משה סטופל

הצגת משימות ככלי להגברת מוטיבציה ופיתוח החשיבה בלימודי חשבון ומתמטיקה

תקציר

שילוב משימות מעניינות, חידות ושעשועי מתמטיקה, במהלך לימודי המקצוע, מהווה אתגר מרתק הדורש דרכי פתרון בלתי-שגרתיות. ההתמודדות וההתעסקות עם בעיות כאלה מעוררת עניין רב בקרב התלמידים וגורמת לגירויי חשיבה ואף לפתרונות בלתי-צפויים, המדגישים את עושרה ויופיה של המתמטיקה. במאמר מובא לקט משימות בצירוף פתרונות והערות מתודיות.

מבוא

במסלולים שונים של לימודי מתמטיקה ובמסגרת הכשרה והשתלמות של מורים למתמטיקה, נעשו נסיונות לשלב משימות, בעיות, חידות ושעשועים מגוונים, בתהליכי הלימוד וההוראה, מתוך מטרה להגביר את המוטיבציה, לפתח את החשיבה ולהעניק כלים להתמודדות עם אתגרי חשיבה בתחומים שונים.

בצורה חד-משמעית, ניתן לקבוע, שהשילוב תרם להגברת ההתעניינות, לגיוון ההוראה ופיתוח החשיבה.

המשימות שהוצגו, היו שונות בדרך כלל מהחומר השוטף, והיוו מעין הרפייה זמנית מההתעסקות הלימודית.

מעגל המתעניינים במשימות, הלך והתרחב, ובשלבי ההתמודדות נמצאו בדרכים לא-קונבנציונליות, פתרונות מקוריים בלתי-צפויים, משימות עובדו ופותחו לבעיות חדשות והגיעו בקשות למשימות נוספות, לאחר שהגירויים הראשונים נקלטו.

במהלך הניסוי החלו להתגלות "מכורים" למשימות מתמטיות, עד כדי דרישה לפתיחת חוגים לשוחרי מתמטיקה.

שוחרי המתמטיקה מהווים מאגר פוטנציאלי למשתתפים בתחרויות ובאולימפיאדות שונות למתמטיקה. מתברר שהצעירים שהתמודדו בתחרויות מתמטיקה, שעסקו בפתרון משימות וחידות ושהיו חתומים על חוברות ובטאונים שונים במתמטיקה, רכשו כלים שאפשרו להם להגיע לרמות גבוהות בלימודי המקצוע ובתחומי מדע וידע קרובים ומובן שזכו להצלחה רבה בלימודים האקדמיים. המקורות הכתובים למשימות ושעשועי המתמטיקה רבים[1-9] ולאחרונה ניתן למצוא אותם גם באתרי האינטרנט, לעתים קרובות עם צ'ופרים חומריים ופרסים הדוחפים להגברת ההתעניינות. במאמר הנוכחי מוצגות מספר משימות המתאימות לכל הגילים החל מתלמידים מצטיינים בכיתות הגבוהות

תארנים: משימות ואתגרים; העשרה מתמטית; מספרים מיוחדים.

של בית הספר היסודי.
בחלק מהמשימות לא מוצג המקור שלהן מאחר ואיננו ידוע. לכל המשימה הובא פתרון עם ניתוח חלקי או מלא ולעתים פתרונות בדרך הניסוי והבדיקה וכן הערות מתודיות ופדגוגיות.

משימה מס׳ 1 – זוגות ושלישיות של מספרים שסכומם שווה למכפלתם

א. זוגות

שאלה מס׳ 1 – במדור ״שעות נוספות״[10] הופיעה השאלה הבאה תחת הכותרת ״מספר חזק״ – כידוע המספר 2 הוא בעל התכונה שאם תחברו אותו עם עצמו או תכפילו אותו בעצמו תקבלו אותה תוצאה. האם יש עוד זוגות כאלו (לאו דווקא זהים) שסכומם שווה למכפלתם? אם כן, תנו דוגמה נוספת אחת לפחות חוץ מאפס כמובן.

פתרון שאלה מס׳ 1 – במידה ומדובר בשני מספרים זהים הרי למציאתם יש לפתור את המשוואה: $a^2 = a+a => a(a-2) = 0$

פתרונות המשוואה הם המספרים (2,2) המופיע כידוע בשאלה ו-(0,0) שנשלל כדוגמה לזוג.

לכן יש לחפש שני בני זוג a ו-b השונים בערכיהם

$$a\ \ b = a + b => a = \frac{b}{b-1}$$

כל מספר $b \neq 1$ שנבחר, ייתן את בן הזוג a המבוקש. מובן שניתן לקבל אינסוף זוגות העונים לדרישה שמכפלתם שווה לסכומם. ניתן לקבל זוגות שאחד מבני הזוג שלם והשני שבר, שני בני הזוג שברים, שני בני הזוג מספרים חיוביים, שני בני הזוג הפוכים בסימניהם.

דוגמאות לזוגות אפשריים מופיעים בטבלה מס׳ 1.

a	*b*
2	2
$\frac{5}{4}$	5
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{7}$
$\frac{6}{7}$	-6
$\frac{13}{18}$	$-\frac{13}{5}$

טבלה מס׳ 1

ב. שלישיות

שאלה מס׳ 2 – למצוא שלישיות של מספרים שמכפלתם שווה לסכומם.

פתרון שאלה מס׳ 2 – נחלק את פתרון המשימה בהתאם לשלושת האפשרויות:

א. שלישיית מספרים זהים

$$a^3 = a+a+a => a^3-3a = 0 => a(a^2-3) = 0$$

התשובות המתקבלות:

$$a = 0 \qquad (0,0,0)$$
$$a = \sqrt{3} \qquad (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$$
$$a = -\sqrt{3} \qquad (-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$$

ב. שני מספרים זהים ומספר שלישי שונה

$$a^2b = a + a + b \Rightarrow b\left(a^2 - 1\right) = 2a \Rightarrow b = \frac{2a}{a^2 - 1}$$

עבור כל $a \neq \pm 1$ נקבל ערך ל-b. ניתן לקבל אינסוף שלישיות
להלן דוגמאות לשלישיות שונות (טבלה מס׳ 2):

a	b	השלישייה
5	$\frac{5}{12}$	$5,5,\frac{5}{12}$
8	$\frac{16}{63}$	$8,8,\frac{16}{63}$
-3	$-\frac{3}{4}$	$-3,-3,-\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{4}{3}$

טבלה מס׳ 2

ג. שלישיית מספרים שונים

$$a\ b\ c = a + b + c \Rightarrow a = \frac{b + c}{b\ c - 1}$$

עבור כל זוג (b, c) שמכפלתם שונה מ-1 נקבל את המספר שלישי.
הצבת b ו-c שווים נותנת את הפתרונות של סעיף ב׳.
הצבת b ו-c נגדיים אחד לשני, נותנת אינסוף שלישיות
מהצורה:

$$\left(\frac{5}{7},0,-\frac{5}{7}\right)(3,0,-3),(1,0,-1)$$

הצבת b=1 ו-c=2 נותנת את השלישייה הקלסית 3, 2, 1
הצבת b=-1 ו-c=-2 נותנת את השלישייה השנייה 3-, 2-, 1-,
שבה כל המספרים שלמים ושונים ואף אחד מהם אינו שווה
לאפס.
הצבת מספרים אחרים ל-b ו-c
נותנת שלישיות שחלק מהמספרים
או כולם הם שברים. בטבלה מס׳ 3
מספר דוגמאות לשלישיות
אפשריות:

c	b	a
5	2	$\frac{7}{9}$
-4	1	$\frac{3}{5}$
-1	-6	$-\frac{7}{5}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{26}{7}$

שאלה מס׳ 3 –

א. למצוא שלישייה של מספרים
שמכפלתם שווה לערך המוחלט של
סכומם.

ב. למצוא שלשייה של מספרים שסכומם שווה לערך המוחלט של מכפלתם.

פתרון שאלה מס׳ 3 – מחפשים שלישיות המקיימות את המשוואות:

I. $a\ b\ c = |a + b + c|$

II. $a + b + c = |a\ b\ c|$

באופן טבעי השלישיות המורכבות ממספרים חיוביים בלבד כפי שנמצאו בפתרון שאלה מס׳ 2, מקיימות את הדרישות של השאלה הנוכחית וזאת משום שסימן הערך המוחלט מיותר.
תלמידים מוצאים בדרך הניחוש והבדיקה את השלישיות הבאות:
(1, 1-, 1-) ו-(1-, 1, 1) האם ישנן שלישיות אחרות? כן, למשל השלישיות מהצורה (${}^{1}/_{3}$-, 1-, 1) ו-(${}^{1}/_{4}$-, 1-, 1) ויש אינסוף שלישיות כאלה על-ידי שינוי המספר שבמכנה השבר, במספר השלישי, או במספר שלישי חיובי ושלם (8-, 1-, 1).

למציאת פתרון בדרך מתמטית למשוואה I, $a\ b\ c = |a + b + c|$, הרי שכאשר $a+b+c < 0$ (שני מספרים מהשלישייה שליליים והשלישי חיובי כך שהמכפלה תהיה חיובית), ניתן לשנות את המשוואה לצורה

$$a\ b\ c = -(a + b + c)$$

חילוץ a נותן את הקשר $a = \dfrac{-(b + c)}{b\ c + 1}$

עבור כל b ו-c שנבחר וכן $b\ c \neq -1$ נקבל ל-a ערך מספרי המקיים את הדרישה.
בטבלה מס׳ 4 מוצגות כמה דוגמאות:

b	c	a
-3	-2	$\frac{5}{7}$
4	6	$-\frac{2}{23}$
$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{26}{22}$

טבלה מס׳ 4

למציאת פתרון בדרך מתמטית למשוואה II, $a + b + c = |a\ b\ c|$, הרי שכאשר $a\ b\ c < 0$ (שני מספרים חיוביים והשלישי שלילי – כי שלישיית מספרים שליליים תיתן גם סכום שלילי), ניתן לשנות את המשוואה לצורה $a + b + c = -a\ b\ c$.

חילוץ a נותן את הקשר $a = -\dfrac{(b + c)}{b\ c + 1}$

b	c	a
3	2	$-\frac{5}{7}$
-4	6	$\frac{2}{23}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{26}{22}$

טבלה מס׳ 5

עבור כל b ו-c שנבחר וכן $b\ c \neq -1$ נקבל ערך ל-a המקיים את הדרישה. בטבלה מס׳ 5 מוצגות דוגמאות המבוססות על טבלה מס׳ 4 בשינוי סימני חלק מהמספרים.

סיכום שאלות 1-3 – לכאורה נראה שלדרישות השאלות הנ״ל יש מספר מועט של פתרונות,

אך עם הרחבת התחום לשברים ולמספרים שליליים ושימוש בקשרים מתמטיים, מקבלים אינסוף פתרונות.

משימת המשך
למצוא זוג מספרים שמכפלתם שווה למנתם.
פתרון המשימה

למציאת הזוג (a,b) נרשום לפי הדרישה $a \cdot b = \frac{a}{b}$ כאשר $b \neq 0$.

נכפול את שני האגפים ב-b ונקבל, $a = a \cdot b^2 \Rightarrow a\left(1 - b^2\right) = 0$

לפתרון המשוואה קיימות האפשרויות הבאות:

אפשרות א׳ – $a = 0$, לכל ערך של b (להוציא $b = 0$), קיימים אינסוף זוגות אפשריים מהסוג (0,b).

להלן מספר דוגמאות: $(0,1),(0,-3),\left(0,\frac{5}{2}\right)\left(0,-\frac{3}{7}\right)$

אפשרות ב׳ – $a \neq 0$ ו-$b = \pm 1$

קיימים אינסוף זוגות אפשריים (a,b), כאשר לכל ערך של a (להוציא $a = 0$) מצרפים את אחת משתי האפשרויות ל-b (± 1). להלן מספר דוגמאות:

$$(5,1),(-7,-1),\left(\frac{7}{2},1\right)\left(-\frac{3}{5},1\right)\left(\frac{13}{8},-1\right)$$

למשימה הנ״ל ניתן להוסיף את הדרישה הבאה: למצוא זוג של מספרים שמכפלתם שווה לסכומם ושווה למנתם, דהיינו, $a \cdot b = a + b = \frac{a}{b}$.

השאלה הוצגה במקור[5] (חוברת 10) והפתרון היחיד האפשרי שהובא שם, הוא,

$$\left(\frac{1}{2},-1\right).$$

משימה מס׳ 2 – ריבוע קסם 3x3 של מכפלות

במאמר הקודם[11] הובאו שיטות לשיבוץ מספרים שונים בריבוע קסם כך שמתקבל סכום אחיד בכל עמודה, שורה ובשני האלכסונים הראשיים.

במאמר זה תוצג שיטה לשיבוץ מספרים שונים בריבוע 3x3 כך שיתקבל ריבוע קסם בעל מכפלה אחידה.

השיבוץ מבוסס על בחירת קבוצה של 9 מספרים, כך שהמספרים הקטנים של הקבוצה הם המחלקים של המספרים הגדולים של הקבוצה. נביא שלוש דוגמאות לקבוצות של 9 מספרים שונים.

דוגמה א׳ – שיבוץ המספרים של חזקות 2: 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

את המספר האמצעי 16 (וגם בדוגמאות האחרות) משבצים במרכז הריבוע (ציור מס׳ 1). את המספר

הגדול (256) משבצים באמצע של אחת השורות (או אחת העמודות החיצוניות). במרכז השורה החיצונית הנגדית משבצים את המספר הקטן ביותר (1). מתקבלת עמודה מלאה שמכפלתה 4096. בשורה שבה מופיע המספר 1 משבצים שני מספרים שמכפלתם 4096. במקרה זה המספרים הם: 128, 32. מכאן ההמשך פשוט ביותר.

32	1	128
64	16	4
2	256	8

דוגמה ב׳ – שיבוץ תשעת המחלקים של המס׳ 36.

16, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1

הערה א׳ – בחירת המספרים יכולה להיות חלק מהלמידה של מציאת מספר המחלקים של מספר נתון על-ידי פירוקו לחזקות של מספרים ראשוניים. במקרה של המספר 36 הפירוק הוא $2^2 \cdot 3^2$. וכל מחלק הוא מהצורה של $2^x \cdot 3^y$. כל צירוף של (x,y), כאשר x ו-y מקבלים את הערכים 2, 1, 0, נותן מחלק אחר. גם בדוגמה זו משבצים את המספרים לפי העקרון שהוצג בדוגמה הקודמת ומתקבל הריבוע הנראה בציור מס׳ 2.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

הערה ב׳ – חשוב לציין שכאשר מתקבל ריבוע קסם של מכפלה אחידה, מתקבלים למעשה אינסוף ריבועי קסם, המבוססים על קבוצת המספרים שבריבוע. מכפלת קבוצת המספרים במספר שלם (חיובי או שלילי) נותנת קבוצה חדשה של מספרים הממוקמים במקום המספרים המקוריים ומתקבל ריבוע קסם חדש. בציור מס׳ 3 מופיע ריבוע הקסם המבוסס על מספרי ריבוע הקסם של ציור מס׳ 2 כשכל מספר הוכפל פי 5.

60	5	90
45	30	20
10	180	15

דוגמה ג׳ – שיבוץ תשעת המחלקים של המספר 100

100, 50, 25, 20, 10, 5, 4, 2, 1

בציור מס׳ 4 נראה שיבוץ המספרים הללו.

20	1	50
25	10	4
2	100	5

ריבועי קסם מיוחדים

א. ריבועים שכל המספרים שלהם זהים (ציורים 5 א׳-ג׳), הם ריבועי קסם הן מצד המכפלות השוות והן מצד הסכום השווה והדבר נכון עבור כל מספר שיבחר.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

7	7	7
7	7	7
7	7	7

-4	-4	-4
-4	-4	-4
-4	-4	-4

ב. ריבועים הבנויים על מספרים שחוזרים על עצמם.

בציור מס׳ 6 א׳ כל אחד מהמספרים 1, 2, 4 חוזר על עצמו 3 פעמים ואילו בציור 6ב׳ המספר 2- חוזר על עצמו 6 פעמים, והמספר 2 חוזר על עצמו 3 פעמים.

4	1	2
1	2	4
2	4	1

-2	-2	2
-2	2	-2
2	-2	-2

משימה מס׳ 3 – מציאת מספר 6 ספרתי מיוחד

מהו מספר השש ספרתי המורכב מספרות שונות כך שאם נכפול אותו באחד מהמספרים 6, 5, 4, 3, 2, עדיין נקבל מספר 6 ספרתי המורכב מאותן ספרות אך בסדר שונה.

התשובה – המספר הוא $\boxed{142,857}$.

יש לשים לב שבצורה ציקלית סדר המספרים בכל מכפלה נשמר.

1 X 142857 = 142857

2 X 142857 = 285714

3 X 142857 = 428571

4 X 142857 = 571428

5 X 142857 = 714285

6 X 142857 = 857142

דרך פתרון:

המספר חייב להתחיל ב-1, כדי שעם הכפלתו ב-6 התוצאה תהיה עדיין מספר 6 ספרתי. מאותו נימוק, הספרה השנייה יכולה להיות מקסימום 6. במידה והספרה השנייה 6, הספרה השלישית המקסימלית היא 4. הספרה השישית (ספרת האחדות) שונה מ-1, כי מספר 1 שמור לספרה הראשונה. ספרת האחדות שונה מאפס, כי אחרת כל הכפלה תשאיר את הספרה באותו מקום.

על אף השימוש בתנאי ההגבלה הנ״ל וכן העובדה שספרה מסוימת לא יכולה לחזור על עצמה יותר מפעם אחת, מציאת המספר, בשיטת ניסוי ובדיקה, מעייפת מאוד מאחר ומדובר בכ-9,000! אפשרויות שונות. לפיכך מציאת המספר נעשתה על-ידי תוכנית מחשב.

למעשה המספר המבוקש מבוסס על השבר $\frac{1}{7}$ שהוא שבר עשרוני מחזורי עם מחזור של 6 ספרות

$0.\underbrace{142857}\underbrace{142857}...$ שונות. אותן הספרות מקבלים בשברים העשרוניים המחזוריים של השברים

$$\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},...,\frac{6}{7}$$

משימה מס׳ 4 – פתרון משוואות שחלק מהנעלמים מופיעים עם סימן עצרת(!)

משוואות מסוג זה קשורות ללימוד המושגים עצרת ותמורות וניתן לשלב אותן במהלך לימוד הנושאים הללו.

בעיה – להוכיח שלמשוואה $x! + y! = 10z + 9$ אין פתרון שלמים.

פתרון – פתרון עם ניתוח מלא הובא במאמר קודם[12]. הפתרון המוצג כאן מבוסס על רישום הערכים האפשריים לכל אחד מהאגפים. הערך של האגף השמאלי תמיד חיובי (לפי הגדרת המושג עצרת) והדבר מחייב שגם האגף הימני יהיה תמיד חיובי וערכו אי-זוגי (למה?). נרשום את ערכי האגפים עבור ערכים שונים של x, y ו-z.

x	y	x!+y!	x	y	x!+y!
0	0	2	4	4	48
1	0	2	5	0	121
1	1	2	5	1	121
2	0	3	5	2	122
2	1	3	5	3	126
2	2	4	5	4	144
3	0	7	5	5	240
3	1	7	6	0	721
3	2	8	6	1	721
3	3	12	6	2	722
4	0	25	6	3	726
4	1	25	6	4	744
4	2	26	6	5	840
4	3	30	6	6	1440

z	10z + 9
0	0
1	19
2	29
3	39
4	49
5	59
6	69
⋮	⋮

רואים ש-9 הוא הערך היחידי האפשרי לספרת האחדות של האגף הימני. הערכים האפשריים לספרת האחדות של האגף השמאלי עד כולל לזוג $(x,y) = (4,4)$ הם: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 0. והחל מהזוג (5,0) הערכים האפשריים הם: 6, 4, 2, 1, 0.

התבוננות בערכים האפשריים לשני האגפים מראה שאין אף צירוף של זוג מספרים (x,y) שעבורם הערך $x! + y!$ יסתיים בספרה 9, כלומר אין שלישייה של מספרים שלמים המקיימת את המשוואה, מ.ש.ל.

דוגמאות נוספות – לפתור את המשוואות הבאות:

1. $x! + y! = 10z + 8$
   הפתרון: (4,4,4)
2. $x! + y! = 10z + 6$
   הפתרונות: (4,2,2), (5,3,12), (6,3,72) ועוד פתרונות.

3. $3x! + y! = 10z + 9$
הפתרונות: (3,0,1) ו-(3,1,1)

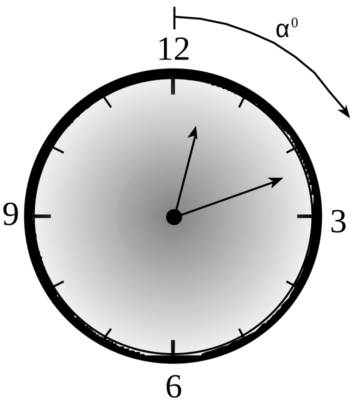
4. $x! + y! +(x+y) = 10z + 9$
הפתרון: (4,0,2)

5. $x! + y! +(x+y)! = 10z + 5$
הפתרונות: (2,0,0), (4,1,14)

6. $x! + y! = 10z$
כל זוג $x,y \geq 5$ הם פתרונות המשוואה, ולפיכך יש לה אינסוף פתרונות.

7. $x! + y! = 8z$
הפתרון: (7,6,6)

משימה מס׳ 5 – מתי יתלכדו שנית מחוגי השעון?



בשעה 12.00 מתלכדים השעות והדקות. כעבור כמה דקות יתלכדו שוב שניהם? (המקור לבעיה[13]).

דרך הפתרון:

הקשר בין ω – המהירות הזוויתית (ביחידות של מעלות לדקה), ובין α – זווית הסטייה של המחוג (במעלות) ו t – הזמן שחלף (בדקות) נתון על-ידי $\alpha = \omega\ \ t$ (ציור מס׳ 7)

המהירויות הזוויתיות של המחוגים הן:

$$\omega_{\text{מחוג דקות}} = 6^0 / \min$$

$$\omega_{\text{מחוג שעות}} = 0.5^0 / \min$$

מכאן,

$$\alpha_{\text{מחוג דקות}} = 6t$$

$$\alpha_{\text{מחוג שעות}} = 0.5t$$

כדי למצוא כעבור כמה דקות הם שוב התלכדו יש להוריד, מסטיית מחוג הדקות, את המעלות שהוא עבר ב-n הסיבובים שהסתובב עד ההתלכדות, ולהשוות את הסטיות:

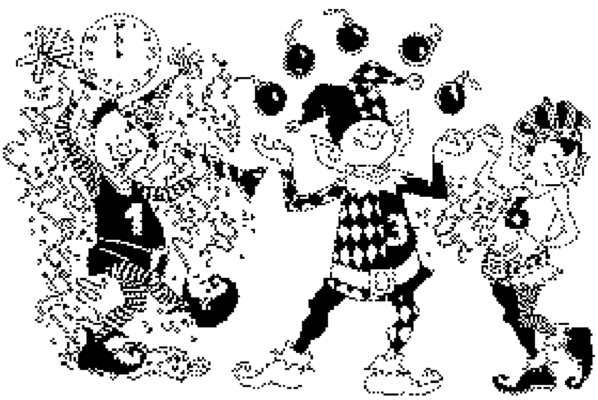
$$6t - 360n = 0.5t \Rightarrow t = \frac{720}{11}n$$

מכיוון ש-n מקבל ערכים שלמים בלבד: ... 1 ,2 ,3 לכן המחוגים יתלכדו כעבור $\frac{720}{11}, \frac{1440}{11}, \frac{2160}{11}, \ldots$ דקות.

הזמן הראשון שבו הם יתלכדו הוא $65\frac{5}{11}$ דקות.

משימה מס׳ 6 – כיצד על הליצנים להסתדר?

על חזה החולצה של שלושה ליצנים מופיעים המספרים 6, 3, 1, כנראה בציור מס׳ 8. כיצד עליהם להסתדר על-מנת שהמספר שיתקבל יחד יתחלק ב-7 ללא שארית?



ציור מס׳ 8

הבעיה לקוחה מתוך דף חידות לקראת פורים שהוצא על-ידי[14], והיא יכולה לשמש למספר מטרות:

* הכרת המושגים: תמורה, מספר אפשרויות לסדר בשורה קבוצת אלמנטים שונים, עצרת.
* לימוד כלל החלוקה של מספר ב-7.
* מציאת פתרונות יצירתיים.

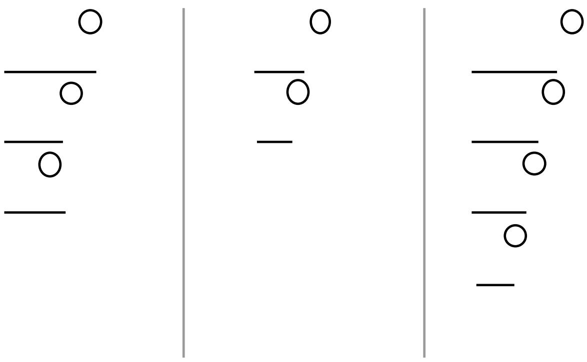
דרך הפתרון:

לכאורה נראה שמספר האפשרויות לסדר את הליצנים הוא 6. כלומר, לקבל את המספרים: (631), (613), (361), (316), (163), (136)
ויש לבדוק כל מספר אם אכן הוא מתחלק ב-7.
ניתן לבדוק זאת על-ידי חלוקה ידנית, או על-ידי שימוש במחשבון כמקובל בעידן הנוכחי, או על-ידי שימוש בכלל החלוקה ב-7, שבדרך כלל אינו נלמד בחינוך היסודי או העל-יסודי.

כלל החלוקה ב-7

את ספרת האחדות של המספר מכפילים ב-2 ואת התוצאה מורידים מיתרת המספר. באותו אופן ממשיכים עד אשר מקבלים שארית קטנה. במידה והשארית שווה לאפס או למכפלה של 7, אזי המספר יתחלק ב-7.

נדגים שיטה זו על שלושה מספרים:



תוך שימוש באחת מהשיטות לבדיקת ששת המספרים של הליצנים מתברר שאף מספר אינו מתחלק ב-7. אולי השאלה שגויה!!

התשובה לא! מדובר בליצנים והרי מספיק שבעל הספרה 6 יעמוד על ידיו ותתקבל הספרה 9 ויתכנו ששת המספרים הבאים: (931), (913), (391), (319), (193), (139)

בדיקת החלוקה ב-7 נותנת שהסידור היחיד הוא המספר 931 שמתחלק ב-7.

מאחר שעוסקים בליצנים, הרי תתכנה עוד 3 אפשרויות נוספות פרי יצירתיות:

* 63^1 – הליצן בעל הספרה 1 ״מתמקם״ על כתיפיו של בעל הספרה 3.
* 91^3 – הליצן בעל הספרה 6 עומד על ידיו והליצן בעל הספרה 3 ״מתמקם״ על כתיפיו של בעל הספרה 1.

* 63 – הליצן בעל הספרה 1 מסתתר מאחורי שני חבריו.

משימה דומה אפשר לתת לתלמידים עם ארבעה ליצנים בעלי הספרות, 9, 6, 4, 1 ויתקבלו מספר תשובות עוד לפני השימוש באופציה של עמידה על הידיים או התמקמות על הכתפיים.

משימה מס׳ 7 – איזה כרטיסים להחליף?

המשימה דומה למשימה הקודמת. על-גבי כרטיסים רשומים מספרים. הכרטיסים מסודרים בשני טורים, כנראה בטבלה מס׳ 6. איזה זוג כרטיסים יש להחליף בין הטורים כדי לקבל סכומים שווים בשניהם?

דרך הפתרון:

לכאורה מאחר והסכום הכולל של כל המספרים שעל-גבי הכרטיסים הוא 121, הרי ששום החלפה לא תביא לשיוויון בין הסכומים של הטורים. אם כך, אין פתרון למשימה! חשיבה יצירתית אכן נותנת פתרון. כאשר מעבירים במהופך את הכרטיס עם המספר 6 מטור א׳ לטור ב׳, פוחת הסכום בטור א׳ ל-55 וגדל הסכום בטור ב׳ ל-69. העברת הכרטיס עם המספר 7 מטור ב׳ לטור א׳ מביאה לשיוויון של 62 בסכום הטורים.

משימה מס׳ 8 – לקבל את המספר 25

נתונות הספרות 8, 6, 4, 2. יש לקבל את המספר 25 בעזרת פעולות החשבון האפשריות: חיבור, חיסור, כפל, חילוק, חזקה, שורש, עצרת (!), סוגריים, הסימן ∞ וכן על-ידי הצמדת ספרות. פתרונות אפשריים (יתכן שישנם נוספים):

* $\left(8-6:\sqrt{4}\right)^2$ או $\sqrt{(8-6:2)^4}$
* $(6\ \ 8+2):\sqrt{4}$
* $4!+8:(6+2)$ או $4!+(8-2):6$ או $4!+(8-6):2$
* $28-6:\sqrt{4}$
* $4\ \ 6+\sqrt[\infty]{8-2}$ או $4\ \ 6+\sqrt[\infty]{8+2}$ או $4\ \ 6+\sqrt[\infty]{8:2}$

האפשרות האחרונה יכולה לשמש כדוגמה ללימוד הנושא של גבולות.

משימה מס׳ 9 – למצוא מספרים מיוחדים

למצוא מספר המתחלק ל-7 בלא שארית וכשמחלקים אותו לאחד מהמספרים 6, 5, 4, 3, 2 מתקבלת שארית 1.

הערה: למצוא את המספר הקטן ביותר העונה לדרישה ואת הכלל למציאת שאר המספרים.

דרך הפתרון: ניתן לרשום את סדרת המספרים שבחלוקתם ב-2 מתקבלת שארית 1 (כל המספרים האי-זוגיים), את סדרת המספרים שבחלוקתם ב-3 מתקבלת שארית 1 (...13, 10, 7, 4) וכך את שאר הסדרות, ולהוסיף את סדרת המספרים המתחלקים ב-7 ללא שארית. מקבלים סדרות עם מספרים רבים עד שמקבלים את המספר הראשון המופיע בכל הסדרות.

דרך קצרה יותר, היא להתמקד במספרים שספרת האחדות שלהם היא 1 או 6 כי מספרים אלו נותנים שארית 1 בחלוקה ל-5. האפשרות שמספר מסתיים ב-6, היא בלתי אפשרית כי חלוקתו ל-2 נותנת שארית 0. לכן ספרת האחדות של המספר חייבת להיות אחת.
המספרים שיכולים לענות לדרישה, אותם המספרים המתחלקים ל-7 בלא שארית, וספרת האחדות שלהם 1, הם הסדרה החשבונית הבאה:

..., 1211, 1141, 1071, 1001, 931, 861, 791, 721, 651, 581, 511, 441, 371, 301, 231, 161, 91, 21.

על-ידי בדיקת המספרים הנותנים בחלוקתם ל-6, 5, 4, 3, 2 שארית 1 מקבלים שבסדרת המספרים העונים לדרישות הם: ..., 1141, 721, 301 כלומר סדרה חשבונית אינסופית שאיברה הראשון 301 והפרשה 420.

ראוי לשאול את התלמידים מדוע הפרש הסדרה 420? מה הקשר למספרים 7, 5, 4, 3, 2?

סיכום

תשע המשימות שהוצגו כמשימות הנאה, תרגול וחשיבה, יש בהן להראות את היופי הגלום במתמטיקה ואת העושר של עולם המספרים. ניתן להשתמש בדוגמאות הנ"ל כבסיס לבניית חידות ואתגרים נוספים. דרכי הניתוח, שהובאו לכל משימה יכולים לשמש ככלים להתמודדות עם בעיות אחרות.

מראי מקומות

1. אבן-שושן, א', בק, י' (1947). חוד חידה. ירושלים, ש' זק ושות.
2. בן עזרא, א' (1983, 1994). שיעור חופשי. חיפה, קרטוב.
3. ברנס, מ' (1979). אני שונא מתמטיקה. תל-אביב, ניצנים.
4. בן-ציון, א' (1985). לתפוס ראש – חידות ושעשועי היגיון. תל-אביב, תמר.
5. מכללת ירושלים (1996). אלף אפס – חוברת שעשועי מתמטיקה. ירושלים, המכללה.
6. אביטל, ש' (1991). מתמטיקה בהנאה. תל-אביב, עם עובד.
7. Fraser, P. & Young, E. (1972). **Puzzels and Games.** Oxford University Press
8. Rademacher, H. & Toeplits, O. (1994). **The Enjoyment of Mathematics**. Princton University Press
9. הירש, ג' (1999). מתמטיקה אחרת. אבן יהודה, רכס.
10. שעות נוספות (מדור), מוסף 7 ימים – ידיעות אחרונות, 26.2.1999.
11. סטופל, מ' (תשנ"ז). משימות ושעשועי מתמטיקה כאמצעי ליצירת הנעה והשבחת לימודי המקצוע, שאנן, ג', שנתון המכללה הדתי לחינוך, חיפה, עמ' 149.
12. אוקסמן, א', סטופל, מ' (1998). חידות, בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד, על"ה – עלון למורה המתמטיקה, 22.
13. שעות נוספות (מדור), מוסף 7 ימים – ידיעות אחרונות, 26.3.1999.
14. הטכניון (אדר, תשנ"ט). תבלינים מתמטיים (מתוך הסדרה), לעשות מתמטיקה – מחר 98, חיפה, המחלקה להוראת המדעים.