לאה אוקסמן
משה סטופל

התרומה והסכנה של השימוש באינטואיציה לפתרון בעיות במתמטיקה

תקציר

האינטואיציה מהווה את אחד מאמצעי העזר המסייעים לתלמיד להתמודד עם פתרון בעיות ותרגילים במתמטיקה. יחד עם זאת, ההסתמכות על האינטואיציה בצורה בלתי-מבוקרת, תוך כדי דילוג על שלבי ביניים, המחייבים בדיקה או הוכחה, עלולה להביא לסתירות ופתרונות שגויים.

במאמר זה, מוצגות דוגמאות בעלות ערך דידקטי, מתוכנית הלימודים במתמטיקה של החינוך העל-יסודי.

הדוגמאות מייצגות לקט רחב של תרגילים שבהם החיפזון, דילוג על שלבי הוכחה והסתמכות על אינטואיציה גורמים לפרדוקסים ולשגיאות. לדרכי ולשלבי הפתרון של הדוגמאות, מצורפות הערות דידקטיות להבהרת ומניעת טעויות.

מבוא

בלימודי המתמטיקה בחינוך העל-יסודי, מושם דגש מיוחד על יכולת השימוש בטכניקה אלגברית ויישום נכון של נוסחאות. בשל עדיפות זאת, קורה שתלמידים מדלגים על שלבי הוכחה יסודיים ומקבלים אותם איטואיטיבית כנכונים.

מעקב שוטף אחר יכולת ההתמודדות עם החומר הנלמד, מאפשר להבחין בקלות בין שני סוגי תלמידים: המתקדם והחלש. אצל הראשון מבחינים בהבנה עמוקה ויכולת להגיע למסקנות הנכונות אף-על-פי שלעיתים הוא אינו מסוגל להסביר את כל הצעדים שהשתמש בהם לפתרון הבעיה. אצל השני, שאף לו יש הנעה ללמוד, מתגלה פער בין ההתבטאות המילולית לבין היכולת להשתמש במושגים מתאימים.

התבוננות בדרכי פתרון בעיות באלגברה ובהנדסה, שהתלמידים משתמשים בהן, חושפת "חוליות" חלשות, שלעיתים קרובות גורמות לסתירות שונות. מצב זה מחייב את התלמיד לחדד ולהעמיק את החשיבה, כדי ליישב את הסתירה. התמודדות זו עשויה לסייע בהבהרת המושגים הנלמדים.

תארנים: *אינטואיציה מתמטית; פרדוקסים מתמטיים.*

אנשי מדע, מדגישים את חשיבות ההבנה האינטואיטיבית בכל התחומים. בלימוד המתמטיקה נבחנת המלה "אינטואיציה" מתוך שני הבטים: מצד אחד מציינים שנעשה שימוש בדרך אינטואיטיבית אם בתהליך ההתמודדות עם הבעיה מגיעים לפתרון הנכון ללא בדיקה של כל השלבים הפורמליים. מצד שני, אומרים שנעשה שימוש בדרך אינטואיטיבית טובה, אם ההשערות ודרכי הפתרון נבחרו בצורה נכונה ובאפקטיביות מירבית.

לבעל האינטואיציה הטובה, יש ידע רחב ומעמיק בתחום עיסוקו. יסודות אלו הם שיוצרים את האינטואיציה וכדי לפתחה דרוש תרגול רב. בנושאי למידה מובנים, האינטואיציה מאפשרת לדלג על שלבים מסוימים אך נדרשת בדיקה אנליטית של המסקנות.

ההבנה האינטואיטיבית והחשיבה האנליטית משלימות אחת את רעותה. בעזרת ההבנה האינטואיטיבית אפשר להגיע לפתרון מהיר יותר מזה שיתקבל בעזרת החשיבה האנליטית בלבד. בדרך האנליטית, אי-אפשר להגיע בקלות לפתרון מהיר ונאלצים להסתמך על אינטואיציה כדי להשיגו. אחר-כך מגיעים אל הפתרון הפורמלי באמצעות הדרך האנליטית. (1982, Bunch; 1988, Lang & Murrow)

אחת המטרות המרכזיות בהוראת הנדסה בחטיבת הביניים היא, הכשרת התלמיד להוכיח עובדות ומשפטים הנדסיים. ויתור על מטרה זו בשלבי הלימוד הראשונים, עלול לגרום לקשיים וטעויות בשלבים הבאים - לימוד פרקי מתמטיקה מסובכים יותר: טריגונומטריה, הנדסה אנליטית וחשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי.

ניתוח הפתרונות של אוסף בעיות ברמות שונות, שניתנו במסגרת מחקר בכיתות ט'-י"ב, מצביע על כך שחלק גדול מהתלמידים מדלגים על שלבי הוכחה בעיקר בהנדסת המישור. המיומנות נתחלפה באינטואיציה "בזק", שהיא לעיתים מוטה וגורמת לפתרונות שגויים. (מושביץ - הדר 1990; Nowlan& Washburn, 1975; Gardner & Gotcha, 1982)

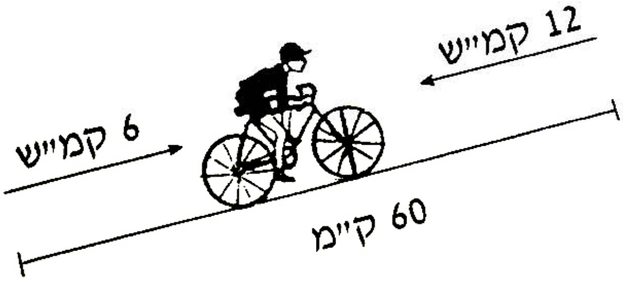
כדי למנוע נפילה "בפח האינטואיציה", חשוב להדגיש שגיאות אופייניות ,שתלמידים מרבים לטעות בהן: איבוד פתרונות בשל חלוקה באפס; פתרונות שגויים, המתקבלים מהעלאה בריבוע; חלוקת אי-שוויון במספר שלילי; אי-דחיית פתרונות שאינם מתאימים לבעיה המקורית או לתחום ההגדרה; תעתועי חוש הראייה והסתמכות על שירטוטים לא מדויקים.

להלן תוצגנה דוגמאות מתחומים שונים של תוכנית הלימודים (גורן, 1992-1994) המצביעות על כך שחיפזון, דילוג על שלבי הוכחה והסתמכות על אינטואיציה, גורמות לפרדוקסים וטעויות. הדוגמאות שנבחרו הן בעלות ערך דידקטי, שכן בכוחן לסייע בהבהרה חדה יותר של מושגים ותהליכים מתמטיים. גילוי פרדוקס במהלך פתרון תרגיל, מהווה הפתעה לתלמיד, ומאלץ אותו לחשיבה מעמיקה ולעריכת בדיקה נוספת. למקצת התרגילים הובאו הוכחות כדי להדגיש את

חשיבותן. לצידם צויינו הערות דידקטיות למניעת טעויות, שמקורן בנימוקים מוטעים.

דוגמא מס' 1 – המהירות הממוצעת

רוכב אופניים נסע בעלייה שאורכה 60 ק"מ במהירות ממוצעת של 6 קמ"ש. את דרכו חזרה הוא נסע במהירות ממוצעת של 12 קמ"ש. בכמה זמן יסע רוכב האופניים בדרך מישורית שאורכה 80 ק"מ אם ירכב במהירות הממוצעת שבה נסע הלוך ושוב – בעלייה ובירידה? (ציור מס' 1).



ציור מס' 1

<u>פתרון בדרך א'</u> – המהירות הממוצעת שבה ירכב בדרך המישורית היא: 9 קמ"ש = $\bar{V} = \frac{6+12}{2}$

ולכן זמן הרכיבה בדרך מישורית יהיה $8\frac{8}{9}$ שעות = $t = \frac{80}{9}$.

<u>פתרון בדרך ב'</u> – זמן הרכיבה בעלייה: 10 שעות = $t = \frac{60}{6}$ עלייה. זמן הרכיבה בירידה: 5 שעות = $t = \frac{60}{12}$ ירידה. הזמן הכולל (הלוך ושוב): 15 שעות = $t = 10 + 5$ כולל, ומכאן המהירות הממוצעת: 8 קמ"ש = $\frac{120}{15}$ = $\bar{V} = \frac{\text{דרך כוללת}}{\text{זמן כולל}}$

את הדרך המישורית הוא יעבור ב-10 שעות = $t = \frac{80}{8}$

שתי דרכי הפתרונות שונים ותוצאות שונות! מובן שהפתרון בדרך ב' הוא נכון.

הטעות בפתרון בדרך א' נפוצה מאוד, ונובעת מאי-הבנת המושג מהירות ממוצעת ומבלבול בינה לבין חישוב ממוצע של שני מספרים.

במקרה זה, המהירות הממוצעת נקבעת ע"י ממוצע הערכים ההופכיים של המהירויות:

$$\frac{1}{\bar{V}} = \frac{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}{2}$$

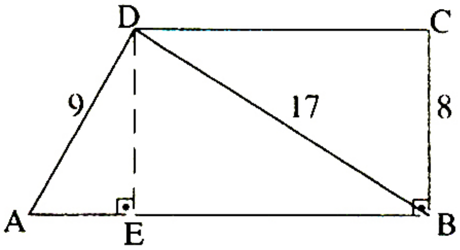
דהיינו, יש להבהיר היטב את המושג מהירות ממוצעת, ולא להסתפק בידע הנרכש מלימוד פיסיקה. לתרגול הנושא מומלץ לתת לתלמידים לחשב את המהירות הממוצעת של מהירויות נסיעה שונות בקטעי דרך שאינם שווים באורכיהם.

דוגמא מס' 2 – שטח טרפז – משפט פיתגורס

ABCD טרפז ישר-זווית. אורך אלכסונו הקצר 17 ס"מ=BD; אורך שוקיו BC ו- AD 8 ס"מ ו -9 ס"מ בהתאמה, (ציור מס' 2; גורן, 1993) יש לחשב את שטחו של הטרפז.

למציאת השטח, יש לחשב את אורך הבסיסים.

<u>פתרון בדרך א'</u> – ע"י שימוש במשפט פיתגורס מוצאים במשולש DCB את אורך DC: ‏15 ס"מ = DC. מורידים את



ציור מס' 2

הגובה DE לבסיס AB מתכונת המלבן שנוצר EBCD,
מחשבים באמצעות משפט פיתגורס את אורך AE
במשולש AED, כלומר, $AE = \sqrt{17}$ ס"מ.

<u>פתרון בדרך ב'</u> - כבדרך א' מוצאים את אורך DC. באמצעות משפט פיתגורס מחשבים את אורך AB במשולש ADB, כלומר, $AB = \sqrt{9^2+17^2} = \sqrt{370}$.

כשמחשבים את שטח הטרפז בשתי הדרכים, מוצאים שיש הפרש קטן בין התוצאות!. לפי דרך א': $AB = 15 + \sqrt{17} = 19.123$ ס"מ; ולפי דרך ב': $AB = \sqrt{370} = 19.235$ ס"מ. בדוגמא זו, דרך א' היא הנכונה ודרך ב' שגויה, וזאת בשל ההנחה שמשולש ADB ישר-זווית. מבחינה ויזואלית ADB נראה משולש ישר-זוית אך אין זה כך. בחישוב מדויק של גודל הזווית ADB בעזרת טריגונומטריה, נמצא שגודלה 89.194^0.

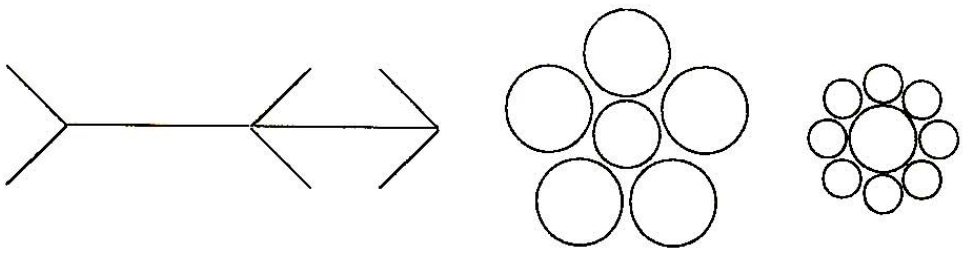
תלמיד הרגיל להסתמך על סימון זוית ישרה בשרטוט (כפי שזווית B מסומנת), קרוב לוודאי שלא יטעה. אולם קורה שזוויות ישרות אינן מסומנות בשרטוט והדבר מצוין רק בתיאור המילולי של הבעיה. כאן הסיכוי לטעות גבוה יותר.

הפרדוקס המתגלה בין שתי דרכי הפתרון, מהווה הזדמנות טובה להדגים לתלמידים את הסכנה שבהסתמכות על חוש הראייה.

נביא שתי דוגמאות קלאסיות לתעתועי הראייה:

הקו השמאלי, שנראה ארוך יותר, שווה בדיוק לאורך הקו הימני. התעתוע (ידוע במקורו "מילר-ליאר") הוא תוצאה של סידור-החיצים.

בדוגמא השנייה נתפס המעגל הפנימי, הנמצא במרכז מעגלים קטנים ממנו, כגדול מן המעגל המוקף מעגלים גדולים ממנו. לאמיתו של דבר, שווים שני המעגלים הפנימיים בגודלם, והטעות מקורה בהשוואה המסתמכת על חוש הראייה.



ציור מס' 3

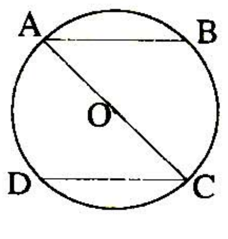
דוגמא מס' 3 - מיתרים מקבילים במעגל

כדוגמא נוספת לאינטואיציה מוטה, אפשר להביא את דרך פתרון הבעיה הבאה (ציור מס' 4), שנתבקשו לפתור תלמידי כיתה ט' (גורן, 1993).

נתון: AC - קוטר המעגל

AB || DC

צ"ל: AB = DC



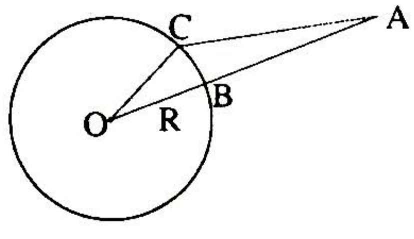
ציור מס' 4

חלק גדול מהפתרונות היו כדלקמן: "מחברים נקודות B ו-D ומתקבל קוטר BD שעליו נמצאת הנקודה O. מכאן שהמשולשים $\triangle AOB$ ו-$\triangle AOC$ חופפים לפי צ.ז.צ. $CO = DO = BO = AO = R$; ו- $\measuredangle AOB = \measuredangle DOC$ (זוויות קודקודיות). מחפיפת המשולשים נובע: $DC = AB$ כנדרש להוכיח. יש לתת את הדעת על כך שבפתרון זה שאיננו נכון לא נעשה שימוש בנתון: $AB \parallel DC$. אם רוצים להוכיח בדרך הנ"ל, חייבים תחילה להוכיח שהנקודות B, D ו-O נמצאות על קו ישר, תוך-שימוש בנתון-ישרים מקבילים.

דוגמא זו, מצביעה על העובדה, שלמקצת התלמידים חסרה המיומנות של הוכחת כל השלבים בפתרון בעיות הנדסה, וכי ההסתמכות על אינטואיציה מביאה לפתרונות שגויים.

דוגמא מס' 4 – המרחק הקצר ביותר למעגל

יש למצוא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן הקצרים ביותר לשני מעגלים נתונים שווים ביניהם. דוגמא זו לקוחה מתוכנית הלימודים ברמה של 5 י"ל.

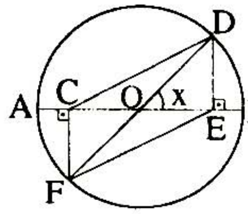


ציור מס' 5

כשתלמידים פותרים את הבעיה, הם בדרך כלל מחליטים, שהמרחק הקצר ביותר מנקודה A עד למעגל שמרכזו O (ציור מס' 5) הוא אורך הקטע AB (B נקודת החיתוך של הישר AO עם המעגל).

קביעה זו מחייבת הוכחה פשוטה בתכלית. די להשוות את אורך AB עם AC, כאשר C היא נקודה כלשהי על המעגל ולהשתמש במשפט: "סכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית". ללא הוכחה זו, פתרון התרגיל המקורי לוקה בחסר.

דוגמא מס' 5 – שטח מקסימלי של מקבילית



ציור מס' 6

בשלבי הפתרון של תרגילים בנושא: "מקסימום – מינימום" של חדו"א מסתמכים על עובדות עזר די-ברורות ממבט ראשון, אך מחייבות הוכחה.

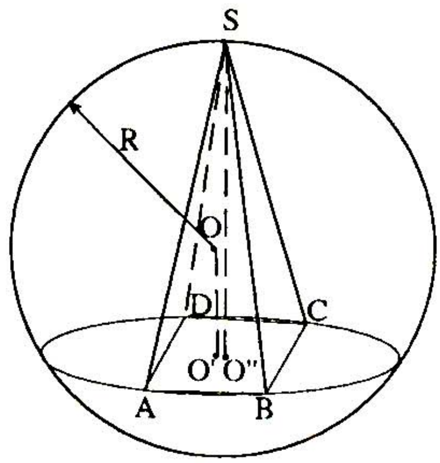
בציור מס' 6 נתונה מקבילית CDEF בתוך מעגל. צלעות המקבילית מאונכות לקוטר AB, שעליו מונח האלכסון הקצר CE של המקבילית. נדרש לחשב את גודל הזווית X, עבורה יתקבל שטח מקסימלי למקבילית (גורן, 1992).

גם בדוגמא זו, כבשתי הדוגמאות הקודמות, מרבית התלמידים מציינים ללא הוכחה, שגם FD הוא קוטר במעגל, עובדה זו דורשת הוכחה.

נוכיח זאת בדרך השלילה. לצורך זה נניח ש-FD איננו קוטר, אלא מיתר אחר. כיוון ש-$FO=OD$ (אלכסונים במקבילית), הרי הקוטר AB, החותך מיתר זה לשני חלקים שווים, חייב להיות מאונך לו (משפט המתייחס לאנך אמצעי למיתר), דהיינו, $\measuredangle X = 90^0$.

מאחר שנתון $\measuredangle DEA = 90^0$, הרי בלתי אפשרי ששתי הזוויות במשולש DOE תהיינה בנות 90^0, לפיכך FD הוא קוטר.

דוגמא מס' 6 – פירמידה חסומה בכדור



ציור מס' 7

פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע חסומה בכדור שרדיוסו R (ציור מס' 7). יש למצוא את גובה הפירמידה בעלת הנפח המקסימאלי (גורן, 1992). פתרון בעיה אינו מסובך, אך מסתמך על העובדה שמרכז הכדור נמצא על גובה הפירמידה.

בדרך-כלל, התלמידים מקבלים עובדה זו כטריוויאלית ומשתמשים בה ללא כל התייחסות נוספת.

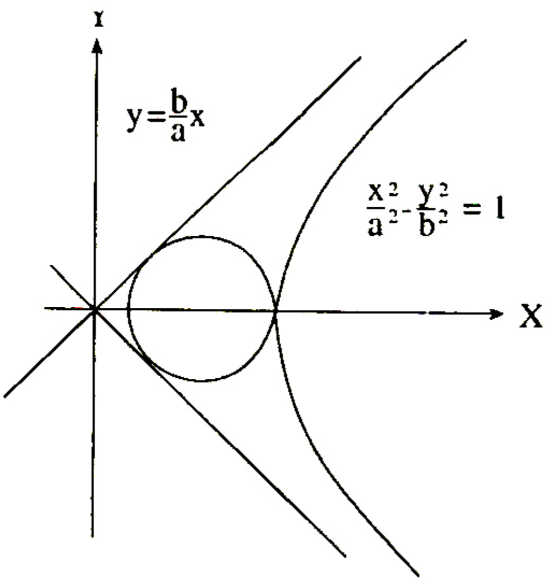
הוכחת העובדה, שהגובה עובר דרך מרכז הכדור, נעשית בדרך השלילה. המרחקים מהנקודה O (מרכז הכדור) לקודקודי הבסיס שווים (תכונת הרדיוס). לכן עקבתו של האנך היורד ממרכז הכדור תהיה בנקודה 'O - מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה. נניח שגובה הפירמידה איננו עובר דרך מרכז הכדור ועקבתו נמצאת בנקודה "O. הואיל ונתון שהפירמידה ישרה, חייבת הנקודה "O להיות במרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה. דבר זה מחייב התלכדות של הנקודות 'O ו-"O, שמשמעותו שהגובה עובר דרך מרכז הכדור.

בתחום החינוך ל"מתמטיקה מדויקת" מוטלת החובה על המורים לדרוש את ההוכחה הנ"ל במסגרת פתרון התרגיל.

דוגמא מס' 7 – טרפז בעל שטח מקסימלי החסום במעגל

בבעיה נוספת של חשבון דיפרנציאלי נדרשו תלמידים למצוא את הטרפז בעל השטח המקסימלי החסום בתוך חצי מעגל. התלמידים מניחים מראש שהבסיס התחתון מתלכד עם קוטר המעגל וכי הטרפז הוא ש"ש. כל אחת משתי הנחות אלו דורשת הוכחה שאיננה קשה במיוחד.לעיתים ההוכחות של עובדות העזר קשות והן דורשות מאמצים משמעותיים, כפי שנראה בדוגמא הבאה.

דוגמא מס' 8 – מעגל המשיק לפרבולה ולאסימפטוטות שלה



ציור מס' 8

במסגרת לימודי הנדסה אנליטית ברמה של 5 י"ל, נתבקשו תלמידים למצוא את משוואת המעגל הנמצא מימין לראשית הצירים ומשיק להיפבולה קנונית מסוימת ולשתי האסימפטוטות שלה (גורן, 1994).

לא צוינו נתונים נוספים. ההנחה הבסיסית היא שהמעגל נמצא כפי שמתואר בציור מס' 8. לפי ההנחות הללו יש להציג את שתי השאלות הבאות:

א. מדוע הפתרון מחייב שמרכז המעגל נמצא על ציר ה-X?

ב. מדוע המעגל המובקש משיק להיפרבולה בנקודה אחת בלבד ודווקא בקודקודה?

התשובה לשאלה הראשונה פשוטה יחסית בתנאי שיש הטמעת ידע מתחום הנדסת המישור, כלומר, מרכז המעגל, המשיק לשוקיים של זווית, נמצא על חוצה הזווית. בדוגמא שלנו, מדובר בהיפרבולה קנונית, ולכן ציר ה-X חוצה את הזווית שבין שתי האסימפטוטות.

לפיכך, משוואת המעגל היא $(x-t)^2+y^2 = R^2$ כאשר מרכז המעגל בנקודה (t,O) ורדיוסו R.

כדי לענות על השאלה השנייה נניח, שמעגל משיק להיפרבולה ביותר מנקודה אחת. נניח, שהנקודה (x_1,y_1) היא אחת מנקודות ההשקה שאינה מתלכדת עם קודקוד ההיפרבולה.

תהא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ משוואת ההיפרבולה, אזי, משוואת המשיק להיפרבולה בנקודה הנ"ל היא: $(y_1 \neq 0)$

1. $$y= \frac{b^2x_1}{a^2y_1} x - \frac{b^2}{y_1}$$

משוואת המשיק למעגל באותה נקודה היא:

2. $$(x - t)(x_1 - t) + yy_1 = R^2$$

או בצורה מפורשת של:

3. $$y=\frac{t - x_1}{y_1} x + \frac{R^2 + xt_1 - t^2}{y_1}$$

חשוב לציין שמשוואות (1) ו- (3) מציינות את אותו ישר, והוא המשיק המשותף למעגל ולהיפרבולה, משום כך אפשר להשוות את השיפועים ואת מידות היתוך עם ציר ה- X .

דהיינו:

4. $$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \frac{t - x_1}{y_1}$$

5. $$-\frac{b^2}{y_1} = \frac{R^2 + tx_1 - t^2}{y_1}$$

ממשוואה (4) נקבל $x_1 = \frac{a^2 t}{a^2 + b^2}$

ממשוואה (5) נקבל $x_1 = \frac{t^2 - b^2 - R^2}{t}$

השוואת משוואות (4) ו-(5) מביאה לקשר

6. $$\frac{a^2 t}{a^2 + b^2} = \frac{t^2 - b^2 - R^2}{t}$$

כעת נבדוק האם המעגל המשיק להיפרבולה ביותר מנקודה אחת, משיק גם לאסימפטוטה של היפרבולה.

נניח שדבר זה אפשרי. כלומר, המעגל משיק לאסימפטוטה $y = \frac{b}{a}x$ בנקודה $(x_2\ y_2)$.

כיוון שנקודה זאת נמצאת על המעגל אזי מתקיים השוויון:

7. $$(x_2 - t)^2+ (\frac{b}{a}x_2)^2 = R^2$$

ממשוואה (6) אפשר לחלץ את R^2 ולהציב אותו במשוואה (7).

8. $$(x_2 - t)^2+ (\frac{b}{a} x_2)^2 = \frac{b^2 - t^2 - a^2b^2 - b^4}{a^2+ b^2}$$

נסדר משוואה זו ונקבל משוואה רבועית לגבי x_2.

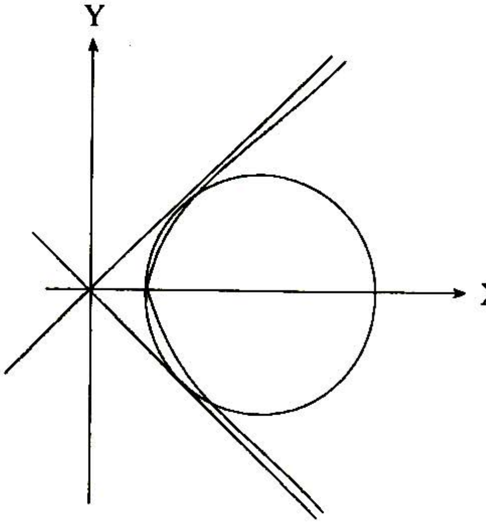
$$(1+\frac{b^2}{a^2})x_2^2 - 2x_2t + t^2 - \frac{b^2 - t^2 - a^2b^2 - b^4}{a^2+b^2} = 0 \quad .9$$

נחשב את הדיסקרימיננטה של משוואה זו.

$$\Delta = 4t^2 - \frac{4(a^2+b^2)}{a^2} \cdot \frac{a^2t^2 + a^2b^2 + b^4}{a^2+b^2} = -\frac{4a^2b^2 + 4b^4}{a^2} < 0 \quad .10$$

מאחר שהדיסקרימיננטה שלילית אין פתרון ממשי למשוואה.

בדרך זו הוכחנו, שאם מעגל משיק לאסימפטוטה של ההיפרבולה, אזי הוא משיק להיפרבולה לכל היותר בנקודה אחת. בהמשך לא קשה להוכיח שנקודת ההשקה חייבת להיות קוקוד ההיפרבולה.

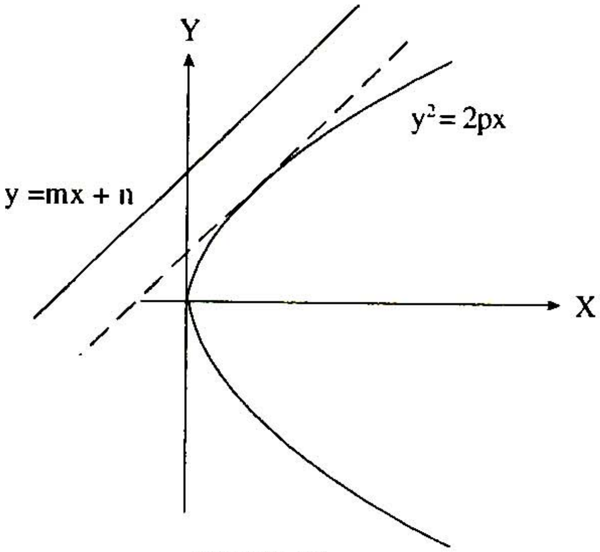


ציור מס׳ 9

התרגיל האחרון מדגים פתרון, שלפיו ההוכחה המלאה של עובדות או הנחות העזר דורשת השקעת מאמצים ומהווה בעיה בפני עצמה.

יש לציין, שכבר בשלב הראשון בפתרון הבעיה, ישנם תלמידים שאינם שמים-לב, שקיים מצב נוסף למיקום המעגל כפי שמתואר בציור מס׳ 9. מצב זה מתחייב מפתרון הבעיה בהנחה, שנקודת ההשקה של ההיפרבולה והמעגל היא יחידה ונמצאת על ציר ה-X.

דוגמא מס׳ 9 - המרחק הקצר ביותר מישר לפרבולה



ציור מס׳ 10

כשבאים להוכיח שהמשיק העובר דרך הנקודה על הפרבולה הקרובה ביותר לישר נתון (גורן, 1994), הוא מקביל לישר, הדבר די ברור מבחינה אינטואיטיבית, אבל ההוכחה לא כל כך פשוטה (גורן, 1994).

הוכחת הטענה הנ״ל נדרשת כשצריך למצוא את הנקודה על הפרבולה הקרובה ביותר לישר נתון (ציור מס׳ 10).

סיכום

מלקט הדוגמאות שהובאו, רואים שבתחומים שונים בפרקי המתמטיקה, הנלמדים בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה, קיימים מקרים שתלמידים משתמשים אינטואיטיבית בעובדות שונות ואינם נותנים דעתם על הצורך להוכיח אותן.

במסגרת החינוך למתמטיקה נכונה ומדויקת, יש להדגיש את חובת ההנמקה וההוכחה בשלבי ביניים, לפחות לתלמידי 4 ו-5 יחידות לימוד.

כן, חשוב להפנות את תשומת-לבם של התלמידים לטעויות שעלולות לנבוע מהסתמכות על התבוננות בציורים, בפרט שמקצתם אינם מדויקים מספיק.

עם זאת, ישנם מקרים שאפשר להקל על התלמידים. למשל, בשעת מבחן אין לדרוש מהתלמידים להוכיח את כל העובדות שמשתמשים בהן, כדי שלא ימצאו במצוקת זמן על כל השלכותיה. במקרים כאלה חשוב, שהתלמידים יבינו וידעו שהם משתמשים בעובדות חשובות, אף כי לא הוכיחו אותן.

מראי מקום

גורן, ב' (1993). גאומטריה של המישור, מהדורה מורחבת, הוצאת מישלב.

גורן, ב' (1992). חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי (4 ו- 5 י"ל), תל-אביב, הוצאת המחבר.

גורן, ב' (1994). גאומטריה אנליטית (5 י"ל), תל-אביב, הוצאת המחבר.

מושביץ-הדר (1990). הא כיצד? אוסף פרדוקסים מתמטיים, חיפה, הטכניון המחלקה להוראת המדעים.

Bunch, B. (1982). Mathematical Fallacies and Paradoxes. N.Y. VNR company.

Lang, S., Murrow, G. (1988). A High School Course. N. Y. Springer - Verlog.

Nowlen,R. A., Washburn, R. M. (1975). Geometry for teachers. N.Y. Harper and Row, Publishers.

Gardner, M., Gotcha. Aha. (1982). Paradoxes to Puzzles and Delight. W. H. Freeman Company.