לאה אוקסמן

יישום בניות הנדסיות בתחומי אלגברה

מוקדש לזכרם של הורי.
האב פרופ' ישראל סמיון שוורצבורד
ז"ל (י"ג סיון תשנ"ו) והאם טטיאנה
שוורצבורד ז"ל (י"ד אלול תשנ"ו).

תקציר

אחת המטרות המרכזיות של לימודי המתמטיקה בבתי-הספר היא להקנות ולפתח אצל תלמיד דרכי חשיבה העשויות לסייע בתחומי למידה ודעת אחרים.
היא מעוררת את המורה למתמטיקה ללמד לחשוב, לישם ידע קודם בסיטואציה חדשה, להביא לפתרון יפה, להגביר את ההנאה והסיפוק בלימוד המקצוע.
שילוב תחומים בפתרון בעיות פותח לתלמידים מבט רחב יותר על המתמטיקה כמקצוע מקיף תוך היווצרות קשרים בין ענפיה השונים
במאמר זה רוכז לקט רחב של בעיות בנייה של נוסחאות אלגבריות.
זאת דוגמה ליישום ההנדסה בתחום האלגברי, וזה נושא די חריג, כי התלמידים מתרגלים ליישם את האגברה בתחום ההנדסי.

מבוא

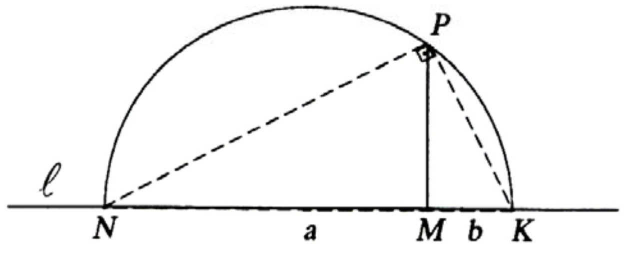
בתוכנית הלימודים הנוכחית במתמטיקה, מצומצם מאוד היקף התחום של בניות הנדסיות, להוציא בניות יסודיות, כגון: העתקת קטע או זווית, חציית קטע, אנך אמצעי לקטע, חציית זווית, העברת מקביל לישר ובעיות בנייה פשוטות המיישמות אותן.
עם זאת, יש לתחום של בניות הנדסיות חשיבות מהיבטים שונים. התמודדות עם בעיות בנייה מורכבות יותר עשויה לתרום לפיתוח החשיבה של התלמיד תוך מציאת דרכי פתרון לא-קונבנציונליות וגילוי יופיה של המתמטיקה.
בבעיות הבנייה, גלום הפוטנציאל למימוש הקשר בין אלגברה להנדסה. במהלך לימודי המתמטיקה נפגשים התלמידים עם דוגמאות שונות של יישומים אלגבריים בתחומי ההנדסה. לעומת זאת, המשימות ההפוכות של יישום הנדסה בלימודי אלגברה נדירות יחסית, אף-על-פי שניתן בעזרתן להעשיר את לימודי האלגברה. במאמר זה, מוצגות 12 משימות, מרביתן לא מוכרות או שאינן מופיעות בספרי הלימוד, והן עוסקות בבניות הנדסיות של נוסחאות. בדרך כלל מנוסחת המשימה באופן זה: יש לבנות קטע שאורכו מחושב לפי הנוסחה $F(a,b,c...)$ ו- $a,b,c...$ קטעים נתונים (1-4).
ביצוע המשימות מתבסס על משפטים בסיסיים בהנדסה ובעיקר על תכונות של משולשים דומים ופתרון תרגילים מהתחום (5-6).

תארנים: *בנייה הנדסית של נוסחה; אי-שיוויון; רקורסיה; יישום גיאומטרי.*

במקצת המשימות, הוצגו שתי דרכים לפתרו הבעיהן. לאחר חישוב התרגיל, אופן הבנייה פשוט ביותר ומסתמך על בניות יסודיות בלבד.

משימות בנייה

המשימות שיוצגו במאמר זה, יינתנו בצורה מודרגת מבחינת הקושי מקצתן מתבססות על דרכי הפתרון של המשימות הקודמות. נתחיל בשתי משימות פשוטות:



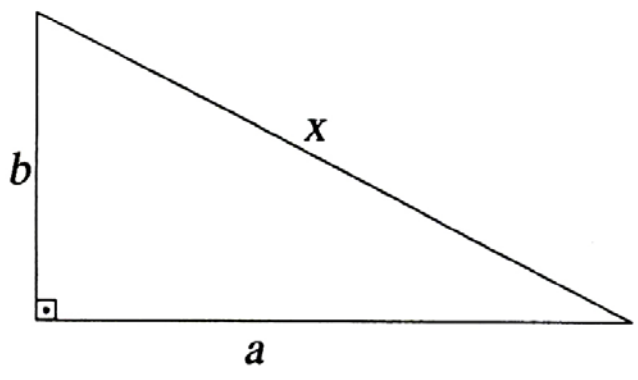
ציור מס' 1

משימה א'

בניית קטע x, שערכו $x=\sqrt{a\cdot b}$ ו-a ו-b קטעים נתונים.

<u>תיאור הבנייה</u>

על ישר ℓ מסמנים שלוש נקודות K, M ו-N כך ש-$NM=a$ ו-$MK=b$. על הקטע NK כקוטר, בונים חצי מעגל, כמוצג בציור מס' 1. בנקודה M נבנה אנך לישר ℓ. אנך זה חותך את קשת המעגל בנקודה P, באופן ש-$PM=x$ הוא האורך הנדרש במשימה. ההוכחה נובעת מהמשפט: הגובה ליתר במשולש ישר- זווית (ΔNPK) הוא הממוצע ההנדסי של היטלי הניצבים על היתר.



ציור מס' 2

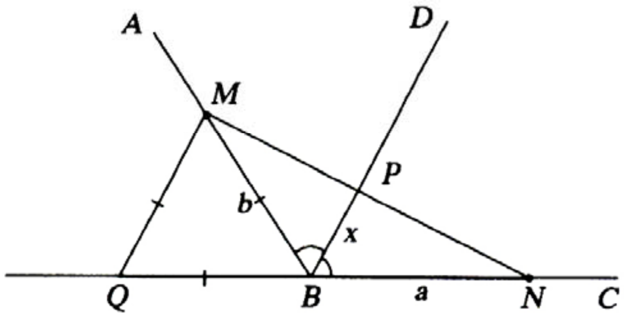
משימה ב'

בניית קטע x, שערכו $x=\sqrt{a^2+b^2}$ ו-a ו-b קטעים נתונים.

הפתרון מתבסס על משפט פיתגורס. בונים שני קטעים נצבים שאורכיהם a ו-b. היתר של המשולש שיתקבל מחיבור קצות הניצבים, הוא הקטע x המבוקש (ציור מס' 2)

משימה ג'

בניית קטע x, שערכו $x=\dfrac{ab}{a+b}$.



ציור מס' 3

<u>תיאור הבנייה - דרך א'</u>

בונים זווית ABC בת 120°. על שוקיה מסמנים את הקטעים $BN=a$ על השוק AC וקטע $BM=b$ על השוק BA. בונים את חוצה הזווית BD

(ציור מס' 3). הישר המחבר את הנקודות M ו-N חותך את חוצה זווית BD בנקודה P. הקטע BP הוא בעל האורך הנדרש $\frac{ab}{a+b}$.

<u>הוכחת הבנייה בעזרת טריגונומטריה</u>

שטח המשולש NBM הוא: $S\ \Delta MBN=\frac{ab\sin 120^0}{2}=\frac{ab\sin 60^0}{2}$

באותו אופן שטחי המשולשים: $S\ \Delta MBP=\frac{bx\sin 60^0}{2},\ S\ \Delta PBN=\frac{ax\sin 60^0}{2}$

נציב את שטחי המשולשים בנוסחת סכום השטחים: $S\ \Delta MBN=S\ \Delta MBP+S\ \Delta PBN$

$$\frac{ab\sin 60^0}{2}=\frac{bx\sin 60^0}{2}+\frac{ax\sin 60^0}{2}$$

ונקבל: $ab=bx+ax$.

נחלץ את x מקשר זה ונקבל $x=\frac{ab}{a+b}$ מ.ש.ל.

הבנייה בדרך זו מחייבת בניית זווית של 120° וחצייתה. כיצד בונים זווית של 120°? (יש לכך כמה דרכים שאחת מהן זווית חיצונית למשולש ש"צ).

<u>הוכחת הבנייה בדרך הנדסית</u>

נבנה ישר MQ המקביל לחוצה הזווית BD. המשולש QMB שמתקבל הוא ש"צ. מדמיון המשולשים MNQ ו-PNB נובע היחס: $\frac{QN}{BN}=\frac{QM}{BP}$ או $\frac{a+b}{a}=\frac{b}{x}$ ז"א $x=\frac{ab}{a+b}$ מ.ש.ל.

<u>תיאור הבנייה - דרך ב'</u>

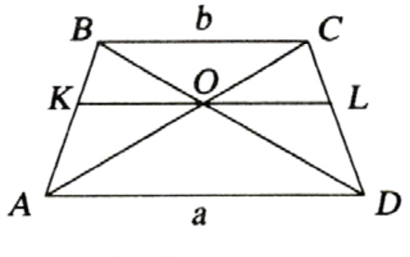
בדרך זו, בונים טרפז שאורכי בסיסיו הם הקטעים הנתונים; $AD=a$ ו-$BC=b$ (כפי המתואר בציור מס' 4 א'). מעבירים את אלכסוני הטרפז הנחתכים בנקודה O. דרך נקודה זו מעבירים ישר KL המקביל לבסיס.

בעזרת דמיון משולשים נוכיח ש-$KO=OL=x$

* מדמיון המשולשים BCA ו-KOA נובע:

$$\frac{BC}{KO}=\frac{AC}{AO}\quad(1)$$

* מדמיון המשולשים BCD ו-OLD נובע:



ציור מס' 4א'

$$\frac{BC}{OL}=\frac{BD}{OD} \quad (2)$$

* מדמיון המשולשים BOC ו-AOD נובע:

$$\frac{OC}{AO}=\frac{BO}{OD} \quad (3)$$

* מתוספת של 1 בשני האגפים של (3) מתקבל:

$$\frac{OC}{AO}+1=\frac{BO}{OD}+1 \Longrightarrow \quad \frac{AC}{AO}=\frac{BD}{OD} \quad (4)$$

* מהקשרים (1), (2) ו-(4) נקבל: $KO=OL$
* מדמיון המשולשים ABD ו-KBO נקבל:

$$\frac{KO}{AD}=\frac{BO}{BD} \quad (5)$$

* מהקשרים (1)-(5) נקבל: $\frac{KO}{b}+\frac{KO}{a}=\frac{AO}{AC}+\frac{OC}{AC}=\frac{AO+OC}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$

* מחילוץ KO מהמשוואה האחרונה נקבל: $KO=\frac{ab}{a+b}$ מ.ש.ל.

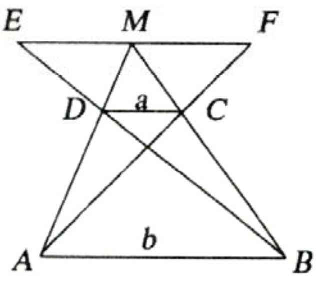
בדומה למשימה זו, אפשר להסתמך על פתרון הבעיה המופיעה בספר הלימוד ל-5 י"ל (מקור עמוד 36) שתיאורה נראה בציור מס' 4 ב'.

בטרפז $ABCD$ נתון:

$EF//DC//AB$ וכן $DC=a$, $AB=b$

יש להוכיח ש- $EM=MF$ ולמצוא את אורכו של EF בעזרת a ו-b.

לא נביא את ההוכחה אך התשובה היא, $EF=\frac{2ab}{b-a}$.



ציור מס' 4ב'

דרכי הפתרון של משימה ג', מאפשרים לפתור מספר בעיות בנייה אחדות. נביא שתי דוגמאות לכך.

משימה ד'

נתונים הקטעים $\frac{a}{m}$ ו- $\frac{a}{n}$ אשר a קטע נתון ו-m,n מספרים נתונים יש לבנות את הקטע $x=\frac{a}{n+m}$.

כבמשימה ג' (דרך א' - ציור מס' 3) נסמן: $BN=\frac{a}{n}$ ו- $BM=\frac{a}{m}$

נחשב, $BP=\frac{BM\cdot BN}{BM+BN}=\frac{\frac{a}{m}\cdot\frac{a}{n}}{\frac{a}{m}+\frac{a}{n}}=\frac{a^2}{an+am}=\frac{a}{m+n}$

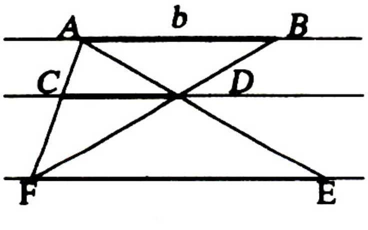
כבמשימה ג' (דרך ב' - ציור מס' 4) קובעים את אורכי בסיסי הטרפז $AD=\frac{a}{m}$ ו- $BC=\frac{a}{n}$

ונקבל: $KO=\frac{AD\cdot BC}{AD+BC}=\frac{a}{m+n}$

כדוגמא למספרים נתונים במשימה ד' אפשר לבנות $\frac{1}{7}$ של קטע מסוים אם נתונים החלקים הבאים שלו: $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{3}$.

משימה ה'

כבמשימה ד' נתונים הקטעים $\frac{a}{n}$ ו- $\frac{a}{m}$ יש לבנות את הקטע $\frac{a}{m-n}$ ו- $m>n$.



ציור מס' 5

לפי המתואר בדרך א' של משימה ג', נסמן נקודה P על חוצה הזווית BD (ציור מס' 3)

כך ש- $BP=\frac{a}{m}$. על השוק BC של הזווית נסמן $BN=\frac{a}{n}$. המשך הישר NP יחתוך את הצלע AB בנקודה M. האורך של הקטע BM המתקבל, הוא $\frac{a}{m-n}$ מ.ש.ל.

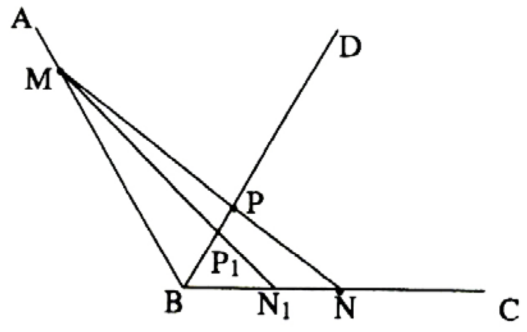
לפי עקרון הבנייה של דרך ב' במשימה ג', בונים על שני ישרים מקבילים את הקטעים $AB=\frac{a}{n}$ ו- $CD=\frac{a}{m}$ כמתואר בציור מס' 5. מעבירים את הישרים AC ו-BD והמשכיהם נחתכים

בנקודה F. דרך F נעביר ישר המקביל ל-AB והחותך את המשך AD בנקודה E.
ניתן להוכיח בקלות שאורכו של הקטע FE הוא הקטע המבוקש $\frac{a}{m-n}$.

משימה ו׳

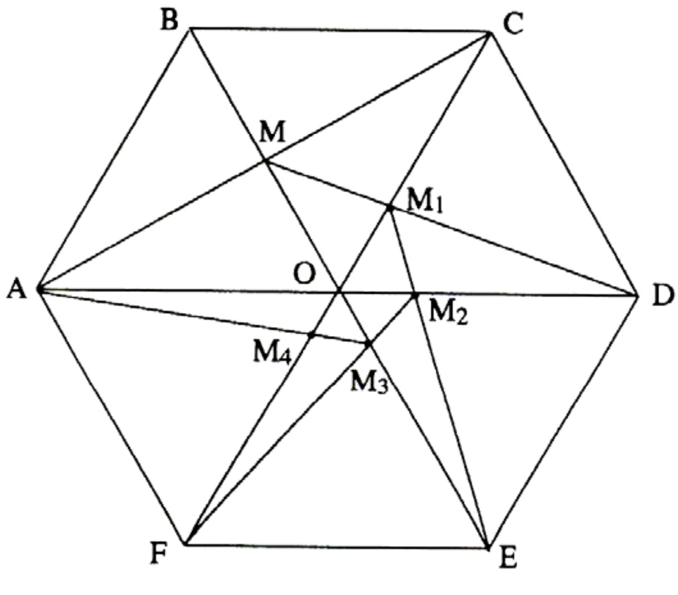
נתונים הקטעים a ו-$\frac{a}{n}$. יש לבנות את הקטעים $\frac{a}{n+1}, \frac{a}{n+2}, \frac{a}{n+3}\cdots$

<u>תיאור הבנייה - דרך א׳</u>



ציור מס׳ 6

בונים זווית ABC בת 120° ואת חוצה הזווית שלה BD, כמתואר בציור מס׳ 6. על קרן הזווית BA נסמן קטע $BM=a$ ועל קרן הזווית BC את הקטע $BN=\frac{a}{n}$. הקטע MN חותך את BD בנקודה P כך ש-$BN=\frac{a}{n+1}$. באשר למשימה - בניית הקטע $\frac{a}{n+2}$, נסמן על הקרן BC את הקטע $BN_1 = BP = \frac{a}{n+1}$. הישר MN_1 חותך את BD בנקודה P_1 באופן ש-$BP_1 = \frac{a}{n+2}$. באותה דרך ניתן להמשיך ולבנות את $BP_2 = \frac{a}{n+3}$, וכך הלאה.



ציור מס׳ 7

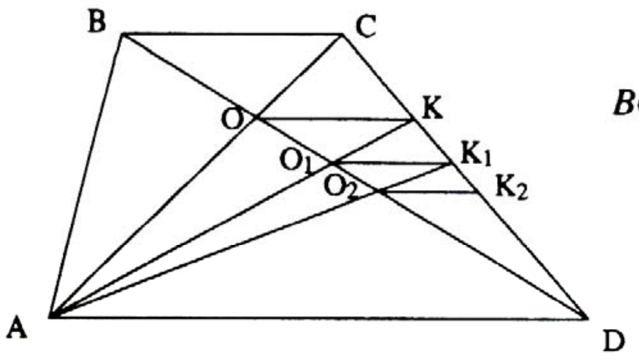
ניתן ליישם דרך פתרון זו, לקבלת כל חלק מקטע נתון, a, דהיינו, את הקטעים: $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}\cdots$ ... וכו׳.

לצורך זה משרטטים מצולע משוכלל שצלעו a ומעבירים את האלכסונים הראשיים הנחתכים בנקודה O. (משושה - $ABCDEF$ כמוצג בציור מס׳ 7). מנקודה זו, יוצאות קרני זוויות של 120° וחוצי הזווית שלהן.

<u>תיאור הבנייה - דרך ב׳</u>

בונים טרפז כלשהו שאורכי בסיסיו: $AD=a$ ו- $BC=\frac{a}{n}$

(בציור $BC=\frac{a}{3}$).



ציור מס׳ 8

בטרפז $ABCD$ מקבלים: $OK=\frac{a\cdot\frac{a}{n}}{a+\frac{a}{n}}=\frac{a}{n+1}$

באותו אופן בטרפז $AOKD$ מקבלים: $O_1K_1=\frac{a\cdot\frac{a}{n+1}}{a+\frac{a}{n+1}}=\frac{a}{n+2}$

בטרפז AO_1K_1D מקבלים: $O_2K_2=\frac{a\cdot\frac{a}{n+2}}{a+\frac{a}{n+2}}=\frac{a}{n+3}$, וכך הלאה.

<u>הערה</u>: בניית החלק ה-n י׳, של קטע נתון, בדרך הנדסית, הוצגה במאמר קודם (8) (יש לציין את מס׳ 2 שבמאמר).

משימה ז׳ (במשימה זו לא הובא דרך פתרון הבעיה)

בעזרת קטעים נתונים a ו- $\frac{a}{n}$ יש לבנות את הקטעים $\frac{a}{n-1},\frac{a}{n-2},\frac{a}{n-3}$ וכו׳.

משימה ח׳

בעזרת קטעים נתונים $\frac{a}{n}$ ו- $\frac{a}{n+1}$ יש לבנות קטע a.

<u>תיאור בנייה - דרך א׳</u>

בהתייחס לציור 3, אם $BN=\frac{a}{n}$ ו- $BP=\frac{a}{n+1}$ לפי השיטה הראשונה של משימה ה׳ מקבלים $BM=a$.

<u>תיאור בנייה - דרך ב׳</u>

בהתייחס לציור מס׳ 5, בוחרים $AB=\frac{a}{n}$ ו- $CD=\frac{a}{n+1}$, אל סמך השיטה השנייה של

משימה ה׳, נקבל: $FE = \dfrac{a}{n+1-n}$

משימה ט׳

נתונים הקטעים a ו-b וכן המספרים m ו-n יש לבנות את הקטע $x = \dfrac{ab}{ma+nb}$

<u>תיאור הבנייה - דרך א׳</u>

משתמשים בציור מס׳ 3 ומסמנים את הקטעים: $BN = \dfrac{b}{m}$ ו- $BM = \dfrac{a}{n}$, מקבלים,

$$BP = \frac{\frac{b}{m}\cdot\frac{a}{n}}{\frac{b}{m}+\frac{a}{n}} = \frac{ab}{ma+nb}$$ מ.ש.ל.

<u>תיאור הבנייה - דרך ב׳</u>

משתמשים בציור מס׳ 4 ומסמנים את הבסיסים: $BC = \dfrac{b}{m}$ ו- $AD = \dfrac{a}{n}$. על-פי ההוכחה של משימה ד׳ מקבלים,

$$OK = \frac{\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}}{\frac{a}{n}+\frac{b}{m}} = \frac{ab}{ma+nb}$$ מ.ש.ל.

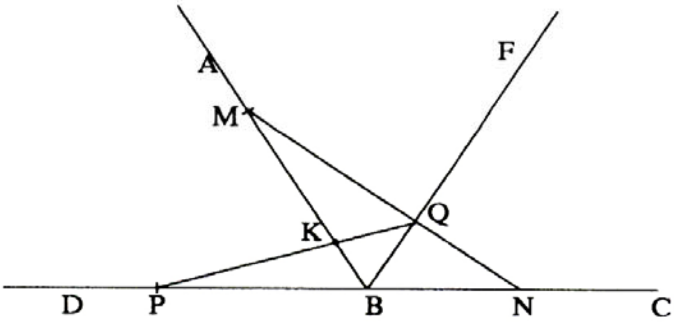
משימה י׳

נתונים הקטעים a, b ו-c. יש לבנות קטע x כך ש: $x = \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ או $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

<u>תיאור הבנייה - דרך א׳</u>

בונים זווית ABC בת 120° ואת חוצה הזווית שלה BF. מאריכים את השוק BC מעבר לנקודה B. מתקבל ישר CD (ציור מס׳ 9).

נסמן: $BN=a$, $BM=b$ ו- $BP=c$ הישר MN חותך את חוצה הזווית BF ונקבל את הקטע BQ שגודלו $\dfrac{ab}{a+b}$. באופן דומה הישר QP חותך את השוק AB ונקבל את הקטע BK



ציור מס׳ 9

שאורכו, $$BK=\frac{\frac{ab}{a+b}\cdot c}{\frac{ab}{a+b}+c}=\frac{abc}{(a+b)\left(\frac{ab}{a+b}+c\right)}=\frac{abc}{ab+ac+bc}$$ מ.ש.ל.

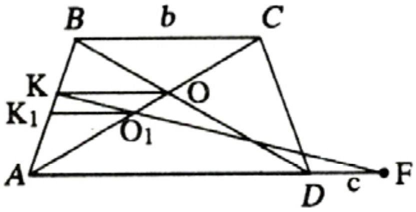
<u>תיאור הבנייה - דרך ב׳</u>

נבנה טרפז $ABCD$ שאורכי בסיסיו: $AD=a$ ו- $BC=b$. כבר הוכחנו (משימה ג׳) ש- $KO=\frac{ab}{a+b}$.

נסמן על המשך הישר AD את הנקודה F כך ש- $AF=c$ נקבל טרפז $KOFA$ (ציור מס׳ 10).
נעביר את האלכסון FK והוא חותך את האלכסון AC של הטרפז המקורי בנקודה O_1.

משרטטים K_1O_1 מקביל ל- AD ומקבלים,

$$K_1O_1=\frac{KO\cdot c}{KO+c}=\frac{\frac{ab}{a+b}\cdot c}{\frac{ab}{a+b}+c}=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$ מ.ש.ל.



ציור מס׳ 10

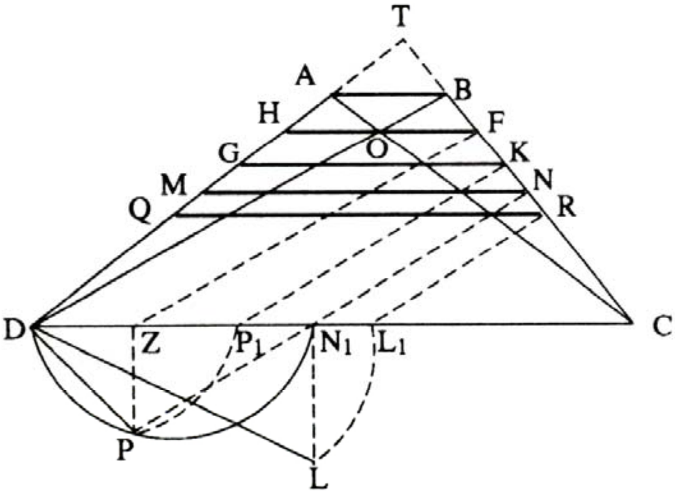
יישום אחר של הנדסה בלימודי האלגברה הוא הוכחת אי-שוויונים אלגבריים על-ידי בניות הנדסיות.
המשימה הבאה היא דוגמא טובה ליישום כזה.

משימה י״א

להוכיח אי-השוויון: $$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ו- $a,b>0$

שתי שיטות הנדסיות להוכחת החלק האמצעי של אי-השוויון, דהיינו, שהממוצע החשבוני גדול מהממוצע ההנדסי אן שווה לממוצע ההנדסי, במאמר (8).



ציור מס׳ 11

<u>תיאור הבנייה והוכחה</u>

נבנה טרפז כלשהו $ABCD$ שאורכי בסיסיו הם: $AB=a$ ו- $DC=b$ (ציור מס׳ 11).

ביצוע המשימה:

א. נעביר קטע HF העובר דרך הנקודה O (מפגש אלכסוני הטרפז) ומקביל לבסיסיו.

לפי משימה ג׳ (תיאור בנייה - דרך ב׳, ציור 4) מקבלים, $HF=2HO=\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

ב. נעביר קטע GK המקביל לבסיס ומחלק את הטרפז המקורי לשני טרפזים דומים: $ABKG$ ו- $GKCD$.

על-פי הגדרת מצולעים דומים מקבלים: $\dfrac{a}{GK}=\dfrac{GK}{b}\Rightarrow GK\sqrt{ab}$

ג. נעביר את קטע האמצעים MN של הטרפז $ABCD$ שאורכו $\dfrac{a+b}{2}$.

ד. נעביר קטע QR מקביל ל- AB ואשר מחלק את הטרפז לשני טרפזים שווי שטח:

$$S\ \square ABRQ=S\ \square QRCD$$

יש להוכיח שמשוויון השטחים נובע ש- $QR=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

למטרה זו נמשיך את שוקי הטרפז DA ו- BC עד לנקודת החיתוך שלהם T.
(הערה: להעשרה, כדאי להזכיר בהזדמנות זו את המשפט: "הישר המחבר המשכי שוקי הטרפז עם נקודת חיתוך אלכסוניו, חוצה את בסיסי הטרפז).

נסמן: $S\ \square ABCD=S\,\Delta ATB=S_1$

מאחר שהמשולשים TAB ו- TDC דומים, מקבלים:

$$\frac{S\Delta TAB}{S\Delta TDC}=\frac{S_1}{S+S_1}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow S_1=\frac{a^2S}{b^2-a^2}$$

לפי הבנייה (שלב ד׳) $S\ \square QABR=S\ \square DQRC=\dfrac{1}{2}S$ וכן המשולשים $\Delta TDC,\ \Delta TQR$ דומים זה לזה, זאת אומרת, $\dfrac{S\Delta TQR}{S\Delta TDC}=\dfrac{\frac{1}{2}S+S_1}{S+S_1}=\dfrac{QR^2}{b^2}$ נציב את ערכו של S_1 בקשר האחרון,

$$\frac{\frac{1}{2}S+\frac{a^2S}{b^2-a^2}}{S+\frac{a^2S}{b^2-a^2}}=\frac{QR^2}{b^2}\Rightarrow QR^2=\frac{a^2+b^2}{2}\Rightarrow QR=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

נותר לנו להראות שאכן הקטעים: $MN=\dfrac{a+b}{2},GK=\sqrt{ab},HF=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

ו- $QR=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, נמצאים בטרפז לפי מקומות הופעתם בציור 11, ואחר-כך איך לבנות אותם בציור משותף.

לצורך זה, נסמן על הבסיס DC נקודה N_1 כך ש- $DN_1=MN=\dfrac{a+b}{2}$ ולכן $N_1C=\dfrac{b-a}{2}$

בנקודה N_1 נבנה אנך לבסיס DC ונסמן עליו נקודה כך ש- $N_1L=N_1C$
על-פימשפט פיתגורס נקבל במשולש DN_1L נקבל:

$$DL^2=DN_1^2+N_1L^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{b^2+a^2}{2}$$ כלומר, $$DL=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

מהנקודה D, כמרכז מעגל, נבנה את הקשת $\widehat{LL_1}$ ולכן $DL=DL_1$. על הקטע DN_1, כקוטר, נבנה חצי מעגל ונסמן עליו את הנקודה P המקיימת $N_1P=N_1L$.
היות והמשולש DPN_1 הוא ישר-זווית ($\measuredangle DPN_1=90^0$), נוכל על-ידי הצבת הקטעים המתאימים
על-פי משפט פיתגורס $DP^2+PN_1^2=DN_1^2$ לקבל:

$$DP^2=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=ab\Rightarrow DP=\sqrt{ab}$$

מהנקודה D, כמרכז מעגל, נבנה את הקשת $\widehat{PP_1}$, ולכן $DP=DP_1$. מהנקודה P נוריד אנך PZ לבסיס DC על-פי ערך הגובה ביחס ליתר במשולש ישר-זווית נקבל,

$$DZ=\frac{DP^2}{DN_1}=\frac{ab}{\dfrac{b+a}{2}}=\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$$

<u>סדר הקטעים</u>
$DP>PZ$ (יתר ביחס לניצב במשולש ישר-הזווית DPZ).
ולכן על-ידי הצבת ערכי הקטעים, מקבלים: $\sqrt{ab}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$
$DN_1>DP$ (יתר ביחס לניצב במשולש ישר-הזווית DN_1P).
ועל-ידי הצבת ערכי הקטעים, מקבלים: $\dfrac{b+a}{2}>\sqrt{ab}$
$DL>DN_1$ (יתר ביחס לניצב במשולש ישר-הזווית DN_1L).

על-ידי הצבת ערכי הקטעים, מקבלים: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{b+a}{2}$

צירוף שלושת אי-השוויונים מקיים, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ מ.ש.ל.

שוויון יתקיים כאשר $a=b$, דהיינו כשהטרפז המופיע בציור מס׳ 11 הופך להיות מקבילית. נכונות אי-השוויונים אפשר לראות לפי סדר הנקודות Z, P, N_1, L_1 שעל הבסיס DC.

<u>תיאור הבנייה</u>

בונים תחילה את הקטעים HF ו-MN. אחר-כך את DZ השווה ל- HF ואת DN_1 השווה ל- MN. בניית הקטעים GK ו- QR תיעשה בעזרת הקווים המקבילים (המקווקוים) כפי שמתואר בציור מס׳ 11, בהסתמך על ההוכחות הנ״ל.

סיכום

משימות הבנייה שהוצגו במאמר זה מהוות בסיס למשימות בנייה דומות. בספרי הלימוד מעטות הן הבניות מסוג זה, ועל-כן, ההתעסקות בנושא יכולה להניב כתיבת בעיות בנייה מיוחדות, נוסף על היתרונות והתמורה של ההתמודדות עם פתרון הבעיות.

מראי מקומות

1. Zatel S.I. (1950). On some fromulas constructing, **Magazine: Mathematics at school, No. 3,** (in Russian).
2. Zatel S.I. (1968). Geometry illustration of some unequallities, **Magazine: Mathematincs at school, No. 5.** (in Russian).
3. N. Altshiller-Court (1952). Collex Geometry N.Y..
4. H.S.M. Coxeter (1967) S.L. Creitser. Geometry Revisited, Random House and The L.W. Singer Co.
5. Kazarinoff N.D. (1961). Geometrie Inequalities, pub. Random House, U.S.A.
6. יקואל ג׳.(תשנ״ד). **מבחני מתכונת במתמטיקה לתלמידי 4 י״ל**, הוצאת ״משבצת״ - ספרי מתמטיקה ת.ד. 5636 ק. ביאליק.
7. יקואל ג׳ (תשנ״ד). **מבחני מתכונת במתמטיקה לתלמידי 5 י״ל**, הוצאת ״משבצת״ - ספרי מתמטיקה ת.ד. 5636 ק. ביאליק.
8. סטופל מ׳, אוקסמן ו׳ (תשנ״ו). ״בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות״, **שאנן - שנתון המכללה הדתית לחינוך, ב׳**, חיפה, עמ׳ 95.