משה סטופל, רחל מוגילבסקי

משימות הוכחה בהנדסה המתבססות על בנייה חילופית

תקציר

הבנייה החילופית היא אמצעי לפישוט דרכי הפתרון של בעיות הנדסיות. המיומנות למציאת בנייה חילופית מתאימה נרכשת ומשתפרת תוך כדי התמודדות עם מגוון של בעיות בדומה לאלו המופיעות במאמר. להבלטת יופיה של המתמטיקה, הובאו לחלק מהמשימות פתרונות אחדים.

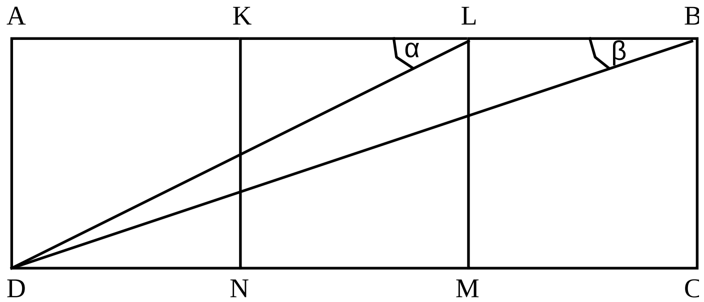
מבוא:

הנדסת המישור, הוא אחד מהענפים היפים של המתמטיקה, הבנוי על משפטי יסוד ומתפתח לרמות גבוהות ומורכבות רבה. ככל שמתקדמים בתחום, נדרשת חשיבה עמוקה ברמה של אנליזה וסינתזה לאחר הטמעה ויכולת יישום של משפטי יסוד וטכניקה בסיסית (חפיפה ודמיון משולשים, העתקה וסיבוב, תכונות של מצולעים וכו׳).

פתרון בעיות רבות, שאינן מורכבות במיוחד, מחייב דרכים בלתי-סטנדרטיות, שימוש באינטואיציה, ראייה מפותחת, חשיבה מקורית, שילוב בניות חילופיות, כגון: העברת קווי עזר, העתקת קטעים, סיבוב צורות גיאומטריות, שימוש בסימטריה וכד׳. ככל שמתנסים בפתרון בעיות ייחודיות, רוכשים ומפתחים את המיומנויות הנ״ל, שמאפשרות התמודדות עם אתגרי חשיבה בתחומים אחרים, ולא רק במתמטיקה.

לקט הבעיות המוצגות במאמר זה, מהווה דוגמה לשימוש בבניות חילופיות בדרך פתרון פשוט. הלקט נאסף ממקורות שונים ושולבו בו בעיות מקוריות. לחלק מהבעיות הובאו כמה דרכי פתרונות, כדי להבליט את עושרה ויופיה של המתמטיקה. למתעניינים בנושא מומלץ לעיין במקורות 1-4.

משימה מס׳ 1 – הוכחת סכום זוויות



נתון מלבן ABCD המורכב משלושה ריבועים זהים: AKND, KLMN ו- LBCM (ציור מס׳ 1).

העבירו את הישרים DL ו-DB היוצרים זוויות α ו-β עם הצלע AB. יש להוכיח כי $\alpha+\beta=45^0$.

בעלי ידע בטריגונומטריה ברמה של 4-5 י״ל יכולים להוכיח זאת

תארנים: בניות הנדסיות חילופיות; אתגרי חשיבה; אינטואיציה מתמטית; יישומים הנדסיים.

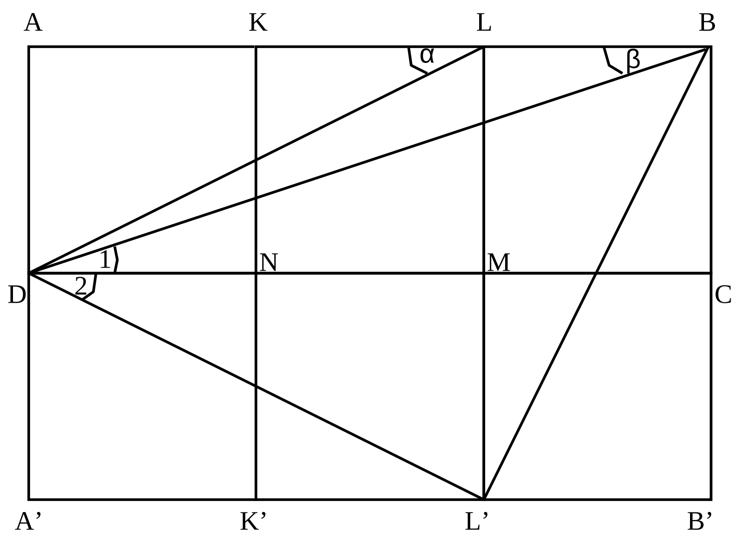
בקלות. נביא תחילה את הדרך הטריגונומטרית.

הוכחה בדרך טריגונומטרית
נסמן את אורך צלע הריבוע ב-a.

$$tg\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, tg\beta = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

לפי הנוסחה של $tg(\alpha+\beta)$ נקבל:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 => \alpha+\beta = 45^0$$,מ.ש.ל.



הוכחה בדרך הנדסית על-ידי בנייה חילופית
נשכפל את המלבן המקורי ונקבל את המלבן ABB'A' הנראה בציור מס' 2.
נעביר את הישרים BL' ו-DL' ונקבל משולש DL'B ש"ש (BL' ו-DL' אלכסונים במלבנים חופפים).
ניתן להראות בקלות ש-$\measuredangle D_1=\beta$ ו-$\measuredangle D_2=\alpha$
כלומר, $\measuredangle BDL=\alpha+\beta$.
על-סמך משפט פיתגורס במשולשים DAL ו-DAB נקבל:

$$BL' = DL' = a\sqrt{5}, \quad DB = a\sqrt{10}$$

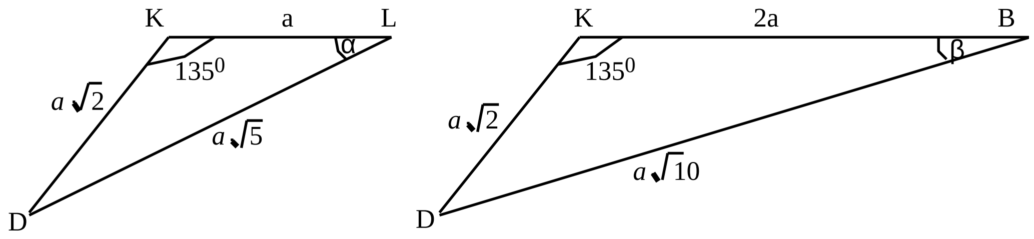
מכאן מקבלים שמשולש DL'B הוא גם ישר זווית

$$\left(\left(a\sqrt{5}\right)^2 + \left(a\sqrt{5}\right)^2 = \left(a\sqrt{10}\right)^2\right)$$

ועל כן כל אחת מזוויות הבסיס שלו הן בנות 45^0 (למשל $\measuredangle BDL'$).
כלומר: $\alpha+\beta = 45^0$ מ.ש.ל.

הוכחה בדרך הנדסית על-ידי דמיון משולשים

נתבוננן במשולשים LKD ו-DKB (ציור מס' 3).



זוויות $\measuredangle DKB = \measuredangle DKL$ – זווית משותפת (יש להוכיח שערכה 135^0), יחס הצלעות הכולאות את הזווית שווה:

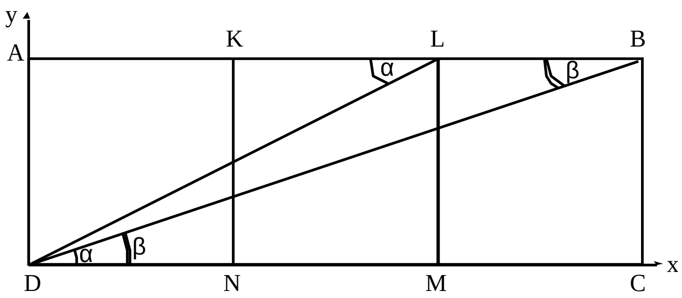
$$\frac{DK}{KL} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}; \qquad \frac{BK}{DK} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

לכן משולשים LKD ו-DKB דומים.

מהוכחת הדמיון נובע שהמשולשים מורכבים מהזוויות $\alpha, \beta, 135^0$ ועל כן $\alpha+\beta = 45^0$, מ.ש.ל.

ראה בעיה דומה (מס' 2) במקור

מס' 5.



הוכחה בדרך אלגברית

נבנה מערכת צירים שראשיתם בנקודה D (ציור מס' 4).

נתבונן במספרים מרוכבים המתאימים לקדקודים של הצורה.

$$Z_L = 2a + ai = DL(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$Z_B = 3a + ai = DB(\cos\beta + i\sin\beta)$$

נכפול את המספרים:

$$Z_L \; Z_B = (2a + ai)(3a + ai) = 6a^2 + 5a^2 i - a^2 = 5a^2(1 + i) =$$

$$= 5\sqrt{2}a^2\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right)$$

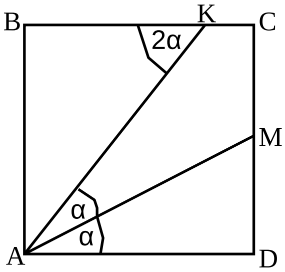
מצד שני,

$$Z_L \ Z_B = DL \ DB\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)-i\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

מהשוואת הביטויים מקבלים:

$\alpha+\beta=45^0$, מ.ש.ל.

משימה מס׳ 2 – הוכחת שוויון בין קטעים



בריבוע ABCD הנקודות K ו-M נמצאות על הצלעות BC ו-CD בהתאמה, כאשר AM הוא חוצה הזווית KAD (ציור מס׳ 5). יש להוכיח כי אורך הקטע AK שווה לסכום אורכי הקטעים DM ו-BK (לא תלוי בזווית α).

נסמן תחילה את אורך צלע הריבוע ב-a וב-α את הזוויות:
$\measuredangle KAM=\measuredangle MAD=\alpha$.

נביא תחילה הוכחה טריגונומטרית לבעלי ידע מתאים.

הוכחה בדרך טריגונומטרית.

בהתאם לסימון הזווית α מקבלים $\measuredangle AKB=2\alpha$

$$\sin 2\alpha=\frac{a}{AK} \Rightarrow AK=\frac{a}{\sin 2\alpha}$$

$$ctg2\alpha=\frac{BK}{a} \Rightarrow BK=a\,ctg2\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{MD}{a} \Rightarrow MD=a\,tg\alpha$$

יש להוכיח כי

$$\underset{AK}{\frac{a}{\sin 2\alpha}}=\underset{BK}{a\,ctg2\alpha}+\underset{MD}{a\,tg\alpha}$$

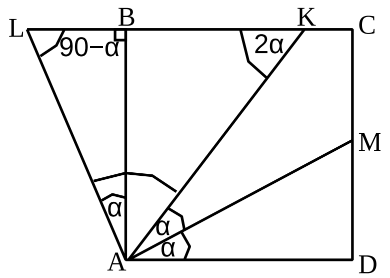
או

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=ctg2\alpha+tg\alpha$$

$$ctg2\alpha+tg\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\left(2\alpha-\alpha\right)}{\sin 2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}$$

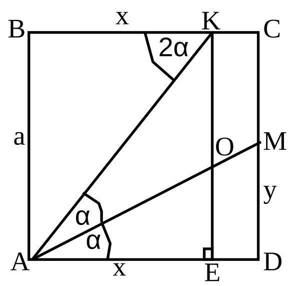
מ.ש.ל.



הוכחה על-ידי בנייה חילופית

נסובב את המשולש ADM ב-90° סביב הנקודה A (ציור מס׳ 6). מתקבל משולש ABL החופף לו.

חישוב זוויות במשולש KAL מראה שהמשולש ש״ש ($\measuredangle$ KLA= $\measuredangle$ KAL=90-α) ולכן, KA=LK=LB+BK=MD+BK (בהסתמך על כך ΔABL ΔADM), מ.ש.ל.



הוכחה על-ידי דמיון משולשים ומשפט חוצה הזווית

נוריד אנך KE לצלע AD. האנך חותך את AM בנקודה O (ציור מס׳ 7).

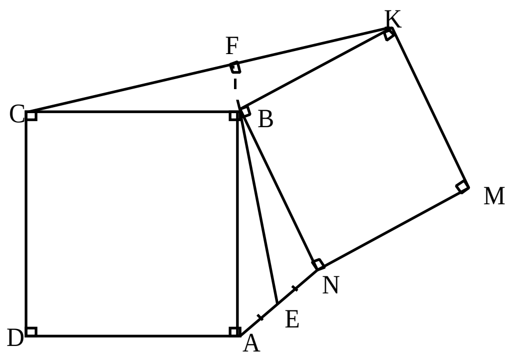
נסמן: BK = x ו-MD = y. יש להוכיח ש-AK = x+y.

לפי משפט חוצה הזווית, $\frac{AK}{x} = \frac{KO}{OE}$.

KO = a-OE , ולכן $AK = x\,\frac{a - OE}{OE}$

על סמך הדמיון בין המשולשים AEO ו-ADM נוכל לרשום את היחס הזה: $\frac{OE}{y} = \frac{x}{a}$, או $OE = \frac{xy}{a}$

נציב זאת בביטוי שצוין למעלה ונקבל $AK = x\,\frac{a - \frac{xy}{a}}{\frac{xy}{a}} = \frac{a^2 - xy}{y}$



על סמך משפט פיתגורס במשולש ABK, נוכל לרשום, $a^2 = AK^2 - x^2$

והצבה בקשר הקודם נותנת, $yAK = AK^2 - x^2 - xy$.

נעביר את xy לאגף שמאל ונוציא y מחוץ לסוגריים, $y(AK+x) = (AK+x)(AK-x) = AK^2 - x^2$

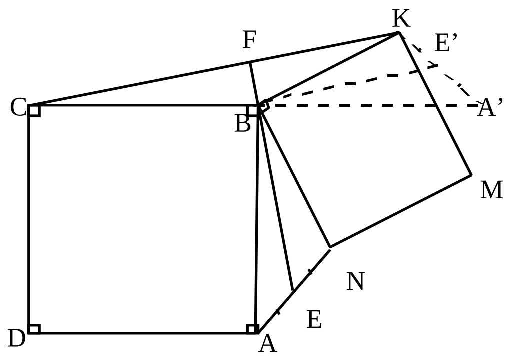
נצמצם בשני האגפים את AK+x (שונה מאפס) ונקבל, AK = x+y , מ.ש.ל.

משימה מס׳ 3 – הוכחת קטעים ניצבים

ABCD ו-BKMN הם שני ריבועים בעלי קודקוד משותף, ו-BE תיכון במשולש ABN (ציור מס׳ 8).

יש להוכיח שהמשכו של BE הוא גובה במשולש CBK.

דרך א׳ – הוכחה על-ידי בנייה חילופית באמצעות סיבוב משולש



נסובב את המשולש BNA סביב נקודה B בזווית של 90° כך שהצלע BN תתלכד עם הצלע BK. קודקודיו של המשולש שסובב הם BKA' והתיכון שלו BE'. הצלע BA' של המשולש BKA' היא המשכה של הצלע BC, היות והצלע BA סובבה ב-90°. לפיכך CBA'K הוא משולש.

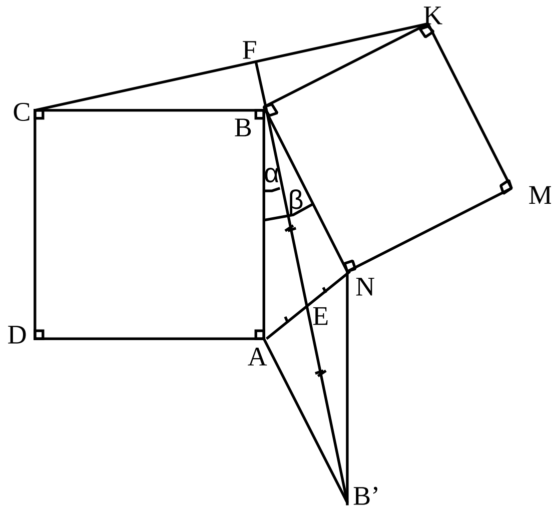
מאחר ש-CB = BA = BA', וכן KE' = E'A' (מהנתון AE = EN) מכאן ש-BE' הוא קטע אמצעים במשולש CA'K (ציור מס׳ 9).

מתכונת קטע האמצעים נובע ש-BE'||CK.

כשסובב משולש BAN ב-90° סובב גם הישר BE ב-90°, כלומר, BE' BE.

מאחר שהוכחנו ש-BE'||CK וכן BE' BE, לכן BE והמשכו BF מאונך ל-CK, מ.ש.ל.

דרך ב׳ – הוכחה על-ידי בנייה חילופית באמצעות בניית מקבילית



נסמן זוויות: ∡ ABE=α, ∡ ABN=β. נאריך את הקטע BE כגודלו מעבר לנקודה E. המרובע BNB'A הוא מקבילית (האלכסונים חוצים זה את זה), כפי שמתואר בציור מס׳ 10.

∡ BAB' = 180-β (זוויות סמוכות במקבילית)

∡ KBC = 180-β (חישוב זוויות מסביב לקודקוד B).

ולכן ΔBAB' ΔCBK (צ.ז.צ.)

מחפיפת המשולשים נובע כי ∡ KCB = α.

מצד שני, ∡ FBC = 90^0-α (השלמה לזווית שטוחה). חישוב זווית במשולש CBF נותן,

∡ CFB = 180^0-(∡ FCB+∡ CBF) = 180^0-(α+90^0-α) = 90^0, מ.ש.ל.

משימות המשך למשימה מס׳ 3

מעבירים את הישרים AK ו-CN הנחתכים בנקודה P (ציור מס׳ 11).

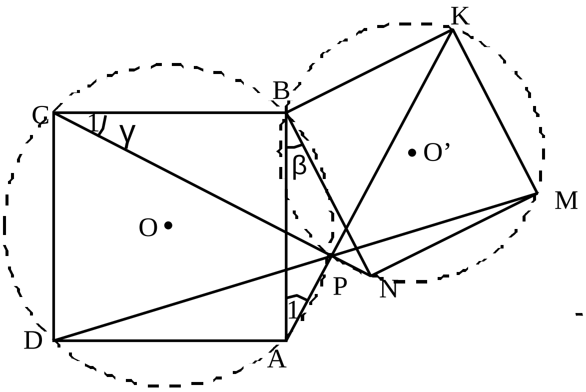
יש להוכיח כי:

א. CN = AK

ב. הנקודה P היא נקודת החיתוך השנייה (בנוסף לנקודה B) שבה נחתכים המעגלים החוסמים את הריבועים.

ג. CN AK

ד. הישר DM עובר דרך הנקודה P.



הוכחות:

נסמן $\measuredangle ABN=\beta$, $\measuredangle BCN=\gamma$.

א. ΔABK ΔCBN (צ.ז.צ. – שתי צלעות של הריבועים והזווית ביניהם – $90+\beta$).
מההחפיפה נובע: CN=AK (צלעות מול זוויות שוות במשולשים חופפים), מ.ש.ל.

ב. מחפיפת המשולשים בסעיף א׳ נובע גם ש-
$\measuredangle C_1=\measuredangle A_1=\gamma$
במרובע DCPA:
$\measuredangle DCP=90-\gamma$, $\measuredangle DAP=90+\gamma$,
ולכן, $\measuredangle DCP+\measuredangle DAP=180^0$, כלומר, DCPA מרובע חסום במעגל.
היות שהנקודות D,C,A קובעות את המעגל החוסם את הריבוע ABCD, הרי שנקודה P שייכת לאותו המעגל.
באותה דרך מוכיחים שגם המרובע NPKM הוא בר-חסימה ולכן הנקודה P שייכת למעגל החוסם את הריבוע BKMN, מ.ש.ל.

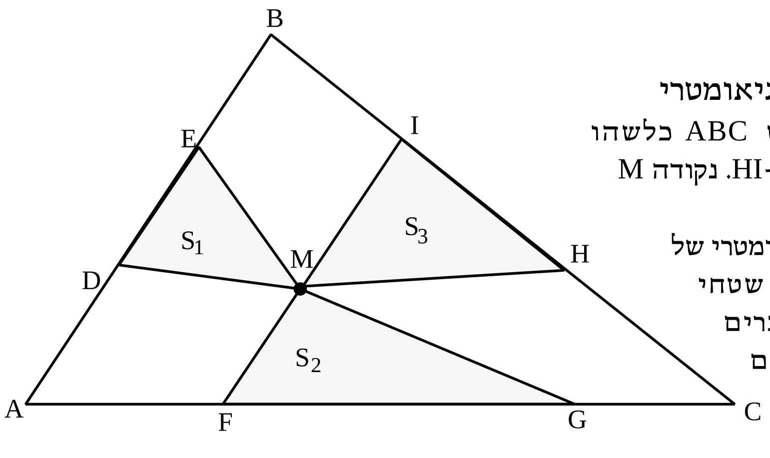
ג. מההוכחה של סעיף ב׳, שמרובע DCPA הוא בר-חסימה, נובע ש-$\measuredangle CDA+\measuredangle CPA=180^0$, מאחר שאחת משתי הזוויות היא בת 90^0 ($\measuredangle CDA$), חייבת גם המשלימה שלה ($\measuredangle CPA$) להיות בת 90^0, דהיינו, CN AK, מ.ש.ל.

ד. $\measuredangle DPM=\measuredangle DPA+\measuredangle APN+\measuredangle NPM$
$\measuredangle APN=90^0$ לפי סעיף ג׳.
$\measuredangle DPA=\measuredangle NPM=45^0$ – זוויות היקפיות הנשענות על קשת של רבע מעגל, מכאן ש-$\measuredangle DPM=180^0$, כלומר, DPM – קו-ישר. מ.ש.ל.

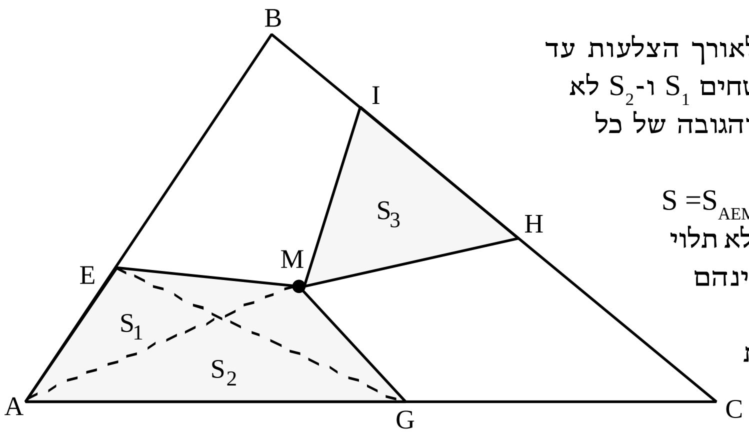
הערה: יש לציין, שגם במשימות הנ״ל, התכונות שהוכחו אינן תלויות באורכי צלעות הריבועים ובזווית שביניהם.

משימה מס׳ 4 – מקום גיאומטרי

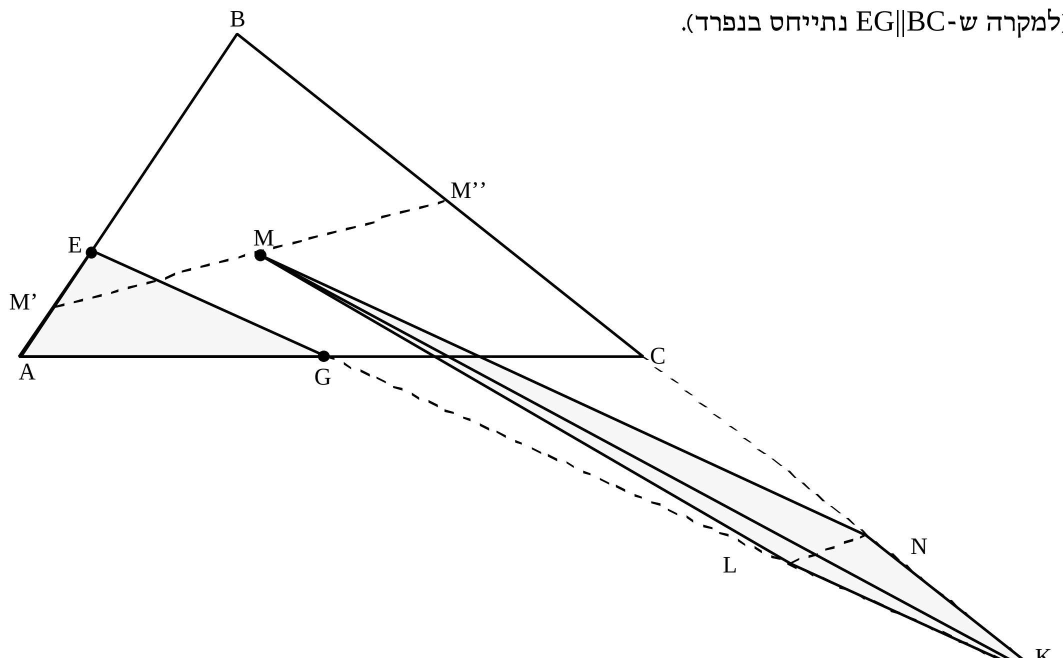
על צלעותיו של משולש ABC כלשהו מסמנים קטעים: DE, FG ו-HI. נקודה M נמצאת בתוך המשולש.
יש למצוא את המקום הגיאומטרי של הנקודות M כך שסכום שטחי שלושת המשולשים הנוצרים מחיבור הנקודה M עם הקטעים שעל הצלעות, יהיה קבוע (ציור מס׳ 12).



דהיינו,
$S=S_{1MDE}+S_{\Delta MFG}+S_{\Delta MHI}=Constant$.
נסמן שטחי משולשים אלו ב- S_1, S_2 ו- S_3.



תיאור הפתרון
נזיז את הקטעים DE ו-FG לאורך הצלעות עד לקודקוד A (ציור מס׳ 13). השטחים S_1 ו-S_2 לא השתנו (משום שאורך הבסיס והגובה של כל משולש לא השתנו).
$S=S_{AEMG}+S_{\Delta MHI}=S_{\Delta AEG}+S_{\Delta MEG}+S_{\Delta MHI}$
השטח של משולש AEG קבוע ולא תלוי ב-M (שתי צלעות והזווית בינהם קבועות).
כלומר, הבעיה מתמקדת במציאת המקום הגיאומטרי של הנקודה M כך ש-$S_{\Delta MEG}+S_{\Delta MHI}=Constant$
נאריך את קטע EG עד לנקודה K שבה הוא חותך את המשך הצלע BC. נזיז את הקטעים EG ו-HI לאורך הישרים עד לנקודה K, כפי שמתואר בציור מס׳ 14.
(למקרה ש-EG||BC נתייחס בנפרד).



על-פי נימוקים קודמים:

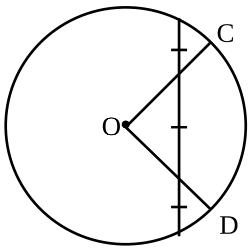
$S_{\Delta MEG}=S_{\Delta MLK}$, $S_{\Delta MHI}=S_{\Delta MNK}$

כלומר, $S_{\text{מקורי}}=S_{\Delta AEG}+S_{\Delta LNK}+S_{\Delta MLN}$.

שני השטחים הראשונים אינם תלויים ב-M (ראה נימוק קודם). לכן נותר למצוא את המקום הגיאומטרי של הנקודה M כך ששטח המשולש MLN יהיה קבוע.

ידוע שהקודקוד השלישי של כל המשולשים בעלי בסיס משותף ושווי שטח נמצא על ישר המקביל לבסיס.

על כן, המקום הגיאומטרי המבוקש, הוא הקטע "M'M העובר בתוך המשולש ABC דרך הנקודה M ומקביל לישר LN ‏(M'M"||LN).

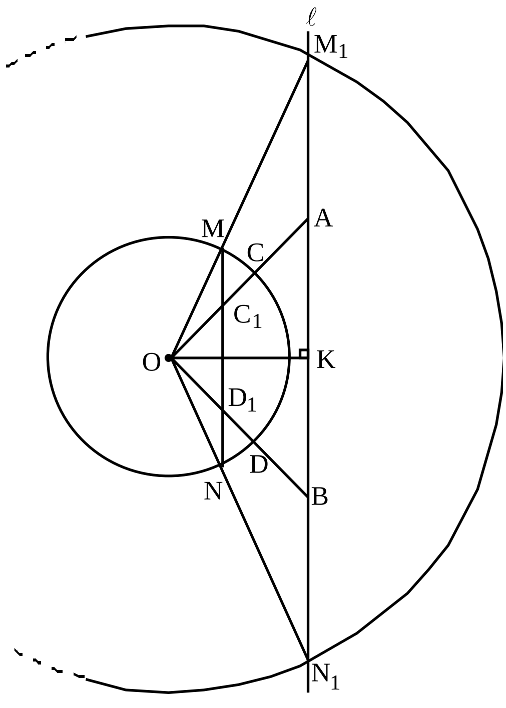


במקרה המיוחד ש-BC||EG המקום הגיאומטרי המבוקש הוא הקטע העובר דרך הנקודה M ומקביל ל-BC.

משימה מס׳ 5 – בניית מיתר הנחלק לשלושה חלקים שווים

במעגל נתון העבירו שני רדיוסים. יש לבנות מיתר הנחלק באמצעות הרדיוסים לשלושה חלקים שווים.

תיאור סכמתי של המשימה נראה בציור מס׳ 15.



תיאור הבנייה על-ידי בנייה חילופית

במעגל נתונים שני הרדיוסים OC ו-OD. נבנה את חוצה הזווית COD ונסמן עליו נקודה כלשהי K.

נבנה ישר ℓ העובר דרך הנקודה K ומאונך ל-OK.

נסמן ב-A וב-B את נקודות החיתוך של המשכי הרדיוסים OC ו-OD עם הישר ℓ.

על הישר ℓ נבנה קטעים: $AM_1 = BN_1 = AB$

מהנקודה O נחוג מעגל ברדיוס של ON_1 (או OM_1) כפי שמוצג בציור מס׳ 16.

המיתר M_1N_1 מורכב משלושה חלקים שווים.

נסמן ב-M ו-N את נקודות החיתוך של הרדיוסים OM_1 ו-ON_1 עם המעגל המקורי.

המיתר MN מקביל למיתר M_1N_1 (מכיוון ש- $\frac{OM}{OM_1}=\frac{ON}{ON_1}$)

נסמן ב-C_1 ו-D_1 את נקודות החיתוך של הרדיוסים OC ו-OD עם המיתר MN.

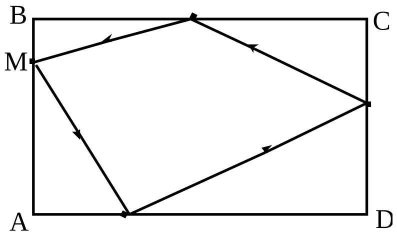
מדמיון של שלושת זוגות המשולשים:

$$\Delta OMC_1 \approx \Delta OM_1A, \quad \Delta OC_1D_1 \approx \Delta OAB, \quad \Delta OND_1 \approx \Delta ON_1B$$

נובע ש-$ND_1 = D_1C_1 = C_1M$, מ.ש.ל.

משימה מס׳ 6 – בדרך הקצרה ביותר

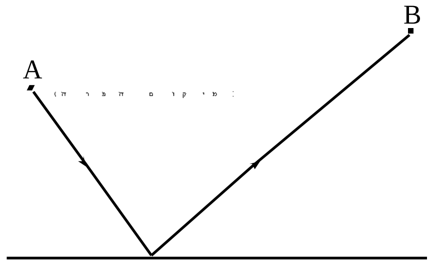
על אחת מצלעות מלבן ABCD נתונה נקודה כלשהי M. יש לנוע מהנקודה M אל הצלע AD ומשם אל הצלע CD וממנה אל הצלע BC וממנה לחזור לנקודה M. יש למצוא את הדרך הקצרה ביותר (ציור מס׳ 17).



למציאת הפתרון, נציג תחילה משימה יותר פשוטה המוכרת כבעיית ״הפרה באחו״ ונשתמש בעיקרון שלה לפתרון המשימה המקורית.

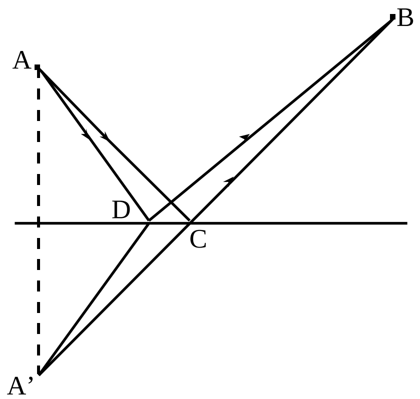
בעיית ״הפרה באחו״

לקראת ערב על הפרה לחזור מהאחו לרפת, בדרך הקצרה ביותר, אך תחילה עליה לעבור ליד הנחל ולשתות מים, כדי שהיא לא תהיה צמאה בלילה (ציור מס׳ 18).



למציאת הדרך הקצרה ביותר נסמן תחילה את הנקודה A' הסימטרית לנקודה A ביחס לנחל (ציור מס׳ 19).

נחבר את הנקודה A' עם הנקודה B ונסמן את נקודת החיתוך עם הנחל ב-C. יש להוכיח שהדרך ACB היא הקצרה ביותר, או כל דרך אחרת ארוכה יותר (למשל הדרך ADB).



$AC = A'C$ ו-$AD = A'D$ בשל הסימטריה של הנקודות A ו-A' ביחס לנחל.

$A'D+DB>A'B = A'C+CB$ (סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית) או $AD+DB>AC+CB$, מ.ש.ל.

על סמך העיקרון שהוצג נחזור אל משימה מס׳ 6.

נניח ש-MQPNM היא הדרך הקצרה ביותר (ציור מס׳ 20).

בונים נקודה M_1 סימטרית ל-M ביחס לישר AD ונקודה M_2 סימטרית ל-M ביחס לישר BC.

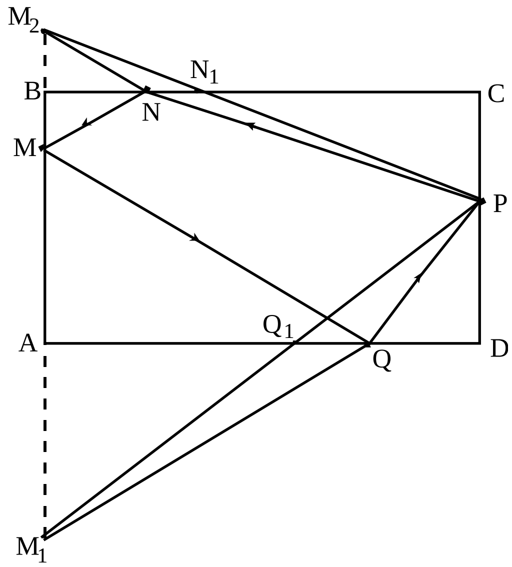
בשל הנקודות הסימטריות (M_1 ו-M_2),

$$MQ+QP+PN+NM = M_1Q+QP+PN+NM_2$$

ואילו הדרך,

$$MQ_1+Q_1P+PN_1+N_1M = M_1P+PM_2$$

יותר קצרה (הצלע במשולש קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות).

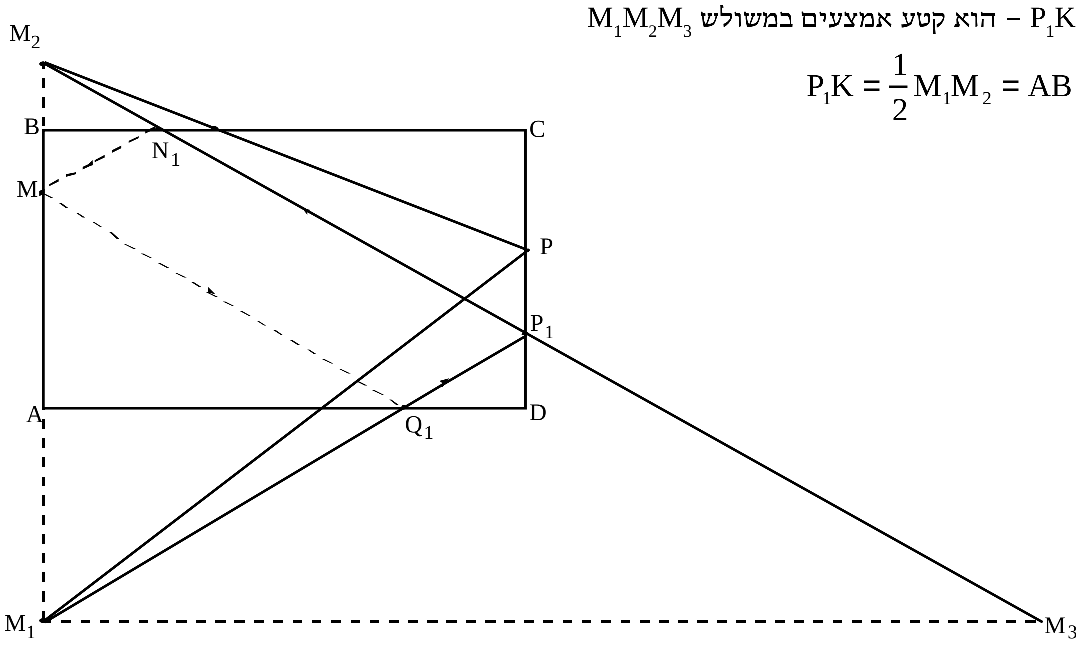


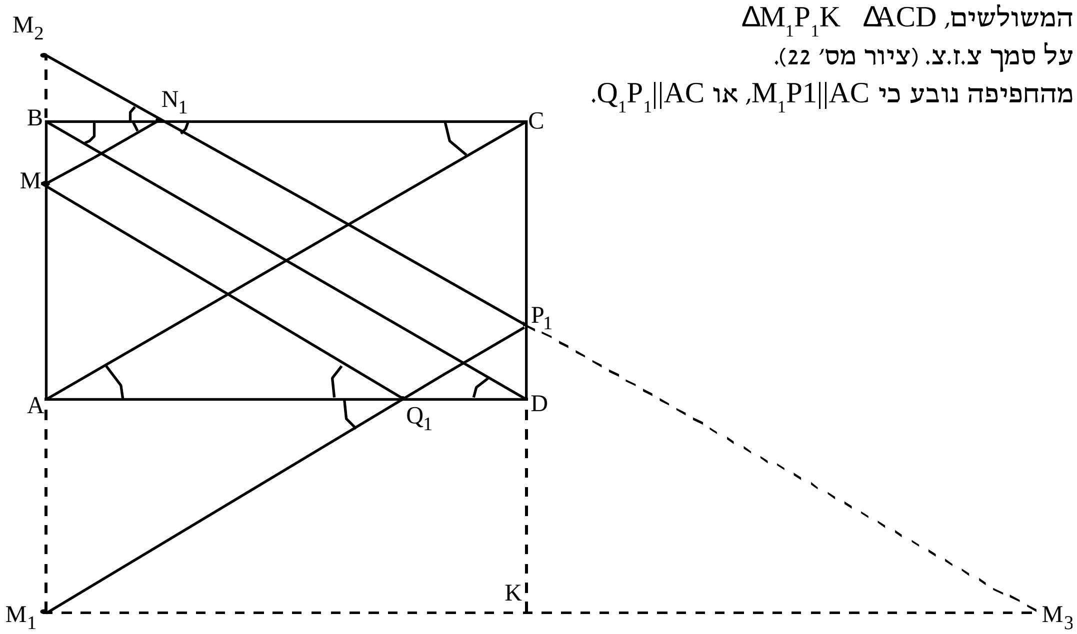
מסקנה:
הדרך הקצרה ביותר לכל נקודה P על הצלע CD מתקבלת כאשר מחברים את M_1 ואת M_2 עם P.
אך השאלה היא, איך מוצאים נקודה P כך שסכום הקטעים M_1P+PM_2 יהיה קצר ביותר.

דרך א׳:
למשולש M_1PM_2 יש בסיס קבוע M_1M_2 (שאורכו 2AB) וגובה קבוע (צלע המלבן, למשל BC).
ההיקף הקטן ביותר מתקבל כאשר המשולש הוא שווה שוקיים (ניתן להוכיח זאת על-ידי משפט פיתגורס או בעזרת חשבון דיפרנציאלי).
לשם כך יש לחצות את הקטע M_1M_2 ולבנות אנך אמצעי שחותך את הצלע CD בנקודה P, ובאמצעותה ניתן למצוא את הדרך הקצרה ביותר.

דרך ב׳:
מבצעים בנייה חילופית. בונים נקודה M_3 סימטרית לנקודה M_1 ביחס לישר CD, כמוצג בציור מס׳ 21.
ברור ש-$M_1P+PM_2 = M_3P+PM_2$ והסכום הקטן ביותר יתקבל בנקודה P_1 (חיבור M_2 עם M_3), דהיינו, $M_1P_1+P_1M_2 = M_2M_3$, והדרך הקצרה ביותר היא: $MQ_1+Q_1P_1+P_1N_1+N_1M$
נוכיח שאפשר לפשט את אופן הבנייה, כלומר, חיפוש הנקודות Q_1, P_1, N_1.
P_1K – הוא קטע אמצעים במשולש $M_1M_2M_3$

$$P_1K = \frac{1}{2}M_1M_2 = AB$$



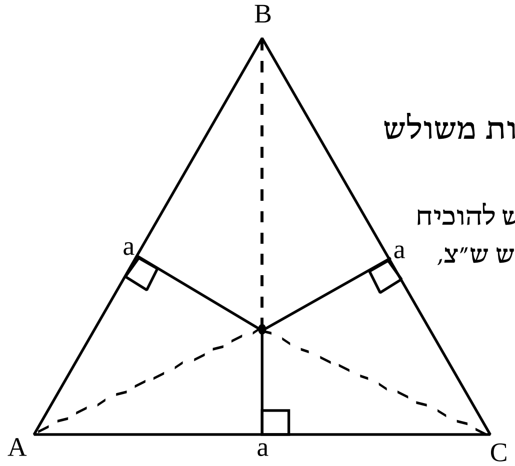


המשולשים, ΔACD ΔM_1P_1K
על סמך צ.ז.צ. (ציור מס׳ 22).
מהחפיפה נובע כי $M_1P1\|AC$, או $Q_1P_1\|AC$.

באותו אופן, ΔBAD ΔP_1KM_3, ולכן $N_1P_1\|BD$. משוויון הזוויות המסומנות (מהסימטריה, מחפיפת המשולשים, מקווים מקבילים) מקבלים שגם $MQ_1\|BD$ ו-$MN_1\|AC$, כלומר, $MQ_1P_1N_1$ – מקבילית.

המסקנה הנובעת מעובדה זו היא, שהבנייה החילופית למציאת הנקודות Q_1, P_1 ו-N_1 היא בניית קווים מקבילים כדלקמן:

1. בניית $MQ_1\|BD$
2. בניית $MN_1\|AC$
3. בניית $N_1P_1\|BD$
4. חיבור P_1 עם Q_1.



משימה מס׳ 7 – סכום מרחקי נקודה מצלעות משולש שווה צלעות

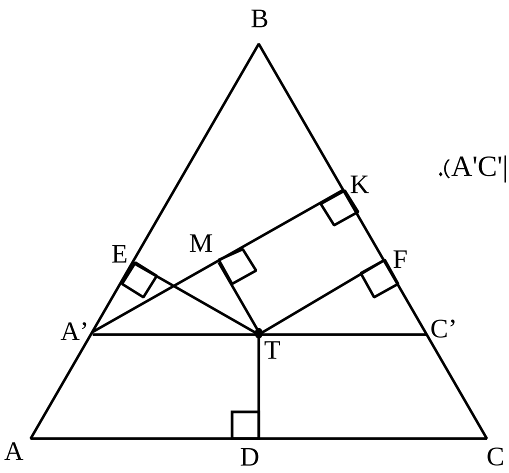
המשימה מופיעה כתרגיל במקור מס׳ 6 (עמוד 107). יש להוכיח שסכום מרחקי נקודה כלשהי, הנמצאת בתוך משולש ש״צ, משלושת הצלעות שווה לגובה המשולש.

דרך א׳ – הוכחה על-ידי חישוב שטחי משולש
נסמן ב-h_1, h_2 ו-h_3 את מרחקי הנקודה מהצלעות.
a – אורך צלע המשולש, h גובה המשולש (ציור מס׳ 23).

נחבר את הנקודה עם קודקודי המשולש ונקבל שלושה משולשים פנימיים שהגבהים שלהם h_1, h_2 ו- h_3 והבסיס שלהם a.
סכום שטחי המשולשים הפנימיים שווה לשטח המשולש שווה הצלעות.

$$\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{ah}{2} \Rightarrow h=h_1+h_2+h_3$$

דרך ב׳ – הוכחה בעזרת בנייה חילופית
נסמן ב-T את הנקודה שבתוך המשולש. יש להוכיח
כי TD+TE+TF = h
הוכחה:
דרך הנקודה T נעביר ישר A'C' המקביל לבסיס (A'C'||AC).
בשל המקבילות גם משולש A'BC' הוא שווה צלעות
(ציור מס׳ 24).
ברור ש-$h_{\Delta ABC} = h_{\Delta A'BC'}$+TD, כלומר, נותר להוכיח
ש- $h_{\Delta A'BC'}$= TE+TF
מהנקודה A' נוריד אנך לצלע BC החותך אותה
בנקודה K (A'K   BC). מאחר שמשולש A'BC'
הוא ש״צ, אזי $A'K=h_{\Delta A'BC'}$.
מהנקודה T נוריד אנך TM לישר A'K.
מתקבל מלבן TMKF, MK = TF
(צלעות נגדיות במלבן).

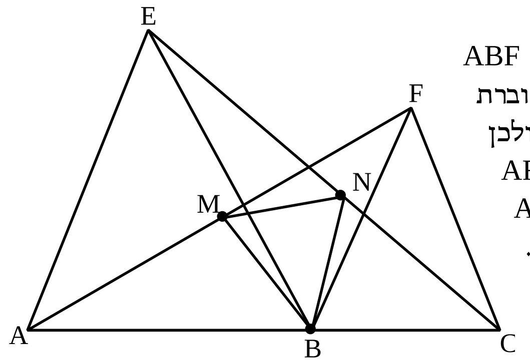


המשולשים, ΔTA'E   ΔA'TM (זוויות של 60° ו-90° וצלע משותפת).
מחפיפת המשולשים נובע ש-A'M = TE
$h_{\Delta A'BC'}$= A'K = A'M+MK = TE+TF
ולכן, $h_{\Delta ABC}$ = TE+TF+TD
מ.ש.ל.

הערה:
סביר להניח שההוכחה בדרך א׳ הרבה יותר פשוטה (קלה) מדרך ב׳. אולם, יש לתת את הדעת שברוב ספרי הלימוד בהנדסה הנושא של חישוב שטחים נלמד באחד מהפרקים האחרונים, ואילו התרגיל הנ״ל מופיע בפרקים הראשונים העוסקים במשפטי חפיפה, קווים מקבילים ותכונות מרובעים.

משימה מס׳ 8 – תכונה קבועה לנקודה שרירותית

על קטע AC בוחרים נקודה B כלשהי. על אותו הצד של הקטע בונים שני משולשים ש״צ AEB ו-BFC. תהא M נקודת האמצע של הקטע AF ותהא N נקודת האמצע של הקטע EC. יש להוכיח שהמשולש BMN הוא ש״צ (ציור מס׳ 25).



הוכחה על-ידי סיבוב
בהתייחס לציור מס׳ 25, נבצע סיבוב של משולש ABF בזווית בת 60° סביב נקודה B. כתוצאה מהסיבוב עוברת הנקודה A לנקודה E ונקודה F עוברת לנקודה C, ולכן משולש ABF עובר למשולש EBC. כלומר, הקטע AF עובר לקטע EC ונקודת האמצע M של הקטע AF עוברת לנקודה N – נקודת האמצע של הקטע EC.
מכאן נובע ש-$BM = BN$ ו-$\measuredangle MBN = 60^\circ$, כלומר, ΔMBN – משולש שווה צלעות, מ.ש.ל.

סיכום

במאמר הוצג לקט מגוון של 8 משימות הנדסיות שפתרונן מתקבל על-ידי בנייה חילופית. השימוש בבנייה חילופית הוא מפתח עיקרי להתמודדות עם משימות לא-קונבנציונליות. ההתנסות בסוג כזה של משימות תורם לפיתוח החשיבה, לחיפוש אחר רעיונות מקוריים המבליטים את עושרה ויופיה של המתמטיקה.

איסוף נוסף, ממקורות שונים, והכנת מאגר מגוון ועשיר של תרגולי הנדסה המבוסס על בנייה חילופית הוא אתגר למורי המתמטיקה, לחובביה ולשוחריה, ועשוי להעלות את דרגת הוראת המקצוע לרמות גבוהות יותר.

מקורות

1. Stevenson, F. W. (1992). **Exploratory Programs in Mathematics**
2. אביטל, ש׳ (1991). מתמטיקה בהנאה. תל-אביב, עם עובד.
3. בנו, א׳ (1990). אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיקה. תל-אביב, הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.
4. אתגר – גליונות למתמטיקה. חיפה, הוצאת הפקולטה למתמטיקה והיחידה לנוער שוחר מדע בטכניון.
5. סטופל, מ׳ ואוקסמן, ל׳ (תשנ״ז). שילוב תחומים בפתרון בעיות במתמטיקה. שנתון אמי״ת – רשת מוסדות חינוך בישראל.
6. אספיס, א׳ (1988). גיאומטריה, טריגונומטריה, סטריאומטריה. תל-אביב, הוצאת המחבר.