירה פשוטות. לבעיה יש תמיד פתרון יחיד.



ציור מס' 16

משימות לפתרון עצמי

בעיה 2.6

נתון ישר MN ונקודות A ו-B משני צידיו. יש להעביר דרך הנקודות A ו-B שתי קרניים, הנחתכות בנקודה אחת על הישר MN באופן שהישר חוצה את הזווית שביניהן.

בעיה 2.7

לבנות ריבוע באופן שאלכסון נמצא על ישר נתון ושני קצות אלכסונו השני נמצאים על ישר נוסף נתון ומעגל נתון בהתאמה.

3 . הגדרת שיקוף ביחס לנקודה (מרכז השיקוף)

נקודות A ו-A' נקראות שיקופיות ביחס לנקודה O, אם הנקודה O חוצה את הקטע AA'.

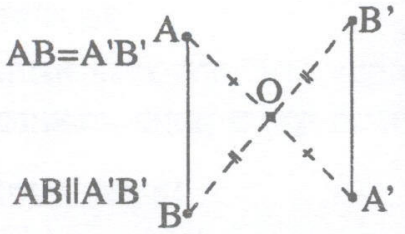
תכונות של שיקוף ביחס לנקודה

א. פעולת השיקוף מעבירה קטע לקטע מקביל (או לקטע, הנמצא על אותו ישר, אם מרכז השיקוף

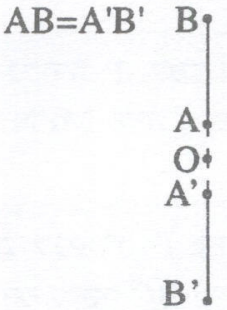
נמצא על ישר המכיל את הקטע).
בציורים 17 א' ו 17 ב' מוצגת הדגמה של שיקוף קטע AB ביחס לנקודה.

ב. שיקוף מעביר מעגל למעגל חופף.

ג. שיקוף מעביר ישר לישר מקביל או מתלכד (ישר מתלכד מתקבל, כשהישר עובר דרך מרכז השיקוף).



ציור מס' 17 ב'



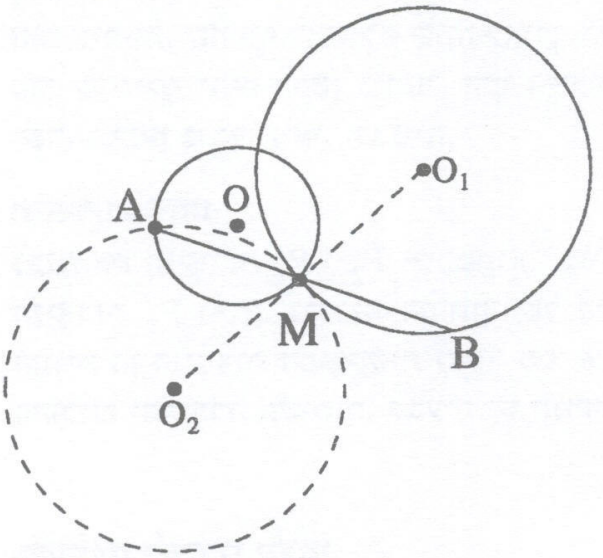
ציור מס' 17 א'

בעיה 3.1

שני מעגלים (O,R) ו-(O_1,R_1) נחתכים בנקודה M. להעביר ישר דרך הנקודה M באופן שיחתוך את המעגלים בנקודות A ו-B בדרך ש-AM=MB.

ניתוח הבעיה:

נניח, כי הבעיה פתורה – כנראה בציור מס' 18. בונים מעגל (O_2,R_1) השיקופי למעגל (O_1,R_1) ביחס לנקודה M.
בגלל השיוויון AM=MB, נקודה A היא התמונה של נקודה B, והיא נקודת החיתוך של המעגלים (O,R) ו-(O_2,R_1). מכאן נובע תיאור הבנייה.



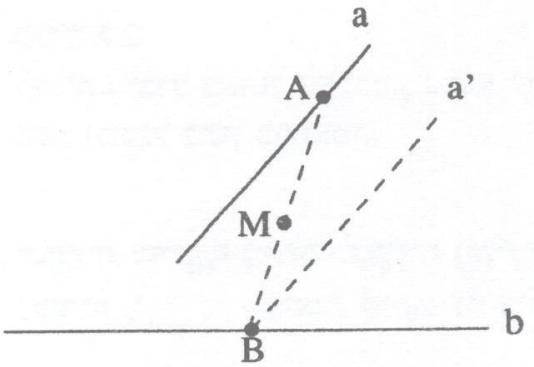
ציור מס' 18

תיאור הבנייה:

בפעולת שיקוף בונים את המעגל (O_2,R_1) שיקופי למעגל (O_1,R_1) ביחס לנקודה M.
נסמן ב-A את נקודת החיתוך של המעגלים (O,R) ו (O_2,R_1). נקודה B היא נקודת החיתוך של הישר AM עם המעגל (O_1,R_1).
לבעיה יש פתרון אחד ויחיד אם המעגלים הנתונים נחתכים בשתי נקודות ואין שום פתרון, אם המעגלים משיקים בנקודה M ורדיוסם לא שווה, ויש אינסוף פתרונות אם מעגלים משיקים ושווים (ההוכחה ניתנת לעבודה עצמית).

בעיה 3.2

לבנות קטע AB שקצותיו יהיו על שני ישרים נתונים a ו-b באופן שהקטע חצה בנקודה נתונה M.



ציור מס' 19

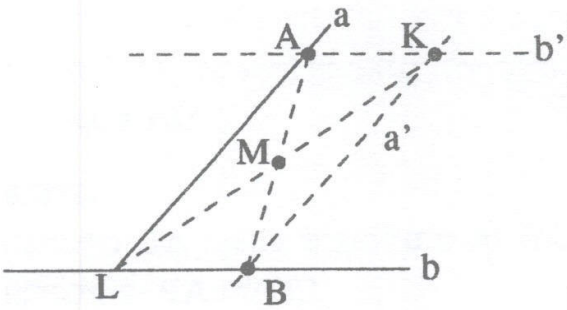
תיאור הבנייה:

בונים ישר a' שיקופי לישר a ביחס לנקודה M. נסמן ב-

B את נקודת החיתוך של הישרים 'a ו-b. המקור של נקודה B בשיקוף הוא נקודת החיתוך של הישר MB עם הישר a, וזאת היא הנקודה A המבוקשת (ציור מס' 19).

הוכחה:

אם נבנה את הישרים 'a ו-'b השיקופיים ביחס לנקודה M לישרים a ו-b בהתאמה, נקבל מקבילית AKBL (ציור מס' 20). הנקודה M היא נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית ולכן היא חוצה את הקטע AB. מ.ש.ל



ציור מס' 20

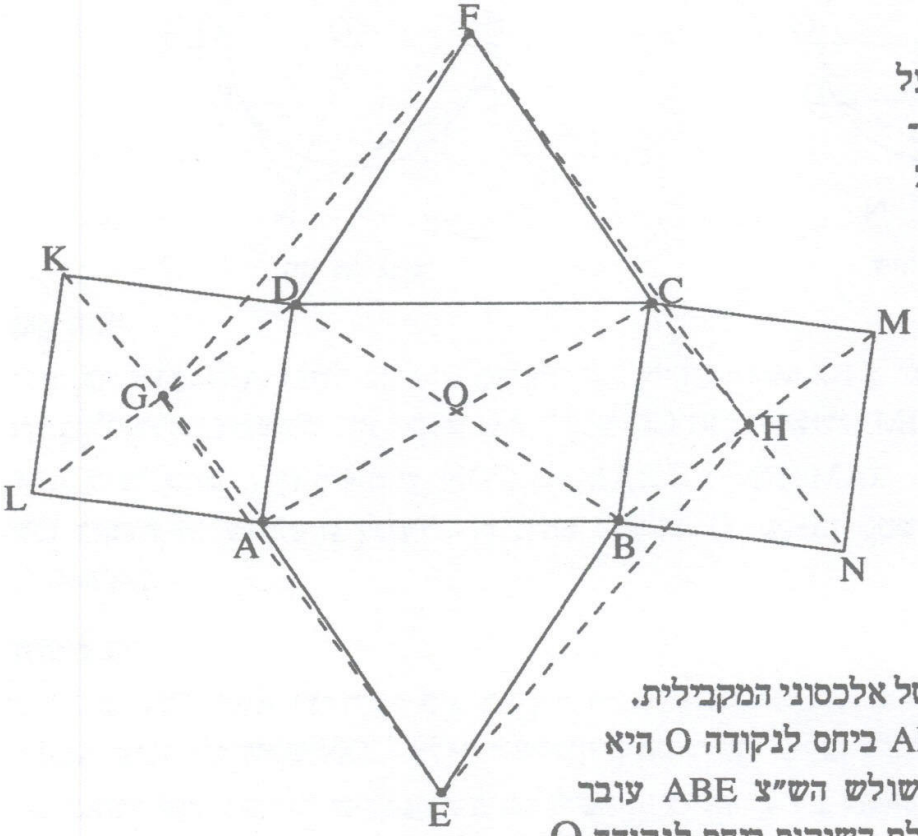
חקירה:

יש לבעיה פתרון יחיד כאשר a ו-b ישרים נחתכים. אם הישרים מקבילים והנקודה M נמצאת במרחקים שווים מהם, אז יש אינסוף פתרונות, אם הישרים מקבילים, אך הנקודה M נמצאת במרחקים שונים מהישרים, אזי אין שום פתרון.

בעיה 3.3 (בעית הוכחה)

נתונה מקבילית ABCD, על שתי צלעותיה הנגדיות: AB ו-CD בונים משולשים ש"צ חיצוניים: ABE ו-CDF, ועל שתי הצלעות הנגדיות האחרות בונים ריבועים חיצוניים שמרכזיהם G ו-H. להוכיח שהצורה המתקבלת EGFH היא מקבילית.

תיאור הנתונים מופיע בציור מס' 21.



ציור מס' 21

פתרון:

נסמן ב-O את נקודת החיתוך של אלכסוני המקבילית. בפעולת השיקוף של הצלע AB ביחס לנקודה O היא עוברת לצלע CD. כנ"ל המשולש הש"צ ABE עובר למשולש ש"צ CDF, לכן פעולת השיקוף ביחס לנקודה O מעבירה את נקודה E לנקודה F. בדרך דומה מוכיחים כי מרכזי הריבועים G ו-H שיקופיים זה לזה ביחס לנקודה O. מכאן נובע, שאלכסוני המרובע EGFN חוצים זה את זה בנקודה O. לכן המרובע הוא מקבילית. מ.ש.ל

בעיה 3.4

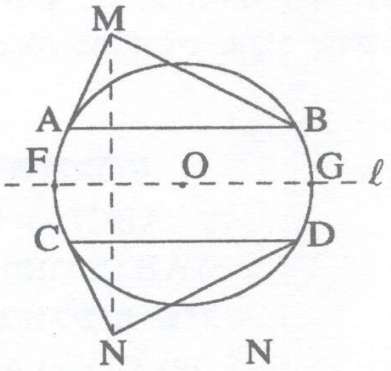
נתונים AB ו-CD, שני מיתרים שווים ומקבילים במעגל (O,R). על מיתרים אלו בנויים שני משולשים חופפים: ABM ו-CDN באופן שהנקודות O ו-M נמצאות מצדיו השונים של הישר AB וגם נקודות O ו-N נמצאות מצדיו השונים של הישר CD.

להוכיח, כי הישר MN או מאונך למיתרים AB ו-CD או עובר דרך נקודה O, וכן שהנקודה O חוצה את הקטע MN.

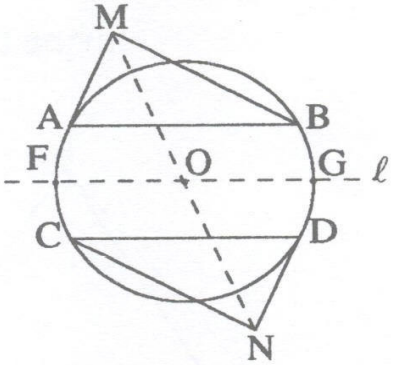
פתרון:

המיתרים AB ו-CD שיקופיים ביחס לנקודה O וגם ביחס לקוטר המעגל FG המונח על הישר ℓ המקביל ל-AB ול-CD.

נטפל בשני מקרים שונים כפי שנראים בציורים 22 א', 22 ב'.



ציור מס' 22 ב'



ציור מס' 22 א'

מקרה א'

נניח כי AM=DN (ציור 22 א'). במקרה זה, ∡BAM=∡CDN וכן ∡ABM=∡DCN. שיקוף ביחס לנקודה O מעביר את הקטע AB לקטע CD ואת המשולש ABM עובר למשולש DCN (ישר AM עובר לישר DN משום ש-∡BAM=∡CDN ו-AM=DN).

לכן נקודה M שיקופית לנקודה N ביחס לנקודה O. על-כן קטע MN עובר דרך נקודה O ו-MO=ON.

מקרה ב'

נניח, כי AM=CN (ציור 22 ב'). במקרה זה ∡BAM=∡DCN ו-∡ABM=∡CDN. המשולש ABM עובר למשולש CDN על-ידי שיקוף ביחס לישר ℓ. לכן נקודות M ו-N שיקופיות ביחס ל-ℓ. כאשר שתי נקודות שיקופיות ביחס לישר חייב להיות $MN \perp \ell$, זאת אומרת $MN \perp AB$ מ.ש.ל

הערה:

כדי שבבעיה הנ"ל יתקיימו שני התנאים יחד, דהיינו נקודה O חוצה את הקטע MN וגם $MN \perp AB$, חייב להתקיים: AM=BM=CN=DN, זאת אומרת, שדבר מחייב שמשולשים: ABM ו-CDN יהיו שווי-שוקיים.

בעיות לפתרון עצמי

בעיה 3.5

לבנות קטע AB כך שקצה A יהיה על ישר נתון, קצה B יהיה על מעגל נתון ונקודה נתונה Q תחצה את הקטע.

בעיה 3.6

מרובע ABCD הוא מקבילית. O_1 ו-O_2 הם מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABC ו-ADC בהתאמה. להוכיח כי שלושת הקטעים: BD,AC ו-O_1O_2 נחתכים בנקודה אחת.

בעיה 3.7

מרובע ABCD הוא מקבילית. P ו-Q הם המרכזי המעגלים, החוסמים את המשולשים ABC ו-ADC – בהתאמה. להוכיח, כי PB||QD וגם PD||QB.

4 . הגדרת סיבוב

על מישור נתונה נקודה O (מרכז הסיבוב). וזווית (זווית הסיבוב) לטרנספורמציה של צורה F לצורה F', כאשר כל נקודה X של F עוברת לנקודה X' של F' באופן ש-OX=OX' וגם $\measuredangle X'OX=\alpha$

<u>קוראים סיבוב בזווית α סביב ל-O</u> ומסמנים ב- $F'=R_O^{\alpha}(F),\ X'=R_O^{\alpha}(X)$

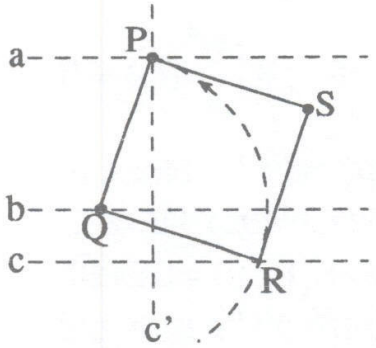
הערה: שיקוף ביחס לנקודה הוא מקרה פרטי של סיבוב בזווית של 180^0.

תכונות הסיבוב:

א. סיבוב מעביר קטע לקטע שווה.

ב. סיבוב מעביר מעגל למעגל שווה.

ג. סיבוב מעביר ישר ℓ לישר ℓ' באופן שהזווית בין ℓ ל-ℓ' היא זווית הסיבוב α.



ציור מס' 23

בעיה 4.1

לבנות ריבוע, בצורה ששלושה מקודקודיו יהיו על שלושה ישרים מקבילים a, b, ו-c נתונים.

ניתוח הבעיה:

נניח, כי PQRS הוא הריבוע המבוקש כפי שנראה בציור מס' 23. בסיבוב סביב נקודה Q בזווית של 90^0 עוברת הנקודה R ל-P והישר c עובר לישר c' המאונך ל-c והעובר דרך הנקודה P. הנקודה P היא נקודת החיתוך של a ו-c'. עם

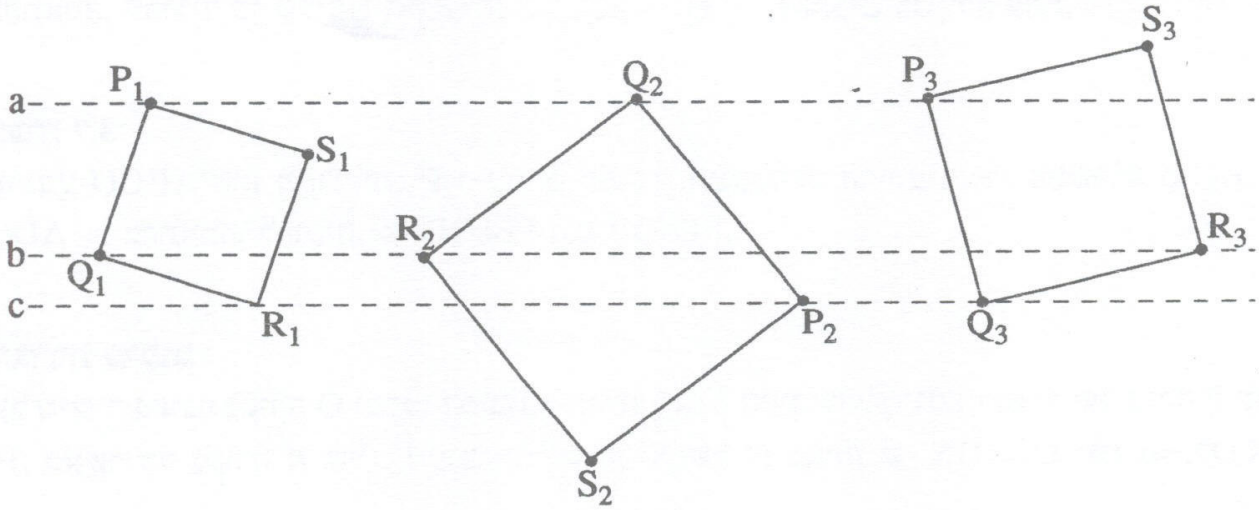
מציאת הנקודה P נקבע הקטע PQ, וזה מספיק לבניית כל הריבוע.

תיאור הבנייה:

בוחרים על ישר b נקודה Q כלשהי. מבצעים סיבוב של ישר c בזווית של 90^0 סביב הנקודה Q נסמן ב-P את נקודת החיתוך של ישר a ותמונת הישר c (ישר 'c). עם קביעת הצלע PQ בונים ריבוע.

חקירה:

לבעיה יש שלושה פתרונות שונים בהתאם לבחירת נקודה Q על כל אחד מהישרים a, b ו-c – כנראה בציור מס' 24.



ציור מס' 24

בעיה 4.2

הנקודה E היא נקודה כלשהי על צלע CD של ריבוע ABCD. חוצה הזווית BAE חותך את הצלע BC בנקודה F. להוכיח כי AE=ED+BF.

הוכחה:

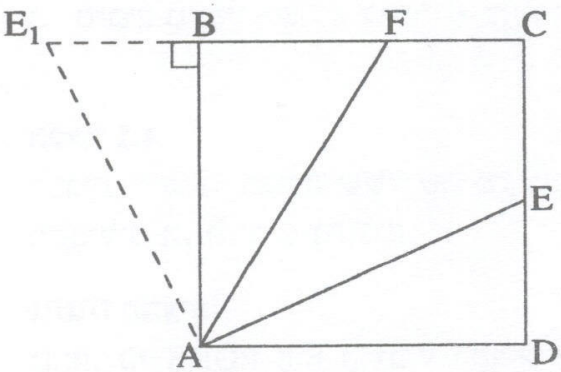
נבצע סיבוב בזווית של 90^0 סביב נקודה A. פעולת הסיבוב מעבירה את הנקודות כדלקמן:

$R_A^{90^0}(D) = B$, $R_A^{90^0}(E) = E_1$ באופן שנקודה

E_1 נמצאת על הישר BC (ציור מס' 25).

$DE=BE_1$ (פעולת הסיבוב היא איזומטרית), לכן, $E_1F=E_1B+BF=DE+BF$. היות ופעולת הסיבוב שומרת גם על הזווית, לכן, $\measuredangle E_1AB=\measuredangle EAD$. לפי הנתון $\measuredangle BAF=\measuredangle FAE$, לכן $\measuredangle E_1AF=\measuredangle FAD$.

מ-BC||AD נובע ש-$\measuredangle FAD=\measuredangle BFA$, לכן $\measuredangle E_1AF=\measuredangle E_1FA$ מסדרת השוויונים מקבלים, $AE=AE_1=E_1F=DE+BF$, מ.ש.ל.

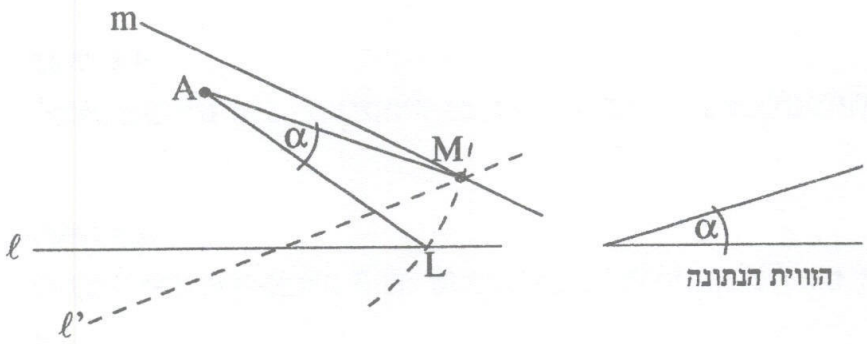


ציור מס' 25

שתי הוכחות נוספות לבעיה, האחת בעזרת טריגונומטריה, והשנייה – על סמך חוצה הזווית ושימוש בפרופורציה הוצגו במאמר קודם([2]).

בעיה 4.3

נתונים שני ישרים ℓ ו-m, נקודה A וזווית α. לבנות מעגל, שמרכזו A החותך את הישרים ℓ ו-m בנקודות L ו-M בהתאמה באופן ש- $\measuredangle LAM=\alpha$.



ציור מס' 26

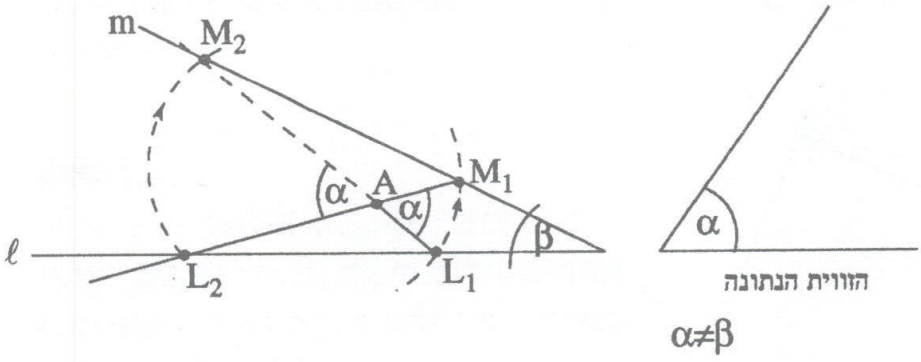
תיאור הבנייה:

נעשה סיבוב בזווית α של הישר ℓ סביב נקודה A. נסמן ב-M את נקודת החיתוך של הישרים m ו-ℓ', שהוא תמונת הישר ℓ.

מעגל (A,AM) חותך את הישר ℓ בנקודה L, שהיא המקור של הנקודה

$(R_A^{\alpha}(L)=M)M$,

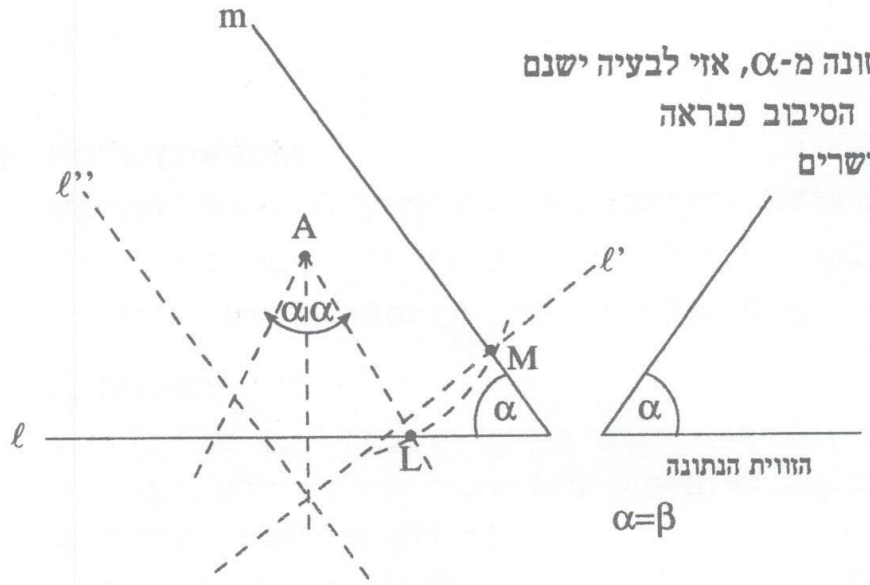
זאת אומרת, כי $\measuredangle LAM=\alpha$ – כנראה בציור מס' 26.



ציור מס' 27

חקירת הבעיה:

אם הזווית בין הישרים m ו-ℓ שונה מ-α, אזי לבעיה ישנם שני פתרונות בהתאם לכיווני הסיבוב כנראה בציור מס' 27. אם הזווית בין הישרים שווה ל-α אזי לבעיה פתרון יחיד כנראה בציור מס' 28. כאשר הזווית בין הישרים שווה ל-α וגם $\alpha=90^0$, אזי לבעיה יש שני פתרונות כאשר הנקודה A נמצאת על חוצה הזווית של הישרים ואין פתרון כשהנקודה A אינה נמצאת על חוצה הזווית.



ציור מס' 28

הערה: הישר המסובב "ℓ מקביל ל-m ועל-כן אינו חותך אותו.

בעיות לפיתרון עצמי

בעיה 4.4

לבנות משולש ש"צ, שקדקודיו נמצאים על שלושה מעגלים נתונים בעלי מרכז משותף.

בעיה 4.5

להעביר ישר דרך נקודה P כך שהקטע הנוצר מהחיתוך שלו עם שני מעגלים נתונים ייחצה בנקודה P.

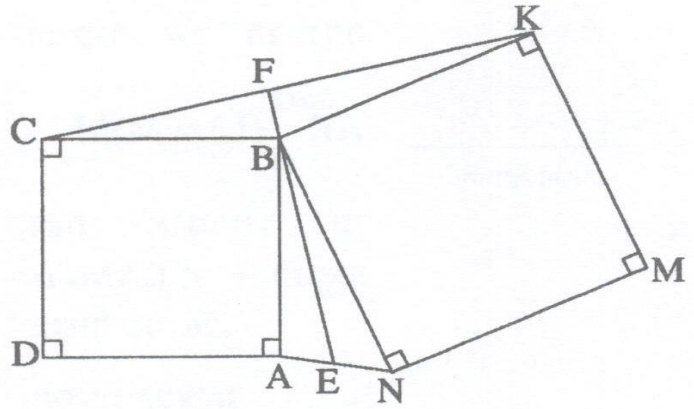
בעיה 4.6

לבנות משולש ש"צ כשנתון הקדקוד A ושני הקדקודים האחרים שלו על שני ישרים מקבילים נתונים.

בעיה 4.7

ABCD ו-BKMN הם שני ריבועים בעלי קדקוד משותף, ו-BE תיכון במשולש ABN (ציור מס' 29). להוכיח, שהמשכו של BE הוא גובה במשולש CBK.

הערה: פתרון הבעיה על-ידי שימוש בסיבוב ועל-ידי בנייה חלופית מופיע במקור[2] (בעיה מס' 3).



ציור מס' 29

5. הגדרת הומותטיה

הומותטיה עם מרכז O ומקדם $k\neq 0$ היא טרנספורמציה, המתאימה לכל נקודה X את נקודה 'X על הישר OX באופן ש- $OX' = k \cdot OX$. הנקודות X ו-'X נמצאות על אותו צד של הישר ביחס לנקודה O, כאשר $k>0$ ונמצאות משני צדי O כאשר $k<0$.

תכונות ההומותטיה

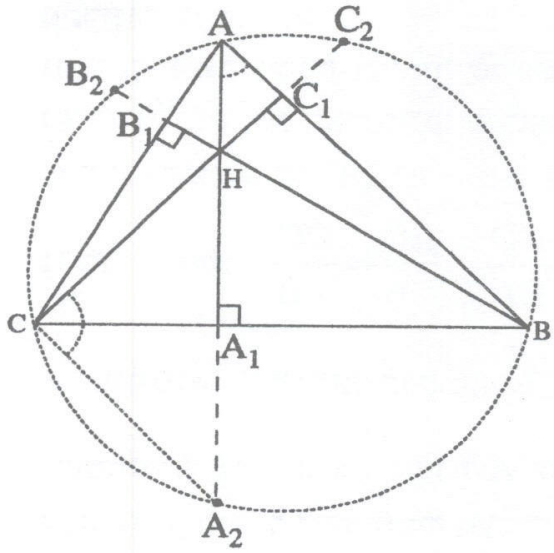
א. ההומותטיה מעבירה קטע נתון לקטע המקביל לו או לקטע הנמצא על הישר שנמצא עליו הקטע המקורי. אורכו של קטע התמונה שווה למכפלה של אורך הקטע המקורי ב-$|k|$.

ב. הומותטיה שומרת על גודל הזווית.

ג. הומותטיה מעבירה ישר לשיר מקביל (אם הוא לא עובר דרך מרכז ההומותטיה O) או לישר,

המתלכד עם הישר המקורי (אם הוא עובר דרך O).

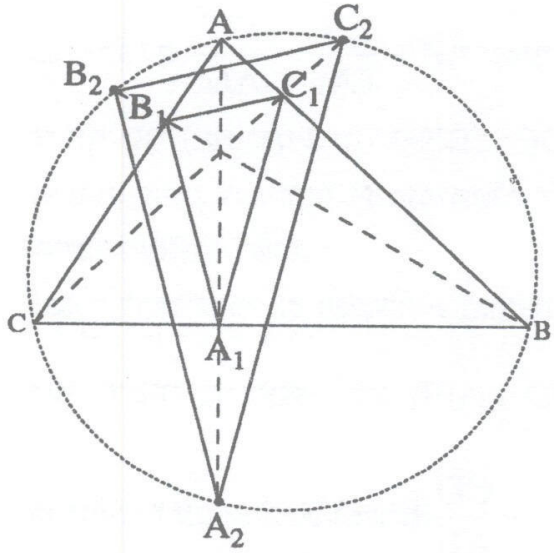
מסקנה:
הומותטיה מעבירה כל צורה לצורה הדומה לה עם מקדם הדמיון השווה ל-|k|.



ציור מס' 30

בעיה 5.1
נתונים AA_1, BB_1, CC_1 – שלושת הגבהים במשולש חד-זווית ABC. להוכיח, כי רדיוס המעגל, החוסם את המשולש $A_1B_1C_1$ הוא מחצית רדיוס המעגל, החוסם את משולש ABC (ציור מס' 30).

פתרון:
נמשיך את גבהי המשולש עד חיתוכם על המעגל בנקודות A_2, B_2, C_2. תהיה הנקודה H נקודת פגישת הגבהים. נוכח, כי $HA_2=2HA$. ממשולשים AA_1B ו-CC_1B מקבלים,



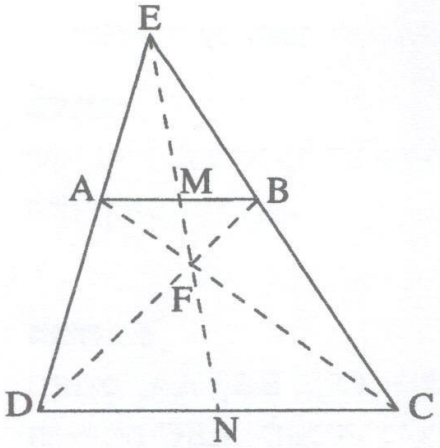
ציור מס' 31

ש- $\measuredangle C_1CB=\measuredangle BAA_1=90^0-\measuredangle ABA_1$. הזוויות $\measuredangle A_2CB=\measuredangle BAA_1$ שוות בשל היותן זוויות היקפיות, הנשענות על הקשת A_2B. מכאן נובע, ש- $\measuredangle A_2CA_1=\measuredangle HCA_1$. בהתחשב בעובדה ש- $HA_1 \perp CB$ נובע, שמשולש A_2CH הוא משולש ש"ש ו-$HA_1=A_1A_2$, כלומר, $HA_2=2HA_1$.
באותה הדרך אפשר להוכיח, כי גם $HC_2=2HC_1$ ו- $HB_2=2HB_1$. המשמעות היא, שמשולש $A_2B_2C_2$ הומותטי למשולש $A_1B_1C_1$ עם מרכז H ומקדם 2 – כמתואר בציור מס' 31.

לכן, $R_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}R_{\Delta A_2B_2C_2}=\frac{1}{2}R_{\Delta ABC}$.

הערה: כהכנה לבעיה הנ"ל – ניתן לבקש להוכיח דמיון בין שלושת המשולשים: AB_1C_1, CB_1A_1 ו-BA_1C_1 וכי הם דומים למשולש המקורי ABC.

בעיה 5.2
להוכיח, כי ישר המחבר את אמצעי בסיסי הטרפז, עובר דרך נקודת החיתוך של אלכסוניו ודרך נקודת החיתוך של המשכי שוקיו.



ציור מס' 32

פתרון:

נסמן ב-E את נקודת החיתוך של המשכי השוקיים וב-F את נקודת החיתוך של האלכסונים כנראה בציור מס' 32.

מדמיון המשולשים: $\Delta EAB \approx \Delta EDC$

נובע היחס: $\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}$, כלומר מדובר פה בהומותטיה, שמרכזה בנקודה E ועם מקדם $k=\frac{DC}{AB}$.

ההומותטיה מעבירה את נקודה A לנקודה D ואת נקודה B לנקודה C, כלומר ההומותטיה מעבירה את הבסיס העליון AB של הטרפז לבסיס התחתון של הטרפז CD.

נסמן ב-M את נקודת האמצע של הבסיס העליון AB, וב-N את התמונה שלה על הבסיס התחתון DC לאחר ביצוע ההומותטיה, ואז $\frac{EN}{EM}=k=\frac{DC}{AB}=\frac{DC}{2AM}$.

כמו-כן גם $\frac{EN}{EM}=\frac{DN}{AM}$ (יחסי קטעים במשולשים דומים).

צירוף שני הקשרים נותן ש-DC=2DN, זאת אומרת שהנקודה N היא האמצע של הבסיס DC.

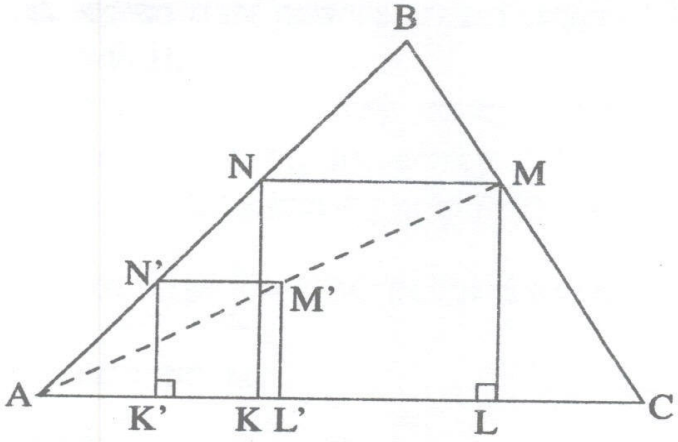
(הערה: היות והנקודה N הומותטית לנקודה M עם מרכז הומותטיה E, אז הנקודות N, M ו-E שייכות לאותו ישר).

נשאר להוכיח כי גם הנקודה F נמצאת על הישר EN.

לפי הדמיון בין המשולשים AFB ו-CFD ניתן לרשום את יחס הדמיון $\frac{FC}{FA}=\frac{FD}{FB}=\frac{CD}{AB}$. לכן הומותטיה עם מרכז F ומקדם $k'=-\frac{CD}{AB}$ מעבירה את הנקודה A לנקודה C ואת נקודה B לנקודה D. זאת אומרת, כי הבסיס AB הועבר בפעולת ההומותטיה לבסיס CD באותה הדרך, שהוצגה על העברת הנקודה M לנקודה N על-ידי מרכז ההומותטיה E, אפשר להראות, שהנקודה M עוברת לנקודה N על-ידי פעולת הומותטיה שמרכזה F. לכן הנקודות N,M ו-F נמצאות על ישר אחד.

מצירוף שני חלקי ההוכחה נובע, שהנקודות E,M,F,N נמצאות על ישר אחד. מ.ש.ל.

פתרון הבעיה בעזרת גיאומטריה קלאסית (תיכונית) ארוכה יותר בהשוואה להוכחה על-ידי שימוש בהומותטיה.



ציור מס' 33

בעיה 5.3.

לחסום במשולש ABC כלשהו ריבוע באופן ששניים מקדקודיו נמצאים על הבסיס AC ושני האחרים על הצלעות האחרות (ציור מס' 33).

ניתוח הבעיה:

נניח, כי הבעיה פתורה, ו-KLMN הוא הריבוע המבוקש כנראה בציור מס' 33. נבצע הומותטיה ממרכז A ומקדם שרירותי $0<k<1$. כל ישר, שעובר דרך מרכז ההומותטיה, עובר לעצמו, ולכן ריבוע KLMN יעבור לריבוע K'L'M'N', באופן שהנקודות K' ו-L' נשארות על הישר AC, נקודה N' על הישר AB ונקודה M' על הישר AM. על-סמך נקודה N', שנמצאת על הצלע AB, ניתן לבנות את הריבוע K'L'M'N'. מהעובדה, כי M היא נקודת החיתוך של קרן AM' עם הצלע BC, נובע תיאור הבנייה.

תיאור הבנייה:

בוחרים נקודה שרירותית N' על הצלע AB. מורידים ממנה אנך N'K' לבסיס AC. על הקטע N'K' בונים ריבוע K'L'M'N'. דרך הנקודות A ו-M' נעביר ישר, שהמשכו חותך את BC בנקודה M. בונים MN||AC ומורידים מהנקודות M ו-N אנכים לבסיס, ומתקבל הריבוע המבוקש.

הוכחה

נוכיח, כי KLMN הוא ריבוע. במהלך הבנייה ביצענו פעולה הומותטיה עם מרכז A ומקדם $k = \frac{AM}{AM'}$. לפי תכונות ההומותטיה, הריבוע K'L'M'N' עובר לצורה דומה לו, זאת אומרת לריבוע KLMN.

חקירה:

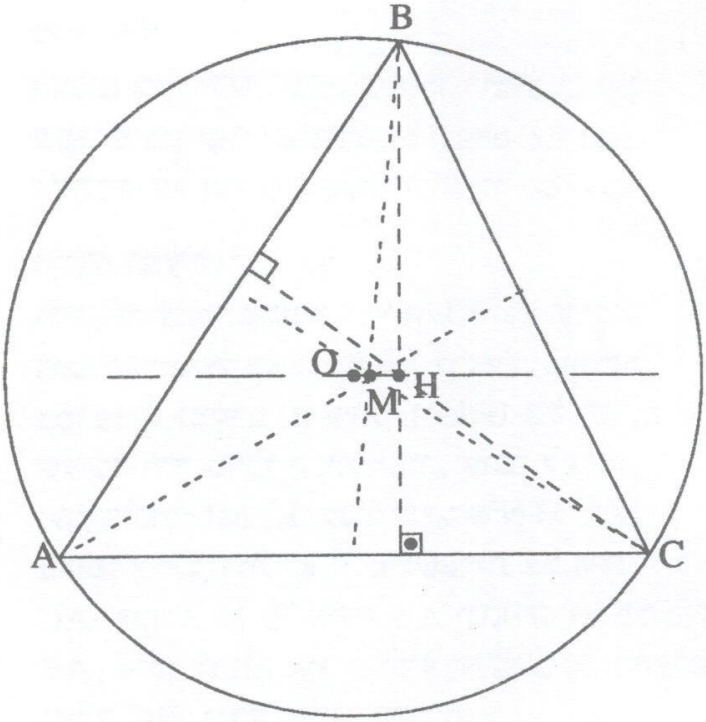
לבעיה יש פתרון יחיד כאשר $\measuredangle A \le 90^0$ וגם $\measuredangle C \le 90^0$ (להוציא את המקרה הבלתי אפשרי $\measuredangle A=\measuredangle C=90^0$). אם אחת מהזוויות A או C קהה, אז לבעיה אין פתרון.

בעיה 5.4

נתון משולש ABC.

להוכיח:

א. שלושת תיכוני המשולש נפגשים בנקודה אחת M, שמחלקת אותם לשני קטעים, המתיחסים זה לזה ביחס 2:1.



ציור מס' 34

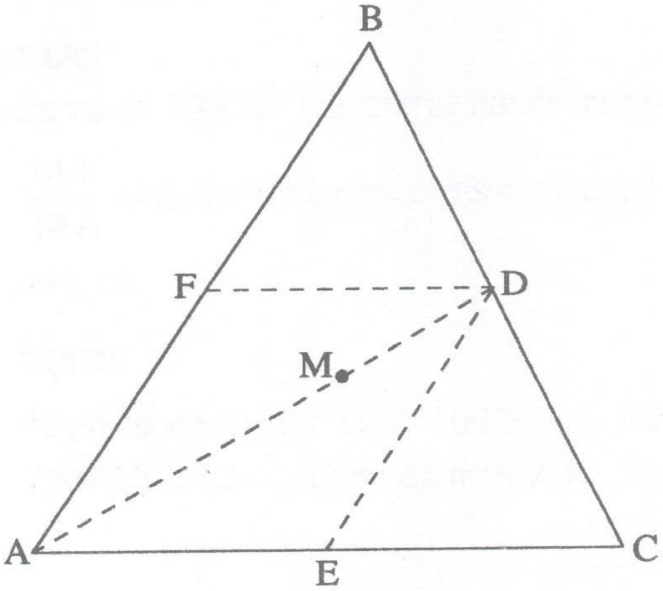
ב. שלושת גובהי המשולש נפגשים בנקודה אחת H.

ג. הישר MH עובר דרך המרכז O של המעגל, החוסם את משולש ABC, הנקודה M נמצאת בין הנקודות O ו-H וגם $MO=\frac{1}{2}MH$ הבעיה מתוארת בציור מס' 34.

הוכחה:

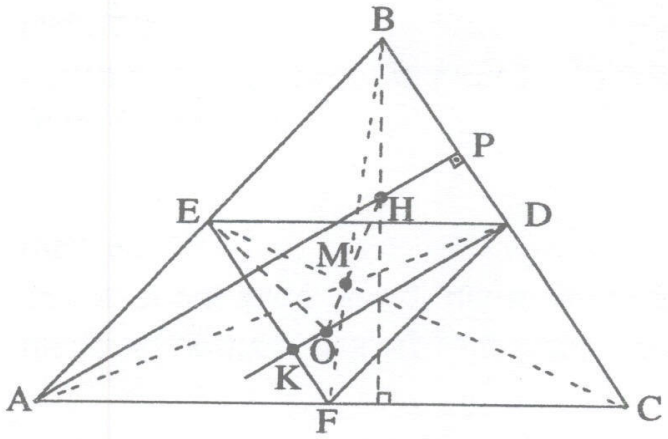
סעיף א': נעביר את התיכון AD, ונסמן ב-M את הנקודה, המחלקת את התיכון D ביחס AM:MD=2:1, כפי שנראה בציור מס' 35.

הומותטיה עם מרכז M ומקדם $k=-\frac{1}{2}$ מעבירה את נקודה A לנקודה D, ואת קטע AB לקטע מקביל, שאורכו מחצית מ-AB, זאת אומרת, כי התמונה של AB – אחרי ביצוע ההומותטיה הנ"ל – היא קטע האמצעים DE. מכאן נובע, שההומותטיה מעבירה את הקדקוד B לנקודה E, שהיא אמצע הצלע AC. לכן נקודה M נמצאת על התיכון BE לצלע AC ו-BM:ME=2:1. באותו אופן ההומותטיה מעבירה את הצלע AC לקטע האמצעים DF, ולכן הנקודה M נמצאת על התיכון CF ומחלקת אותו ביחס CM:MF=2:1, כלומר שלושת התיכונים עוברים דרך הנקודה M, המחלקת כל אחד מהם ביחס 2:1.



ציור מס' 35

סעיף ב': ראינו בסעיף הקודם, כי הומותטיה עם המרכז M ומקדם $k=-\frac{1}{2}$ מעבירה את משולש ABC למשולש DEF, שצלעותיו הן קטעים אמצעיים של משולש ABC (ציור מס' 36). הגובה AP של המשולש ABC עובר על-ידי ההומותטיה לקטע, העובר דרך הנקודה D ומקביל ל-AP (תכונה א' של ההומותטיה), זאת אומרת

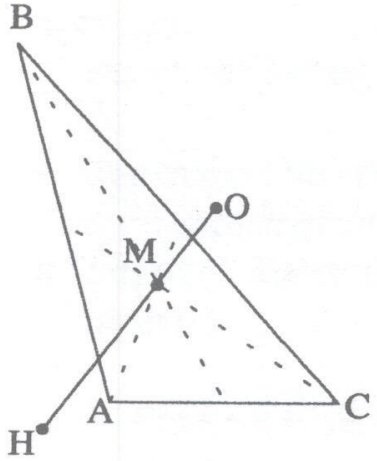


ציור מס' 36

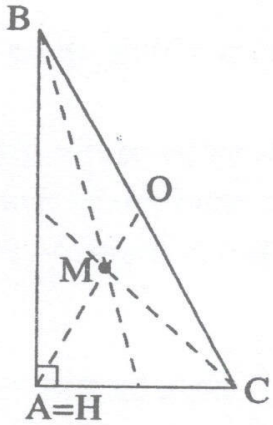
לקטע DK, המאונך לצלע BC והעובר דרך הנקודה D – נקודת האמצע של הצלע BC (ציור מס' 36). המשמעות היא, שמרכז המעגל החוסם את המשולש ABC, נמצא על הישר DK (מרכז מעגל – מפגש אנכים אמצעיים). נסמן ב-H את המקור של הנקודה O לפעולת ההומותטיה. נזכיר, כי הקטע DK הוא התמונה של הקטע AP, שהתקבלה בהומותטיה. היות והתמונה DK עוברת דרך הנקודה O, אז המקור AP עובר דרך הנקודה H (המקור של O).

באותה הדרך אפשר להוכיח, כי גם הגבהים האחרים של המשולש ABC (או המשכיהם) עוברים דרך H. לכן הנקודה H היא נקודת החיתוך של גובהי המשולש ABC.

סעיף ג': הוכחת הטענה נובעת מיידית מהעובדה כי בפעולת הומותטיה עם מרכז M ומקדם $k = -\frac{1}{2}$ הנקודה H עוברת ל-O, מ.ש.ל.



ציור מס' 37 ב'



ציור מס' 37 א'

הערה מס' 1: הבעיה (משפט מוכר בהנדסת המישור) מתאימה לכל סוגי המשולשים חד-זווית כנראה בציור מס' 36, וישר זווית וקהה זווית – כנראה בציור מס' 37 א'-ב'.

הערה מס' 2: הישר OMH נקרא בשם הישר של **אוילר**.

בעיות לפיתרון עצמי

בעיה 5.5

נתונה זווית ABC ונקודה M בתוכה. לבנות מעגל, המשיק לשוקי הזווית ועובר דרך נקודה M (כמה פתרונות לבעיה?).

בעיה 5.6

למצוא את המקום הגאומטרי של כל אמצעי המיתרים במעגל, היוצאים מנקודה אחת שעליו.

בעיה 5.7

נתונים זווית ABC ומעגל שרדיוסו R. לבנות בתוך הזווית מעגל באופן שהוא ישיק לשוקי הזווית ולמעגל הנתון.

בעיה 5.8

נתון ש-R הוא רדיוס המעגל, החוסם את המשולש ABC. לבטא באמצעות R את רדיוס המעגל, החוסם את המשולש, שקדקודיו הם אמצעי התיכונים של משולש ABC.

6. שילוב של טרנספורמציות

ניתן לצרף יחד מספר סוגים של טרנספורמציות.

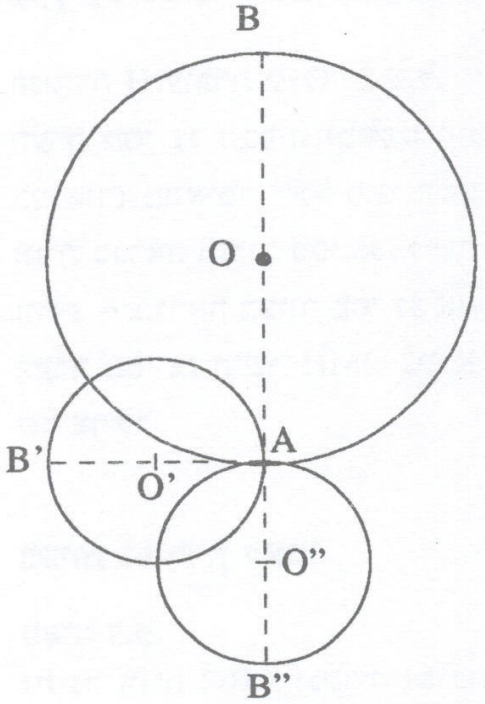
התרגילים שלהלן יעסקו בשילוב של הומותטיה וסיבוב סביב נקודה. נכנה את הטרנספורמציה המשולבת בשם "סיבוב מרכז-דמיוני".

נתון מרכז O, זווית α ומקדם דמיון k. סדר הפעולות אינו משנה (הומותטיה וסיבוב או סיבוב והומותטיה).

אפשר לראות, כי התוצאות של הטרנספורמציה המשולבת הן כדלקמן:

* מעבירה ישר ℓ לישר ℓ' באופן שהזווית ביניהם שווה ל-α.
* מעבירה מעגל עם רדיוס R למעגל עם רדיוס $k \cdot R$.

נדגים טרנספורמציות כאלה על-ידי מספר דוגמאות:



ציור מס' 38

א. נתון מעגל, שמרכזו O ועליו נקודות A ו-B בשני קצות הקוטר:

1. מבצעים סיבוב מרכז-דמיוני עם מקדם $k=\frac{1}{2}$, זווית $\alpha=90^0$ ומרכז הסיבוב A.

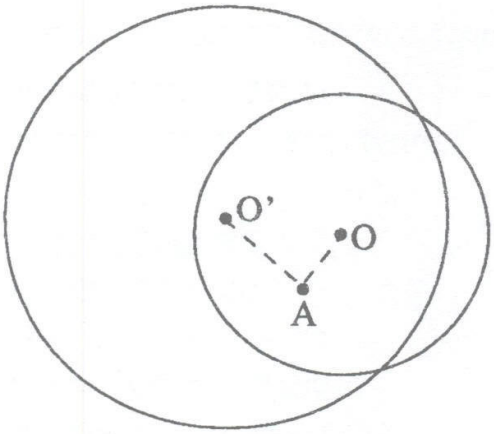
2. נבצע סיבוב מרכז-דמיוני עם מקדם $k=\frac{1}{2}$, זווית $\alpha=180^0$ ומרכז A.

התוצאות נראות בציור מס' 38.

בטרנספורמציה 1 הנקודה B עברה לנקודה 'B. בטרנספורמציה 2 הנקודה B עברה להנקודה "B.

הטרנספורמציה 2 שקולה להומותטיה עם מקדם $k=-\frac{1}{2}$.

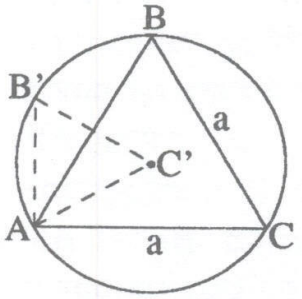
ב. נתון מעגל שמרכזו O. סביב נקודה A, הנמצאת בתוך המעגל, נבצע הומותטיה עם מקדם k=1.5



ציור מס' 39

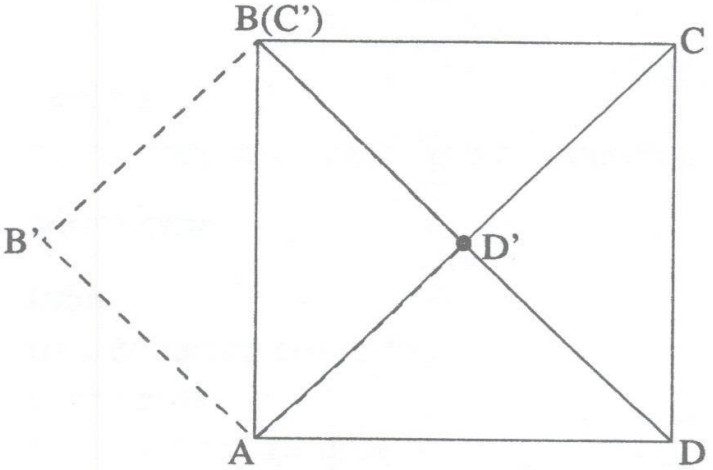
וסיבוב בזווית $\alpha=75^0$ – כנראה בציור מס' 39.
תמונת הטרנספורמציה היא מעגל שמרכזו 'O ורדיוסו פי 1.5 מהרדיוס של המעגל המקורי.
מובן ש-$\measuredangle O'AO=75^0$.

ג. נתון משולש ש"צ בעל צלע a. נבצע טרנספורמציה משולבת: הומותטיה עם מקדם $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($-\frac{a}{\sqrt{3}}$ הוא רדיוס המעגל החוסם) ומרכז A וסיבוב של 30^0 – כנראה בציור מס' 40 (הנקודה A נשארת במקומה). הנקודה C עברה לנקודה 'C (מרכז המעגל החוסם את משולש ABC), והנקודה B עברה לנקודה 'B, הנמצאת על המעגל החוסם. $\Delta AB'C'$ – משולש ש"צ.



ציור מס' 40

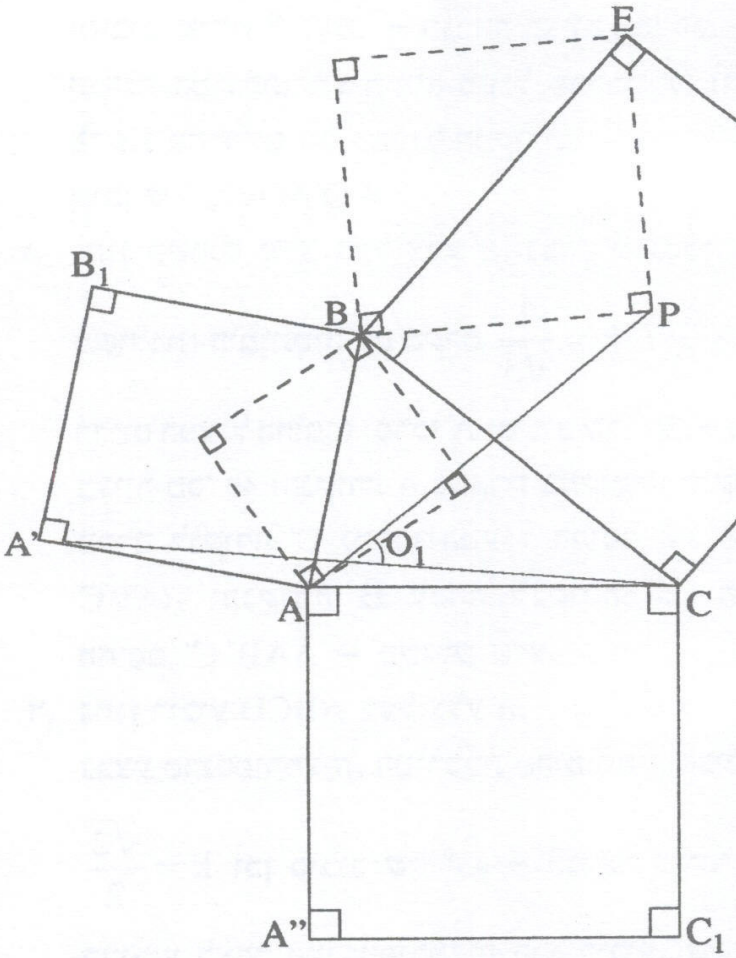
ד. נתון ריבוע ABCD בעל צלע a.
נבצע טרנספורמציה, המורכבת מהומותטיה סביב קדקוד A ועם מקדם $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ וכן סיבוב של 45^0 – כנראה בציור מס' 41. התמונה של הריבוע לאחר הטרנספורמציה הוא ריבוע, ששתיים מצלעותיו נמצאות על אלכסוני הריבוע המקורי.



ציור מס' 41

בעיה 6.1
נתון משולש ABC שעל צלעותיו בונים, כלפי חוץ, שלושה ריבועים ABB_1A', ACC_1A'' ו-BCDE. נסמן את מרכזו של הריבוע BCDE ב-P.
להוכיח, כי הישרים 'A'C, "A'B ו-PA עוברים בנקודה אחת – כנראה בציור מס' 42 (הבעיה ופתרונה ממקור מס' 4).

פתרון הבעיה:
נתבונן בריבועים הבאים בלבד:
ABB_1A' ו-BCDE. נפעיל עליהם את הטרנספורמציה הבאה:
הומותטיה עם מקדם $\frac{\sqrt{2}}{2}$ וסיבוב סביב הנקודה B ב-45^0. כתוצאה ממנה הנקודה "A תועבר



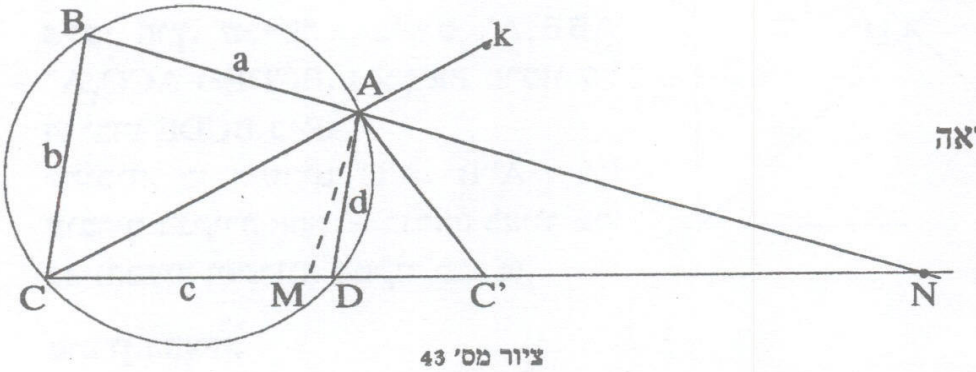
ציור מס' 42

לנקודה A, והנקודה C תועבר לנקודה P – כנראה בציור מס' 42.
פעולת הטרנספורמציה העתיקה את הקטע A'C לקטע AP.
מכאן נובע, כי הזווית בין הקטעים הללו שווה ל- 45^0. נסמן את נקודת החיתוך של שני הקטעים הללו ב-O_1. הזוויות $\measuredangle CO_1P$ ו-$\measuredangle CBP$ שוות ביניהן, כי הן שוות ל45^0, לכן המרובע BO_1CP חסום במעגל. במילים אחרות, המעגל, החוסם את משולש BCP חותך את הישר AP בנקודה O_1.
נתבונן כעת ב-O_2, שהיא נקודת החיתוך של AP ו-"BA. מאותם השיקולים, המעגל, החוסם את המשולש BCP, חותך את הישר AP בנקודה O_2. מכאן נובע, כי הנקודות O_1 ו-O_2 מתלכדות, כלומר הישרים A'C', AP ו-A"B עוברים דרך אותה נקודה. מ.ש.ל.

בעיה 6.2

לבנות מרובע חסום במעגל לפי אורך צלעותיו: AB=a, BC=b, CD=c ו-DA=d.

פתרון הבעיה:



ציור מס' 43

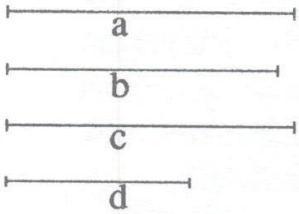
ניתוח

נניח, כי המרובע בנוי, כנראה בציור מס' 43.
נבצע הומותטיה עם מרכז A, מקדם דימיון $k=\frac{d}{a}$, ונבצע סיבוב בזווית $\measuredangle BAD$. הטרנספורמציה מעבירה את משולש ΔABC למשולש $\Delta ADC'$. הנקודה C' נמצאת על המשך הישר CD, משום ש- $\measuredangle ADC+\measuredangle ABC=180^0$ (מרובע חסום), וכן $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC'$ בשל פעולת הטרנספורמציה.

במשולש – $\Delta ACC'$, אורכי הקטעים כדלקמן: $CD = c$, $DC' = b \cdot \frac{d}{a}$, $DA=d$ והיחס $\frac{AC'}{AC} = \frac{d}{a}$, ולכן אפשר לבנות אותו.

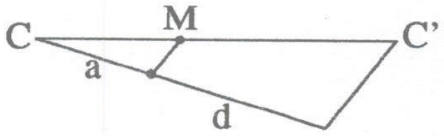
תיאור הבנייה:

נפרט תחילה את שלבי הבנייה של $\Delta ACC'$:

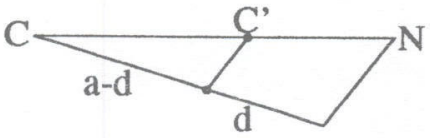


על ישר בונים את הקטע CD, ובהמשכו – את הקטע DC'. הנקודה A נמצאת על מעגל, שמרכזו D ורדיוסו d. כדי למצוא עוד מקום גיאומטרי, שאליו שייכת הנקודה A, נשתמש בשיקולים הבאים: נבצע בניית עזר AM – חוצה זווית פנימית של משולש ACC' (כנ"ל AN – חוצה זווית חיצונית של אותו משולש).

היות ו-AM הוא חוצה הזווית $\measuredangle CAC'$, אז $\frac{C'M}{MC} = \frac{AC'}{AC} = \frac{d}{a}$ וניתן לבנות את נקודה M על-פי חלוקת קטע ביחס נתון.



באותו אופן – היות ו-AN הוא חוצה-הזווית החיצונית $\measuredangle KAC'$ של המשולש $\Delta ACC'$, אז קיים היחס $\frac{C'N}{CN} = \frac{AC'}{AC} = \frac{d}{a}$ וניתן לבנות את הנקודה N.



לפי שהזווית בין שני חוצי זוויות צמודות היא 90^0 ($\measuredangle MAN = 90^0$), הרי הנקודה A נמצאת על היקף המעגל, שהקטע MN הוא הקוטר שלו. הנקודה A היא החיתוך של שני המעגלים הללו.

אחרי שבנינו את המשולש $\Delta ACC'$ (למעשה, את משולש ΔADC), בונים על הקטע AC את המשולש ΔABC על-ידי בניית הצלעות: $CB=b, AB=a$. המרובע ABCD שהתקבל הוא המרובע המבוקש.

חקירת הבעיה:

אם לבעיה יש פתרון אז הוא פתרון יחיד. לא תמיד ניתן לבנות מרובע על סמך צלעות נתונות. למשל, אם צלע אחת גדולה מסכום שלוש הצלעות האחרות.

בעיה 6.3. – לפתרון עצמי

לבנות מרובע ABCD לפי אורכי צלעותיו: AD=d, DC=c, BC=b, AB=a ולפי סכום 2 זוויות נגדיות.

הערה: הבעיה הקודמת היא מקרה פרטי של הבעיה, כאשר סכום הזוויות הנגדיות שווה ל-180^0.

מראי מקומות

1. אבירי, ח' (1972). **מבחר בעיות בהנדסה לבגרות.** רביב.
2. סטופל, מ', מוגילבסקי, ר' (תש"ס). משימות הוכחה בהנדסה המתבססות על בנייה חילופית, **שאנן ה', שנתון המכללה הדתית לחינוך.** חיפה. עמ' 184-185.
3. האוניברסיטה הפתוחה (1976). **אשנב למתמטיקה – יחידה 7: איזומטריות.** רמת אביב.
4. **אתגר – גליונות למתמטיקה, 44,** ניסן – תשנ"ח, חיפה, טכניון – הפקולטה למתמטיקה, עמ' 29, 31.
5. Argunov, B., Balk, M. (1955). **Geometrical Buildings on the Plane,**Moskva (in Russian).
6. Boltjansky, V., Jaglom, J. (1964). **Transformations Vectors.** Moskva (in Russian).
7. Sarantsev, G. (1979). **Methods of Teaching Geometrical Transformations at School.** Moskva (in Russian).