משה סטופל, לאה אוקסמן

מספרים ראשוניים המופיעים במשימות ובבעיות מתמטיקה

מבוא

המספרים הראשוניים בשל היותם ייחודיים (בלתי פריקים) הם בעלי חשיבות רבה בפתרון משימות ובעיות מתמטיות שונות. המתעניין בנושא או המבקש להתמודד עם תרגילים שהמרכיב המרכזי בהם הוא המספר הראשוני, נאלץ לעיין או ללקט אותם ממקורות רבים, וזאת משום שבספרי המתמטיקה, אין פרק מיוחד, בעל היקף רחב, הדן בנושא על כל צדדיו. המאמר הנוכחי פותח בהגדרת המספרים הראשוניים וקביעתם בנוסחאות שונות המנפיקות מספרים ראשוניים: בפירוק מספר למכפלות של מספרים ראשוניים, במספרי **מֶרְסֶן**, במספרים "מושלמים" ובמספרים "ידידותיים"[1-6].

בהמשך מובא לקט מגוון ומרוכז של 18 משימות מתמטיות הקשורות למספרים הראשוניים. לכל משימה מובא פתרון מלא (חוץ מהמשימה האחרונה שיש בה משימות לפתרון עצמי), כולל ציטוט משפטים הקשורים למספרים ראשוניים, שבדרך כלל אינם מוכרים לתלמידים. כל המשימות מתאימות לתלמידים בחינוך העל-יסודי (בעיקר בחטיבה העליונה שלו), ובהן משימות המתאימות לתלמידים בבית הספר היסודי, המכירים את המושג **מספר ראשוני.**

המספרים הראשוניים וקביעתם

המספרים הראשוניים מהווים קבוצה ייחודית בקרב המספרים הטבעיים. בשל חשיבותם הם נחקרו רבות על-ידי המתמטיקאים הקדמונים ואף בימינו אנו, הם מעוררים עניין רב ומהווים מרכיב חשוב בדרך המכשולים לפתרון בעיות מתמטיות שונות.

כל מספר טבעי – פרט למספר 1 – מתחלק לפחות בשני מספרים טבעיים ללא שארית, דהיינו ב-1 ובעצמו. אותם המספרים, המתחלקים ללא שארית רק בשני המספרים הנ"ל נקראים המספרים הראשוניים. המספרים הראשוניים לפי סדר עולה הם: 2, 3, 5, 7, 11, 13 (המספר 1 אינו כלול בקבוצת המספרים הראשוניים). המספר 2 הוא המספר הראשוני היחיד שהוא זוגי, כי לשאר המספרים הזוגיים יש יותר מאשר שני מחלקים.

לקביעת המספרים הראשוניים נהוג להשתמש בנפה של **ארטוסטנס** (איש מדע ומתמטיקה

תארנים: *מספרים טבעיים; מספרים ראשוניים; מספרי מרסן; משפט פרמה.*

מיוון שחי במאה השלישית לפני הספירה). רושמים את כל המספרים הטבעיים העוקבים החל מ-2 ונניח עד ל-46 כפי שנראה באיור מס' 1.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, ...

איור מס' 1

מתחילים במספר 2 ומקיפים אותו בעיגול ומוחקים את כל המספרים שברשימה שהם כפולה שלו. לאחר מכן מקיפים בעיגול את המספר 3 ומוחקים את כל המספרים שבהמשך הרשימה שהם הכפולה שלו. מאחר שהמספר 4 כבר נמחק, מקיפים בעיגול את המספר 5 ומוחקים את כל הכפולות שלו (שטרם נמחקו). באותו אופן ממשיכים עם המספר 7 וכך הלאה מוחקים את כל המספרים הלא ראשוניים (מספרים פריקים).

המספרים שנותרו מוקפים בעיגול, הם המספרים הראשוניים, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

בעזרת שיטה זו נקבעו המספרים הראשוניים עד ל-10 מיליון. בעידן שלנו, בעזרת תוכנת מחשב פשוטה ניתן לקבוע במהירות עצומה אם מספר הוא ראשוני (כדי לקבוע אם מספר אי-זוגי הוא ראשוני מספיק לבדוק את שארית חלוקתו במספרים אי-זוגיים עד לשורש המספר (למה?).)

במהלך התפתחות המתמטיקה, החל מזמנים קדמוניים, מתמטיקאים דגולים חיפשו נוסחאות אלגבריות ליצירת כל המספרים הראשוניים ולא הצליחו עד היום. בדורות השונים הם פתרו כמה בעיות חלקיות וגם ניסחו כמה טענות שעד היום לא הוכחו או נסתרו.

הוצגו נוסחאות אלגבריות אחדות ליצירה חלקית של מספרים ראשוניים[1], כגון:

פרמה, מתמטיקאי מפורסם, שחי במאה ה-17, הציג את הנוסחה $2^{2^n}+1$ כמאפשרת קבלת מספרים ראשוניים, עד אשר **אוילר**, בשנת 1732, הוכיח שהמספר $2^{2^5}+1$, איננו ראשוני.

מֶרְסֶן, מתמטיקאי שחי במאה ה-17, פרסם שורה ארוכה של מספרים ראשוניים לפי התבנית של 2^n-1 והם מספרים הנקראים על שמו. התנאי ההכרחי לקבל מספר מרסן הוא ש-n עצמו יהיה ראשוני, אך תנאי זה אינו מספיק ויש לבדוק שאכן המספר שהתקבל ראשוני. למשל, עבור n=11, $2^{11}-1=2047$ שהוא כפולה של 23x89.

הוצעו נוסחאות אחרות לקבלת מספרים ראשוניים, כגון:

1. n^2-n+41, נוסחה הנותנת מספרים ראשוניים עבור כל n=1, 2.., 40, אבל אם נציב n=41 נקבל מספר פריק ועל כן נוסחה זו אינה כללית.
2. $n^2-7n+1601$, נוסחה טובה לקבלת מספרים ראשוניים עבור המספרים n=1, 2, 3...,79, אך הצבה של n=80 נותנת מספר פריק.

גם בנוסחאות נוספות, חלקן ארוכות מאוד, אין עדיין ודאות שאכן הן מתאימות לכל המקרים

ושלא יסתננו דרכן מספרים פריקים.

בהקשר למספרים ראשוניים ראוי להביא את השערת **גולדבך** – כל מספר זוגי יכול להירשם כסכום של שני מספרים ראשוניים, כפי שמוצג בדוגמאות הבאות:

13+17 =30 ,31+37=68 ,17+53=70

לעובדה הנ"ל לא הובאה עד כה הוכחה, אך גם לא הצליחו להפריך אותה, ועל כן היא בגדר השערה.

בהקשר להשערת גולדבך, ראוי לציין, שלמספר זוגי מסוים ניתן להביא יותר מהצגה אחת:

5+31=36 ,7+29=36 ,13+23=36 ,17+19=36

כל מספר פריק ניתן לכתוב אותו כמכפלה של מספרים ראשוניים עם מעריכים טבעיים.

$N = a^{\ell} \cdot b^{m} \cdot c^{n}$ (פירוק המספר לגורמים אינו בהכרח לשלושה גורמים ראשוניים, ושלושת הגורמים הובאו כדוגמה בלבד).

(a ,b ,c – מספרים ראשוניים ו-n, m, ℓ מספרים טבעיים).

כל מחלק של מספר N צורתו $a^{x} \cdot b^{y} \cdot c^{z}$ כאשר:

$$0 \le x \le \ell, \qquad 0 \le y \le m, \qquad 0 \le z \le n$$

מספר המחלקים של מספר פריק (כולל 1 והמספר עצמו) מתקבל על-ידי הנוסחה:

$$M = (\ell + 1) \cdot (m + 1) \cdot (n + 1)$$

נראה בהמשך שימוש לנוסחה זו.

משפט מרכזי הקשור למספרים הראשוניים הוא כדלקמן: לכל מספר טבעי, n>1, קיים פירוק יחיד ל"גורמים ראשוניים". המשמעות היא, אם למספר טבעי n ישנם שני פירוקים שונים לגורמים ראשוניים, הרי שהם שונים רק בסדר של אותם הגורמים (תכונת חילופיות הכפל).

פירוק מספר טבעי לגורמיו הראשוניים מאפשר למצוא את כל מחלקיו של המספר. כשידועים המחלקים ניתן לבדוק האם המספר הטבעי הוא מספר **"מושלם"** (במקור מספר 2 נקרא "משוכלל").

מספר "מושלם" הוא מספר השווה לסכום כל מחלקיו פרט לו עצמו.

דוגמאות למספרים מושלמים: 6 (כי סכום מחלקיו פרט לעצמו הוא 6=3+2+1), 28, 496, 8,128, 33,550,336. ראוי לציין, שלא נמצאו מספרים מושלמים אי-זוגיים.

בנוסף לכך, כשידועים המחלקים של זוג מספרים ניתן לקבוע אם קיימת ביניהם "ידידות". שני מספרים טבעיים, שכל אחד מהם שווה לסכום מחלקיו של רעהו, פרט למספר עצמו, נקראים **מספרים ידידותיים**.

המספרים 220 ו-284 הם ידידותיים לפי הפירוק שלהלן:

מחלקי 220 הם: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220

ואכן, 1+2+4+5+10+11+22+44+55+110=284

מחלקי 284 הם: 1, 2, 4, 71, 142, 284

ואכן, 1+2+4+71+142=220

בהקשר למספרים הידידותיים קיים משפט של **דקרט**:

"כל שני מספרים: M ו-N שתבניותיהם הן: $M = 2^n \cdot a, \quad N = 2^n \cdot b \cdot c,$

בתנאי ש- $a = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1, \qquad b = 3 \cdot 2^n - 1, \qquad c = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$

שבהם n הוא מספר טבעי גדול מ-1, ו-a ,b ,c מספרים ראשוניים, M ו-N מספרים ידידותיים".

המספרים: 18,416 ו-17,296 גם הם מספרים ידידותיים.

כמשימה ניתן לתת את המספר 1210, ולבקש למצוא את בן זוגו ולאחר מכן לבדוק שאכן שני המספרים הם מספרים ידידותיים.

משימה 1 – מציאת סדרות חשבוניות של מספרים ראשוניים

כפי שהוסבר במבוא, בעזרת נפה המבוססת על סדרות חשבוניות שאיברן הראשון הוא מספר ראשוני והפרשן כגודל האיבר הראשון, מוחקים את המספרים שאינם ראשוניים.

לאחר שנקבעו המספרים הראשוניים יש למצוא סדרות חשבוניות המורכבות ממספרים ראשוניים בלבד.

להלן קבוצה של סדרות כאלה:

		d	n
1.	3, 5, 7	2	3
2.	3, 7, 11	4	3
3.	5, 11,17, 23, 29	6	5
4.	7, 13, 19,	6	3
5.	31, 37, 43	6	3
6.	41, 47, 53, 59	6	4
7.	61, 67, 73, 79	6	4
8.	3, 11, 19	8	3
9.	5, 17, 29, 41, 53	12	5
10.	7, 19, 31, 43	12	4
11.	5, 23, 41, 59	18	4
12.	3, 23, 43	20	3
13.	13, 43, 73, 103	30	4
14.	11, 101, 191, 281	90	4

כמובן שקיימות סדרות רבות נוספות. נתייחס לנקודות שונות המאפיינות את הסדרות שהובאו לעיל.

* אין שום סדרה חשבונית המתחילה במספר 2. הסיבה לכך, שבסדרה כזו האיבר הבא יהיה אי-זוגי ולכן האיבר השלישי יהיה זוגי (אי-זוגי+אי-זוגי), דבר בלתי אפשרי, מפני שהמספר 2 הוא המספר הראשוני היחיד שהוא זוגי.
* מבין הסדרות שהוצגו רק סדרה מס' 1 היא סדרה של מספרים ראשוניים עוקבים, אך קיימות סדרות נוספות

מסוג זה, כגון:

59, 53, 47 151, 157, 163

* הפרשי הסדרות הם תמיד מספר זוגי, וזאת בתנאי שכל המספרים הראשוניים (פרט למספר 2) מספרים אי-זוגיים (זוגי= אי-זוגי+אי-זוגי).
* קיימות סדרות חשבוניות שונות בעלות אותו הפרש (למשל סדרות 7-3 שהוצגו).
* בכל הסדרות שהובאו המספר המרבי של איברים הוא 5. האם קיימות סדרות ארוכות יותר? כן, למשל, הסדרה 311, 251, 191, 134, 71, 11 שהפרשה 60 ויש בה 6 איברים.
* האם קבוצה של מספרים ראשוניים יכולה להיות סדרה הנדסית?

כדי לקבל סדרה הנדסית דרושה שלישייה של מספרים ראשוניים n_3, n_2, n_1 המקיימים את הקשר $n_2^2 = n_1 \cdot n_3$. מאחר ש-n_1 n_2 ו-n_3 הם שלישייה של מספרים זרים זה לזה (כל אחד מהם מתחלק רק ב-1 ובעצמו), השוויון הנ"ל בלתי אפשרי ולא ניתן למצוא שלישייה של מספרים ראשוניים שיהוו סדרה הנדסית.

המשימה הנ"ל יכולה לשמש להטמעת המושג סדרה חשבונית תוך הכרת המספרים הראשוניים.

משימה 2 – חלוקה לזוגות שסכומם מספר ראשוני

יש לחלק את עשרת המספרים 1, 2, 3, ... 9, 10 לחמישה זוגות של מספרים כך שהסכום של כל זוג יהיה ראשוני:

א. סכום ראשוני אחיד לכל הזוגות.

ב. סכום ראשוני לא אחיד לכל הזוגות.

ג. סכום ראשוני שונה לכל זוג.

א. הזוגות הם: (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), (10, 1) והסכום האחיד הוא 11.

ב. קיימות מספר אפשרויות שעונות לדרישה:

1	2	3
1+6=7	1+2=3	1+2=3
2+9=11	3+10=13	3+4=7
3+4=7	4+7=11	5+6=11
5+8=13	5+6=11	7+10=17
7+10=17	8+9=17	8+9=17
פעמיים הסכום 7	פעמיים הסכום 11	פעמיים הסכום 17

4	5	6
1+4=5	2+5=7	1+4=5
2+3=5	3+4=7	2+9=11
5+6=11	1+6=7	6+7=13
7+10=17	7+10=17	5+8=13
8+9=17	8+9=17	3+10=13
פעמיים הסכום 5	שלוש פעמים הסכום 7	שלוש פעמים הסכום 13
ופעמיים הסכום 17	ופעמיים הסכום 17	

1	2
2+3=5	1+4=5
1+6=7	2+5=7
4+7=11	3+8=11
5+8=13	6+7=13
9+10=19	9+10=19

משימה 3 –

א. מציאת חוקיות סדרת המספרים: ...,18, 14, 12, 8, 6, 4, 3

יש למצוא את חוקיות הסדרה וכמה מספרים בהמשכה. שימוש בשיטות מקובלות, כגון בניית סדרת ההפרשים או חלוקת הסדרה לשתי סדרות מספרים: אלו שבמקומות האי-זוגיים ואלו שבמקומות הזוגיים, אינה מגלה את חוקיות הסדרה.

כדי למצוא את המשך הסדרה יש לתת רמז שמדובר בסדרה המבוססת על מספרים ראשוניים אף-על-פי שהמספר הראשוני היחיד שבה הוא 3.

עם קבלת הרמז מוצאים שהסדרה מתקבלת על-ידי הוספת 1 לכל מספר ראשוני, דהיינו,

(18)=17+1, (14)=13+1, (12)=11+1, (8)=7+1, (6)=5+1, (4)=3+1, (3)=2+1,

באותו אופן מקבלים שהמספרים הבאים בסדרה הם:

(32)=31+1, (30)=29+1, (24)=23+1, (20)=19+1

ב. להמשיך את סדרת המספרים: ...5, 10, 8, 4, 2, 7, 5, 3, 2,

יש למצוא את חוקיות הסדרה וכמה מספרים בהמשכה.

גם כאן, יש להדגיש שמדובר בסדרה המבוססת על מספרים ראשוניים.

תחילת הסדרה היא אכן מספרים ראשוניים, אך החל מהמספר הראשון הראשוני הדו-ספרתי כל איבר הוא סכום הספרות של המספר הראשוני, דהיינו,

11⇒1+1=2 , 13⇒1+3=4 ,17⇒1+7=8 , 19⇒1+9=10 ,23⇒2+3=5 ,29⇒2+9=11 .

משימה 4 – חזרה למספר המקורי

המשימה מתאימה להפעלת תלמידי הכיתה.

מטילים על אחד מתלמידי הכיתה לבחור מספר תלת-ספרתי ומבקשים ממנו להפוך אותו למספר שש-ספרתי על-ידי רישום נוסף של המספר שבחר, למשל, 459,459, 387,387

כעת מבקש המורה לחלק את המספר השש-ספרתי ל"מספר מזל", כפי שמקובל בפי העם.

מתחיל ויכוח בכיתה מהו "מספר המזל"? יש האומרים 5 (חמשה) אחרים אומרים 7 (שבעת ימי השבוע, שבע שבתות – ספירת העומר, שבע שנים – ספירת השנים ליובל, שבעת ימי הפסח, שבעת המינים שנתברכה בהם ארץ-ישראל) ויש האומרים 13 (שלוש-עשרה מידות, שלושה-עשר עיקריים). לפעמים מציעים התלמידים גם מספרים אחרים.

המורה אומר לאחד התלמידים לחלק את המספר ב-7, ולתלמיד אחר לחלק את התוצאה שהתקבלה ב-13.

אחר-כך שואל המורה את התלמיד את השאלה:

אם אחד מכם ילך רגלית הביתה באיזה "מספר אוטובוס" הוא יסע? יימצא בוודאי תלמיד בכיתה שיבין שהמורה מתכוון למספר 11 (שתי-רגליים). אחר-כך מבקש המורה מהתלמיד, שחילק את המספר השש-ספרתי ל-7 ול-13, לחלק את התוצאה שהתקבלה ב-11. המורה בחיוך ובסיפוק שואל את התלמיד "האם קיבלת את המספר התלת-ספרתי המקורי שבחר חברך?", התשובה: אכן כן.

לאחר-מכן, המורה מבקש לחזור על התהליך תוך בחירה אקראית של מספר אחר. לאחר ביצוע פעולות החילוק ב-7, 11, ו-13 חוזרים למספר המקורי.

מה הקשר בין בחירת המספר התלת-ספרתי לבין פעולות החילוק ב"מספרי מזל" וב"מספר האוטובוס" והחזרה למספר המקורי?

ההסבר מפתיע בפשטותו. כשלוקחים את המספר התלת-ספרתי והופכים אותו לשש-ספרתי, למעשה מכפילים את המספר הנבחר ב-1001, לדוגמה:

$$\begin{array}{rcrcr} 1000 & \times & 723 & = & 723{,}000 \\ + & & & & \\ 1 & \times & 723 & = & 723 \\ \hline 1001 & \times & 723 & = & 723{,}723 \end{array}$$

המספר 1001 הוא כפולה של שלושה מספרים ראשוניים 7×11×13. לכן חלוקה של המספר השש-ספרתי בשלושת המספרים הללו נותנת את המספר המקורי.

משימה 5 – למצוא את הפתרונות הטבעיים של משוואה

נתונה המשוואה הזאת: $mn - 7=18(m+n)$

יש למצוא את זוגות המספרים הטבעיים המקיימים משוואה זו.

דרך הפתרון:

נחלץ מהמשוואה את m.

$$m = \frac{18n+7}{n-18} = \frac{18(n-18)+331}{n-18} = 18 + \frac{331}{n-18}$$

היות ו-m הוא מספר שלם, הדבר מחייב שגם השבר $\frac{331}{n-18}$ יהיה מספר שלם.

המספר 331 הוא מספר ראשוני ועל כן הוא מתחלק ב-1 ובעצמו, כלומר,

$$n-18=1 \Rightarrow (n,m)=(19,349)$$

או $$n-18=331 \Rightarrow (n,m)=(349,19)$$

אם נתונה המשוואה: $mn-36=18(m+n)$

הרי שעם חילוץ m היה מתקבל הקשר הזה:

$$m = 18 + \frac{360}{n-18}$$

המספר 360 פריק ומספר מחלקיו 24, והיינו מקבלים מספר גדול של זוגות שונים של פתרונות אפשריים למשוואה.

משימה 6 – למצוא מספר מסוים

א. יש למצוא מספר שמתחלק ב-2 וב-9 ויש לו בדיוק 14 מחלקים (כולל 1 והמספר עצמו).

דרך הפתרון:

כפי שהוסבר בהקדמה של המאמר, ניתן לרשום את המספר המבוקש בצורה $N = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot c^{n_3}$

לפי הנתון, אם המספר מתחלק ב-2 וב-9, הרי ש- $n_1 \geq 1$ ו- $n_2 \geq 2$ וכך גם $n_3 \geq 0$

לפי הנתון, אם מספר המחלקים הוא 14, אזי, $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot(n_3+1)=14$

כשהערך המספרי של כל אחד מהסוגריים הוא מספר טבעי שווה או גדול מ-2.

היות והמחלקים של 14 הם: 1, 2, 7, 14, הרי שהמכפלה היחידה האפשרית היא $2\times7\times1$, כלומר, הצורה היחידה האפשרית למספר היא $N=2^{n_1}\cdot3^{n_2}$ מאחר ש- $n_2 \geq 2$ $(n_2+1\geq3)$ לכן $n_1=1$ ו- $n_2=6$ והמספר המבוקש הוא $N=2^1\cdot3^6=1456$

ב. באותם הנתונים ניתן למצוא מספר שיש לו בדיוק 15 מחלקים.

גם כאן בהתאם לנתונים:

$n_1 \geq 1 \ , n_2 \geq 2 \ , n_3 \geq 0$

והפעם $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot(n_3+1)=15$

המכפלות האפשריות הן: $1\times15\times1,\ 3\times5\times1,\ 5\times3\times1$

באותה דרך של ניתוח מוצאים שקיימות שתי אפשרויות:

$n_1=2 \ , n_2=4 \Rightarrow N=2^2\cdot3^4=324$

$n_1=4 \ , n_2=2 \Rightarrow N=2^4\cdot3^2=144$

ג. באותם הנתונים ניתן למצוא מספר שיש לו 17 מחלקים.

הפעם $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot(n_3+1)=17$

17 הוא מספר ראשוני והמכפלה היחידה האפשרית היא 1×17. מאחר שכל אחד מהגורמים חייב להיות שווה או גדול מ-2, הרי שבנתון הנ"ל לא קיים מספר כזה.

משימה 7 – זוגות של מספרים ראשוניים

יש למצוא זוגות של מספרים ראשוניים שסכומם הוא מספר תלת-ספרתי אי-זוגי, בעל שלוש ספרות זהות.

דרך הפתרון

כדי שהסכום יהיה אי-זוגי, הדבר מחייב שמספר אחד יהיה זוגי והשני אי-זוגי. המספר הראשוני היחיד שהוא זוגי הוא 2, ויש למצוא כבן-זוג מספר אי-זוגי ראשוני.

המספרים הבאים בחשבון הם:

109+2=111, 109 מתאים כי הוא מספר ראשוני.

331+2=333, 331 מתאים כי הוא מספר ראשוני.

553+2=555, 553 לא מתאים כי הוא פריק.

כך ממשיכים הלאה עד,

997+2=999, ו-997 מתאים כי הוא מספר ראשוני.

התשובה הסופית היא הזוגות:

(2 ,109), (2 ,331), (2 ,997)

משימה 8 – שישייה של מספרים ראשוניים עוקבים

יש למצוא שישייה של מספרים ראשוניים עוקבים שסכומם הוא מספר ראשוני.

דרך הפתרון

אם כל ששת המספרים הראשוניים העוקבים יהיו כולם אי-זוגיים, הרי שסכומם יהיה זוגי, בניגוד לנתוני המשימה, לכן אחד מהם חייב להיות המספר 2. חמשת המספרים העוקבים שלו הם: 3, 5, 7, 11, 13, שיחד אתו נותנים סכום של 31 שהוא מספר ראשוני.

משימה 9 – שארית של חילוק מספר ראשוני

יש להוכיח, אם מחלקים מספר ראשוני ב-30, אזי השארית גם היא מספר ראשוני או 1.

דרך הפתרון:

נסמן את המספר הראשוני ב-p ונבטא אותו בצורה $p=30a+b$ כאשר a ו-b מספרים שלמים ו-$b<30$ נוכיח בדרך השלילה.

אם b הוא מספר פריק, הרי הוא חייב להתחלק באחד המספרים הראשוניים הקטנים או שווים ל-5 (כפי שנזכר לעיל, לקביעת מספר ראשוני נעשית הבדיקה על-ידי חלוקת המספר במספרים ראשוניים הקטנים משורש המספר, בהקשר זה $5 < \sqrt{30}$). זאת אומרת, ש-b מתחלק ב-2 או ב-3 או ב-5. אך המספרים 2, 3 ו-5 הם המחלקים של 30 וזו סתירה לנתון ש-p מספר ראשוני.

המסקנה, b הוא לא מספר פריק, כלומר, הוא מספר ראשוני או 1. מ.ש.ל.

משימה 10 – למצוא את כל המספרים הטבעיים שיוצרים מספרים ראשוניים

יש למצוא את כל המספרים הטבעיים שיוצרים מספרים ראשוניים על-ידי הצבתם בנוסחה

$$P(n) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

דרך הפתרון:

נציב תחילה כמה מספרים טבעיים:

לא ראשוני	$p(1)=0$	$n=1$
ראשוני	$p(2)=2$	$n=2$
ראשוני	$p(3)=5$	$n=3$
פריק	$p(4)=9$	$n=4$
פריק	$p(5)=14$	$n=5$

האם נקבל החל מ-$n=4$ מספרים פריקים?

נשנה את הנוסחה לצורה הזאת:

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

ההפרש שבין שני גורמי המכפלה שבמונה הוא 3, כלומר, אחד מהם הוא זוגי והשני אי-זוגי.
החל מ- $n \geq 4$ גורמי המכפלה שבמונה הם:

3×6 ,4×7 ,5×8 ,6×9 ,...

בכל אחד מגורמי המכפלה ישנו מספר פריק שלאחר צמצומו ב-2 והכפלתו בגורם השני (האי-זוגי) מקבלים מספר $p(n)$ פריק.

משימה 11 – צלעותיו של משולש ישר זווית

יש להוכיח שכל מספר ראשוני הנגזר מהצורה $4n+1$ הוא אורכו של היתר במשולש ישר זווית ואורכי ניצביו הם מספרים טבעיים.

דרך הפתרון:

לפי המשפט של **פרמה**: "כל מספר ראשוני הנגזר מהצורה $p=4n+1$, ניתן לפרק אותו לסכום הריבועים של שני מספרים טבעיים (ופירוק זה הוא יחידי)". נרשום: $p=a^2+b^2$ כאשר p מספר ראשוני ו-b, a מספרים טבעיים.

נניח ש-$a>b$.

על-ידי חישוב אלגברי נקבל:

$$p^2=(a^2+b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2 \quad *$$

היות ו-$p=a^2+b^2$, אזי $p>a^2-b^2$ וגם $p>2ab$

$((a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2>2ab \Rightarrow p>2ab)$

המשמעות היא, שהמשוואה (*) היא מימוש משפט פיתגורס למשולש ישר זווית שבו p הוא היתר ו-a^2-b^2 ו-$2ab$ הם ניצביו.

נציג מספר דוגמאות:

n	p	a	b	p^2	$(a^2-b^2)^2$	$(2ab)^2$
1	5	2	1	25	9	16
3	13	3	2	169	25	144
4	17	4	1	289	225	64
7	29	5	2	841	441	400

משימה 12 – "כמעט" משפט פיתגורס

למצוא שלישיות של מספרים ראשוניים: r, q, p הנותנים את המשוואה $p^2+1=q^2+r^2$.

דרך הפתרון:

ללא תוספת של המספר 1 באגף השמאלי היה מדובר במציאת שלישייה פיתגורית.

אין למשימה פתרון מתמטי כללי, כדי למצוא את השלישיות יש לבצע ניסוי של הצבה ובדיקה.

כדי להקל על מציאת השלישיות ניתן להשתמש בקשר האלגברי הבא:

$$(5x+13)^2+1=(3x+7)^2+(4x+11)^2$$

אם: $r(x)=4x+11$, $q(x)=3x+7$, $p(x)=5x+13$ הם שלישייה של מספרים ראשוניים עבור x מסוים, הרי שהשלישייה מהווה פתרון המשוואה.

להלן טבלה של מספר r, q, p לאחר הצבת ערכים ל-x (הובאו רק ערכי x הנותנים שלישייה של מספרים ראשוניים).

x	p	q	r
0	13	7	11
2	23	13	19
8	53	31	43
12	73	43	59
18	103	61	83

מזה יוצא, שניתן לקבל אינסוף שלישיות. עם זאת ישנן בוודאי משפחות אחרות של פונקציות של x: $p(x), q(x), r(x)$ שנותנות שלישיות אחרות, כגון השלישיות: (29, 11, 31), (13, 11, 17).

משימה 13 – מציאת מספר ראשוני מסוים על סמך משפט פרמה

למצוא מספר ראשוני p שעבורו הביטוי 2^P+1 מתחלק ב-p.

דרך הפתרון:

לפי משפט **פרמה** הקטן, עבור p מספר ראשוני, הביטוי 2^P-2 מתחלק ב-p.

לפי המשימה דורשים שהביטוי יתחלק ב-p.

נרשום זאת כך: $2^P+1=2^P-2+3$

החלק הראשון של הביטוי, 2^P-2 מתחלק ב-p ראשוני, לפי משפט פרמה, וכדי שהחלק השני (המספר 3) יתחלק ב-p, הדבר מחייב p=3, וזהו מספר ראשוני שעונה לנתוני המשימה.

משימה 14 – מחלקים ראשוניים לזוגות מספרים

יש להוכיח שקיימים אינסוף זוגות של מספרים m ו-n כך ש-

א. ל-m ול-n יש אותם המחלקים הראשוניים.

ב. גם ל-m+1 ול-n+1 יש אותם המחלקים הראשוניים.

הפתרון:

א. עבור k טבעי, $k>1$ לזוגות $m=2^k-2$ ול-$n=2^k(2^k-2)$ יש אותם המחלקים הראשוניים.

ההסבר: ל-m יש מספר מסוים של מחלקים ראשוניים ובהם המחלק 2 ($2^k-2=2(2^{k-1}-1)$).

למספר n יש אותם המחלקים הראשוניים שיש ל-2^k-2 וכן את המחלק 2 (שהופיע במספר), הכלול בגורם 2^k.

ב. בהתאמה $m+1=2^k-1$ וכן ל-n+1 יש הצורה הזאת:

$$n+1=2^k(2^k-2)+1=(2^k)^2-2\cdot 2^k+1=(2^k-1)^2$$

כלומר, אותם המחלקים שיש ל-m+1.

עבור כל ערך של k נקבל זוגות של n, m, דהיינו, אינסוף זוגות.

משימה 15 – גודלו ומיקומו של האיבר בקבוצת המספרים הראשוניים

נסמן ב-p_n את גודלו ומיקומו של איבר בקבוצת המספרים הראשוניים. יש להוכיח שעבור

$$p_n > 3n,\ \ n \geq 12$$

דרך הפתרון:

נסדר את המספרים הטבעיים בקבוצות בעלות 3 מספרים בכל קבוצה:

$$..,\ (39,\ 38,\ 37),\ \underbrace{(36,\ 35,\ 34)}_{\text{קבוצה } 12},\ ...,\ (9,\ 8,\ 7),\ (6,\ 5,\ 4),\ (3,\ 2,\ 1)$$

ב-12 הקבוצות הראשונות ישנם 11 מספרים ראשוניים: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31

בכל אחת מהקבוצות הבאות יכול להיות לכל היותר מספר ראשוני אחד (המספר האחרון בכל קבוצה מתחלק ב-3, ובין שני המספרים האחרים יש אחד שהוא זוגי).

לכן, אם $n \geq 12$, אז המספר p_n נמצא בקבוצה ה-n+1 או בקבוצה יותר רחוקה, וזה אומר ש-$p_n>3n$, מ.ש.ל.

משימה 16 – סדרה של מספרים ראשוניים

יש למצוא מספרים טבעיים n שעבורם כל אחד מבין המספרים n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15 יהיה מספר ראשוני.

דרך הפתרון:

קיים רק מספר אחד כזה והוא $n=4$. ההסבר כדלקמן:

עבור $n=1$ מקבלים $n+3=4$ מספר פריק. עבור $n=2$ מקבלים $n+7=9$ מספר פריק. עבור $n=3$ המספר $n+1=4$ הוא מספר פריק.

עבור $n>4$ כל המספרים המבוקשים גדולים מ-5 ולפחות אחד מהם מתחלק ב-5, וזאת משום שבחילוק המספרים 1, 3, 7, 9, 13, 15 ב-5 מקבלים את השאריות: 1, 2, 3, 4, 5, 0, כלומר, את כל השאריות האפשריות בחילוק מספר כלשהו ב-5. מכאן נובע שגם המספרים:

$n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$, $n+15$

אם נחלק אותם ב-5, אזי יתקבלו כל השאריות האפשריות, ולפחות אחד מהם יתחלק ב-5. המספרים האלו גדולים מ-5 (מכיוון ש-$n>4$) ולכן המספר המתחלק ב-5, הוא פריק.

עבור $n=4$ מקבלים את המספרים הראשוניים: 5, 7, 11, 13, 17, 19, מ.ש.ל.

משימה 17 – הצורה של מספר ראשוני

א. להוכיח שכל מספר ראשוני הגדול מ-3 הוא נגזר מהצורה $6n\pm1$. האם המשפט ההפוך נכון?

דרך הפתרון:

כשמחלקים ב-6 מספר ראשוני p הגדול מ-3 מקבלים שארית של 1 או 5. ההסבר לכך הוא כדלקמן: כשמחלקים מספר כלשהו ב-6 מתקבלות השאריות האלה בלבד: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ולכן ניתן לבטא את השאריות על-ידי רישום המספר באחת מהצורות הבאות:

$6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$

המספר $6n$ – פריק, כי הוא מתחלק ב-6.

המספר $6n+2$ – פריק, כי הוא מתחלק ב-2.

המספר $6n+3$ – פריק, כי הוא מתחלק ב-3.

המספר $6n+4$ – פריק, כי הוא מתחלק ב-2.

זאת אומרת, שהמספרים האפשריים בלבד הם: $p=6n+1$ כאשר השארית 1 או $p=6n+5=6(n+1)-1=6N-1$ כאשר השארית 5.

המשפט ההפוך אינו נכון. לא כל מספר הנגזר מהצורה $6n\pm1$ הוא מספר ראשוני ולהלן שתי דוגמאות:

$25=6\cdot4+1$ ו- $77=6\cdot13-1$

הערה: כל מספר טבעי הגדול מ-1 אפשר לרשום אותו באחת מהצורות הבאות: $3n$, $3n\pm1$.

ב. יש למצוא את המספרים הטבעיים p, שעבורם $p+10$ ו-$p+14$ הם מספרים ראשוניים.

דרך הפתרון:

כאשר p מספר ראשוני, גדול מ-3, ניתן לרשום אותו בצורה $p=3n\pm1$. נתבונן בשתי האפשרויות:

א. כאשר $p=3n+1$, אזי $p+14=3n+1+14=3n+15$, מספר המתחלק ב-3 ועל-כן אינו ראשוני.

ב. כאשר $p=3n-1$, אזי $p+10=3n-1+10=3n+9$, מספר המתחלק ב-3 ואינו ראשוני.

נותרו רק האפשרויות $p=2$ ו-$p=3$. כאשר $p=2$ המספרים $p+10$ ו-$p+14$ זוגיים ולא מתאימים לדרישה.

כאשר $p=3$, אזי $p+10=13$ ו-$p+1=17$, שני מספרים ראשוניים.

על-כן התשובה היחידה היא $p=3$.

ג. יש למצוא את המספרים הראשוניים p, שעבורם גם המספר $8p^2+1$ הוא ראשוני.

דרך הפתרון:

בדומה למשימה הקודמת כפי שהוכחנו עבור $p>3$ צורת המספר הראשוני הוא $p=3n\pm1$, אזי

$$8p^2+1=8(3n\pm1)^2+1=8(9n^2\pm6n+1)+1=72n^2\pm48n+9=3(24n^2\pm16n+3)$$

מספר המתחלק ב-3 ועל-כן אינו ראשוני.

כאשר $p=2$ מקבלים $8p^2+1=33$ – מספר שאינו ראשוני.

כאשר $p=3$ מקבלים $8p^2+1=73$ – מספר ראשוני.

כלומר התשובה היחידה היא $p=3$.

ד. יש למצוא את המספר הראשוני p שעבורו גם p^2+2 וגם p^3+2 יהיו ראשוניים.

דרך הפתרון:

אם $p>3$, אזי צורתו של p היא $3n\pm1$. עבור $p=3n+1$ מקבלים $p^2+2=9n^2+6n+3$ – מספר פריק.

עבור $p=3n-1$ מקבלים $p^2+2=9n^2-6n+3$ – מספר פריק.

נותר לבדוק את האפשרויות $p=2$ או $p=3$.

עבור $p=2$ מקבלים $p^2+2=4$, $p^3+2=10$ – מספרים פריקים.

עבור $p=3$ מקבלים $p^2+2=11$, $p^3+2=29$, כלומר, התשובה היחידה היא $p=3$.

ה. יש למצוא את כל המספרים הראשוניים הנגזרים מהצורה T_n+1, כאשר n הוא מספר טבעי

ו-$T_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

דרך הפתרון:

על-ידי שימוש באלגברה מקבלים:

$$T_n+1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\frac{n^3+3n^2+2n+6}{6}=\frac{n^2(n+3)+2(n+3)}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n+1=\frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$$

עבור הצבת $n=1,2,3$ מקבלים מספרים ראשוניים כדלקמן:

$T_1+1=2$,$T_2+1=5$,$T_3+1=11$

הביטוי T_n+1 מורכב משני גורמי מכפלה במונה.

עבור $n\geq 4$ ערכי גורמי המכפלה הם:

$n+3\geq 7$ $n^2+2\geq 18$

n	n+3	n^2+2
4	7	18
5	8	27
6	9	38
7	10	51
8	11	66
⋮	⋮	⋮

להלן טבלת גורמי המכפלה עבור $n\geq 4$:

כשמתבוננים בכל האפשרויות רואים שתמיד אחד מגורמי המכפלה זוגי והאחר מתחלק ב-3, או אחד מגורמי המכפלה מתחלק ב-6, כלומר, הביטוי T_n+1 יהיה פריק.

במקום להתבונן בטבלה, נביא הוכחה מדויקת שעבור $n\geq 4$ המספר T_n+1 פריק.

בהסתמך על הערה המופיעה בסוף משימה 17 א' נדגים שני מצבים:

1. $n=3k$ הגורם הראשון; $n+3=3k+3=3(k+1)$ מתחלק ב-3. אם k מספר זוגי, אזי n^2+2 מספר זוגי גדול מ-2 ומכפלת גורמי המכפלה מתחלקת ב-6. אם k מספר אי-זוגי, אזי $n+3$ מספר זוגי, זאת אומרת, מתחלק במספר גדול מ-6 ומתחלק ב-6. אחרי צמצום נקבל מספר פריק.
2. $n=3k\pm1$. כאן הביטוי $n^2+2=9k^2\pm6k+3$ מתחלק ב-3. אם k מספר זוגי, אזי $n+3$ מספר זוגי גדול מ-2. אם k מספר אי-זוגי, אזי n^2+2 זוגי, זאת אומרת, מספר הגדול מ-6 ומתחלק ב-6. גם הפעם לאחר צמצום נקבל T_n+1 מספר פריק. מ.ש.ל.

משימה 18 – משימות לפתרון עצמי

א. יש למצוא את כל המספרים הראשוניים אשר בו-זמנית מהווים גם סכום וגם הפרש של שני מספרים ראשוניים.

ב. יש למצוא את שלושת המספרים הטבעיים n הקטנים ביותר, שבתחום שבין n ו-n+10 אין

שום מספר ראשוני.

ג. יש למצוא את שלושת המספרים הטבעיים n הקטנים ביותר, שבתחום 10n ו-10(n+1) אין שום מספר ראשוני.

ד. להוכיח שלמשוואה, $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$ אין פתרון עבור p, r, r, s, t ראשוניים.

סיכום

המאמר מוסיף ידע רב ומקיף למתעניין במשימות ובבעיות, הקשורות למספרים ראשוניים. הוצגו בו לקט מגוון ורחב של משימות, במרביתן הובאו פתרונות מלאים תוך ציטוט ושימוש במשפטי יסוד הקשורים למספרים הראשוניים.

הערות ומראי מקומות

1. בן יהודה, ב' (1971). **פרקי השתלמות במתמטיקה, מתורת הקבוצות ומתורת המספרים.** רמת-גן, מסדה.
2. פלצקר, ע' (1954). **חשבון לבית הספר התיכון.** תל-אביב, דביר.
3. בן יהודה, ב' (1966). **למהותה של המתמטיקה.** תל-אביב, אוצר המורה – הסתדרות המורים.
4. Hard, G.H. & Wright, E.M. (1979). **An Introduction to the Theory of Numbers.** 5th ed. Oxford.
5. Riberbaum, P. (1995). **The New Book of Prime Number Records.** New York, Springer.
6. אמזלג, ד' (1998). על מספרים משוכללים. **על"ה – עלון למורה המתמטיקה, 22.** ירושלים, המרכז להוראת המדעים – האונברסיטה העברית.
7. אוקסמן, ל', סטופל, מ' (1998). חידות בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד, **על"ה – עלון למורה למתמטיקה , 22.** ירושלים, המרכז להוראת מדעים – האוניברסיטה העברית.
8. הירש, ג' (1999). **מתמטיקה אחרת.** אבן יהודה, רכס פרוייקטים חינוכיים בע"מ.