פינה מתמטית - מקומות גאומטריים

מציאת מיקום הצירים נקודות הקודקוד והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה בעזרת סרגל ומחוגה

שולה וייסמן

עידן טל

שולה וייסמן

בוגרת תואר ראשון במתמטיקה בטכניון, תעודת הוראה במתמטיקה ותואר שני בחינוך מתמטי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. דוקטורנטית באוניברסיטת חיפה בחוג לחינוך מתמטי. מרצה לחינוך מתמטי ומדריכה פדגוגית במכללה האקדמית גורדון, מדריכה מורים ומשמשת כמורה מאמנת למורים בשנת עבודתם הראשונה במערכת החינוך. לימדה מתמטיקה בתיכון אליאנס חיפה בכל רמות הלימוד.

תחומי מחקר עיקריים: התפתחות מקצועית של מורים ומורי מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

עידן טל

בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על יסודי) - סמינר הקיבוצים. סטודנט לתואר שני בטכנולוגיות בחינוך בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

במאמר זה מוצגות בניות הנדסיות בעזרת סרגל ומחוגה למציאת מיקום הצירים, נקודות הקודקוד והמוקדים של היפרבולה, אליפסה והיפרבולה על פי האיורים שלהם. ביצוע הבניות מסתמך על הכרת משפטים ותכונות מיוחדות המאפיינים את המקומות הגאומטריים הנזכרים לעיל ועל כן הם משמשים להטמעה ויישום של ידע שנרכש במהלך לימודי הנדסה אנליטית.

מילות מפתח: בניות גאומטריות; פתרונות שונים לאותה משימה; גאומטריה דינמית; פרבולה; אליפסה; היפרבולה.

הקדמה

הבניות ההנדסיות הן עולם מרתק ומפתיע מאוד שהחלו לעסוק בו המתמטיקאים הקדמונים. מאז ימיהם ואף בימינו, כשחלק גדול מהבניות מתבצע בעזרת טכנולוגיה ממוחשבת, הנושא של הבניות ההנדסיות בכלי השרטוט הקלסיים ממשיך להעסיק את המתמטיקאים ואת אנשי החינוך המתמטי הרואים בהתמודדות עם בעיות הבנייה הן אתגר מחשבתי והן כלי המאפשר לתלמידים ליישם ולתרגל ידע על תכונות ומשפטים בהתאם לתוכנית הלימודים, ולבדוק את מידת הטמעתם.

ברבות השנים נמצאו דרכים חדשות לביצוע בניות אחרות שהתבססו על גילוי תכונות גאומטריות ורעיונות מקוריים שהתבססו עליהן ואפשרו את ביצוען. בין שאר הדברים המפתיעים שנמצאו הם אפשרויות בנייה בהגבלת כלי השרטוט, כגון בניות בעזרת סרגל (חסר שנתות) בלבד או בעזרת מחוגה בלבד.

תלמידים יודעים בדרך כלל לבצע בניות יסודיות, כגון העתקת קטע, העתקת זווית, חציית קטע, חציית זווית, בניית אנך לקטע בנקודה מסוימת, הורדת אנך לקטע מנקודה מסוימת, בניית קו מקביל לישר, בניית משולשים לפי נתונים ועוד. חוץ מהבנייה של העתקת קטע, כל שאר הבניות היסודיות הנזכרות לעיל מתבססות על הכרת משפטים בגאומטריה שכל אחד מהם מאפיין תכונה גאומטרית.

מסיבה זו, היכולת לבצע בניות גאומטריות היא למעשה יכולת הטמעה ויישום של משפטים בגאומטריה. לכן אפשר לראות בבניות הגאומטריות תחום שבו אפשר לתרגל ידע ומשפטים בגאומטריה ולבדוק את מידת הטמעתם.

ההתמודדות עם בניות גאומטריות מאפשרת לתלמיד למצוא כמה דרכי בנייה לאותה משימה או מציאת דרכי בנייה לא קונבנציונליות ובכך להבליט לפניו את יופייה של המתמטיקה עד כדי התפעמות.

מקורות המידע לנושא הם רבים. כמקורות עיקריים אפשר להביא ספרים מקיפים עם מגוון רחב של נושאים בצירוף הדגמות רבות של בניות הנדסיות (סטופל, זיסקין ובן-חיים, 2015). כמו כן במקורות יש רשימה מגוונת של מאמרים מכתבי עת בארץ ובחו"ל שכל המתעניין בנושא ימצא בהם עניין רב (מן, 1987; סטופל ואוקסמן, 1996, 1998; סטופל וחריר, 2006; Stupel & Ben-Chaim, 2013a; Yiu, 2014).

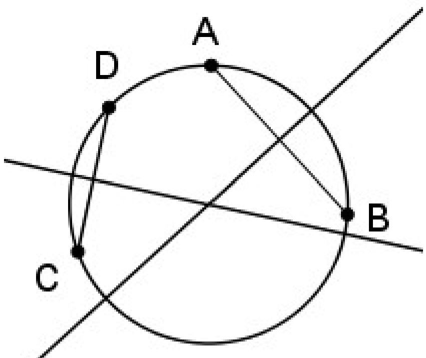
הנושא של פרבולה, אליפסה והיפרבולה נלמד בגילים 16-17 בעת לימוד גאומטריה אנליטית. בשלב הראשון ההגדרה ניתנת לכל אחד מהמקומות הגאומטריים ובהמשך מפתחים את המשוואה המתמטית של כל אחת מהצורות. לאחר תרגול בסיסי מכוונים את התלמידים לגלות תכונות גאומטריות נסתרות שמקצתן משותפות לשתי צורות או יותר, כגון "אמצעי כל המיתרים בהיפרבולה המקבילים לישר נתון נמצאים על ישר שני", או "סכום ריבועי הערכים ההופכיים של אורכי שני מיתרים מאונכים זה לזה באליפסה ואשר עוברים דרך מרכזה, הוא גודל קבוע".

למקומות הגאומטריים הנזכרים לעיל יש תכונות גאומטריות מיוחדות רבות. אפשר ליישם חלק מן התכונות הללו לצורך בניות הנדסיות וכך להשיג הן הטמעת ידע והן שילוב בין תחומי המתמטיקה המגוונים. מקורות לתכונות הגאומטריות שבהן השתמשו אפשר למצוא בספרי הלימוד בארץ ובחו"ל וכן במאמרים (גבע, 1996; גורן, 2005; Riddle, 1996).

בקורס של בניות גאומטריות שניתן לפרחי הוראה למתמטיקה בעת לימודי ההכשרה, נעשתה פעילות של בניות כאשר נתונים על דף נייר העקומים של המקומות הגאומטריים האלה: מעגל, פרבולה, אליפסה והיפרבולה, שנלמדו בקורס בהנדסה אנליטית ויש למצוא בבנייה את מיקום נקודות מיוחדות שלהם, כגון מוקדים, קודקודים וכן את הפרמטרים שלהם.

לפני שיוצגו כאן הבניות ההנדסיות הייחודיות, תוצג תחילה בנייה פשוטה שבה יש למצוא בעזרת כלי שרטוט (סרגל ומחוגה) את מרכזו של מעגל.

בעזרת סרגל מסמנים במעגל שני מיתרים כלשהם AB ו-CD ובונים לכל אחד מהם אנך אמצעי (ראה איור 1).



איור 1: מציאת מרכז מעגל בעזרת סרגל ומחוגה

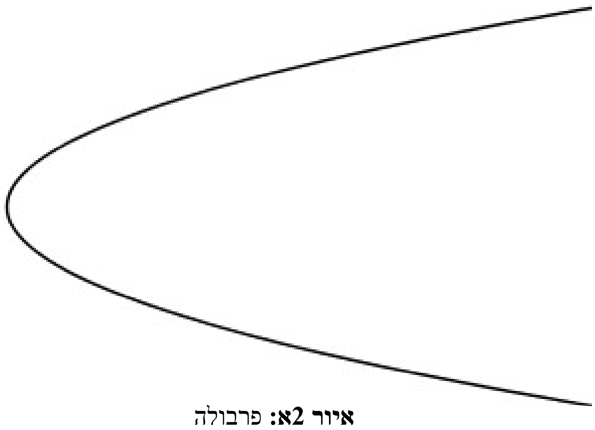
בהסתמך על המשפט: "על האנך האמצעי למיתר מונח קוטר המעגל", הרי שנקודת החיתוך של שני האנכים האמצעיים היא מרכז המעגל.

אתגר מעניין הוא למצוא את מיקום הצירים והמוקדים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה שכאן הבנייה מורכבת יותר ומחייבת הכרה ויכולת יישום של תכונות גאומטריות לכל שלב של בנייה שבו משתמשים בתכונה גאומטרית מסוימת המאפיינת את המקום הגאומטרי. מצורפים קישורים ליישומונים ב-Geogebra המדגימים את הבניות ומאפשרים לקורא חקר דינמי של התכונות השונות.

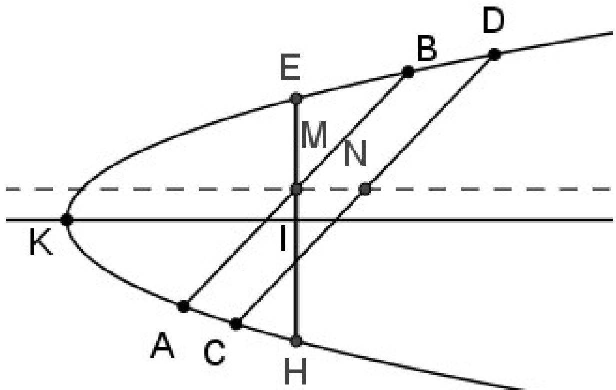
משימה א׳:

א1: מציאת ציר הסימטריה וקודקודה של פרבולה

באיור 2א מתוארת עקומה של פרבולה ללא סימון ציר הסימטריה שלה וללא סימון קודקודה.


איור 2א: פרבולה

איור 2ב מתאר את הפרבולה אחרי הבניות הבאות.



איור 2ב: מציאת ציר הסימטריה והקודקוד של פרבולה

תיאור הבנייה

בונים בפרבולה שני מיתרים כלשהם AB ו-CD המקבילים זה לזה. נקודות האמצע שלהם M ו-N בהתאמה. כידוע, נקודות האמצע של מיתרים מקבילים בפרבולה נמצאים על קו ישר המקביל לציר הפרבולה. כלומר, הישר העובר בנקודות M ו-N מקביל לציר הפרבולה. בנקודה M בונים אנך לישר MN החותך את הפרבולה בנקודות E ו-H. בונים ישר 1 שהוא אנך אמצעי לקטע EH. הישר 1 הוא ציר הסימטריה של הפרבולה ונקודת החיתוך שלו עם הפרבולה K היא קודקוד הפרבולה.

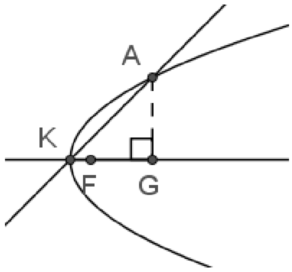
יישומון מס' 1 שאפשר להגיע אליו בקישור 1 מדגים את התכונה שישר העובר בנקודות האמצע של זוג מיתרים מקבילים, מקביל לציר הפרבולה. בגרירת הנקודה A או B על עקום הפרבולה אפשר לשנות את זווית ההטיה של המיתרים המקבילים. גרירת הנקודה C משנה את המרחק בין המיתרים המקבילים. אפשר לשנות את ערכו

של פרמטר הפרבולה p בעזרת סרגל הפרמטר.

קישור 1: ישר המחבר אמצעי מיתרים מקבילים בפרבולה
Link 1: https://www.geogebra.org/m/csdNrzft

2א: מציאת מיקום מוקד הפרבולה

דרך א': מציאת מיקום המוקד בעזרת קו ישר. בקודקוד K מעבירים קו ישר שהמשוואה שלו $y=x$. ישר זה חותך את הפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(2p,2p)$, כמתואר באיור 3.

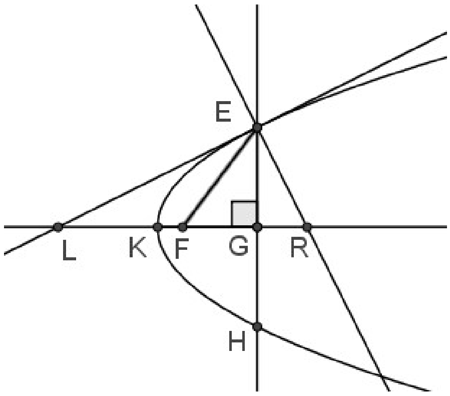


איור 3: מציאת המוקד של פרבולה

מהנקודה A מורידים אנך AG לציר הפרבולה. אורך הקטע $KG=2p$. את הקטע KG מחלקים לארבעה קטעים שווים בעלי אורך $KF=\frac{p}{2}$, הנקודה F היא מיקום המוקד.

דרך ב': מציאת מיקום המוקד בעזרת משיק ונורמל.

ידועה התכונה שהמשיק לפרבולה בנקודה E שעליה חותך את ציר הפרבולה בנקודה L באופן ש- $KG=KL$ כמתואר באיור 4. מהנקודה K חגים מעגל ברדיוס KG ומתקבלת הנקודה L. מעבירים את המשיק EL. בנקודה E בונים את הנורמל למשיק הפרבולה שחותך את ציר הפרבולה בנקודה R. הקטע GR – היטל הנורמל על ציר הסימטריה, הוא כידוע האורך של פרמטר הפרבולה p. מהנקודה K חגים קשת ברדיוס $r=\frac{GR}{2}=\frac{p}{2}$ והיא חותכת את ציר הסימטריה בנקודה F שהיא מוקד הפרבולה.



איור 4: מציאת מוקד הפרבולה בעזרת משיק ונורמל

הערה: מאחר שהמשולש ΔEFL הוא שווה שוקיים, מספיק לבנות אנך אמצעי לקטע LE, שחותך את ציר הסימטריה בנקודת המוקד.

יישומון מספר 2 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 2, מדגים את תכונת שימור אורכי הקטעים LK=KG כאשר הנקודה E נעה על גבי הפרבולה. בעזרת סרגל הפרמטר אפשר לשנות את הפרמטר של הפרבולה.

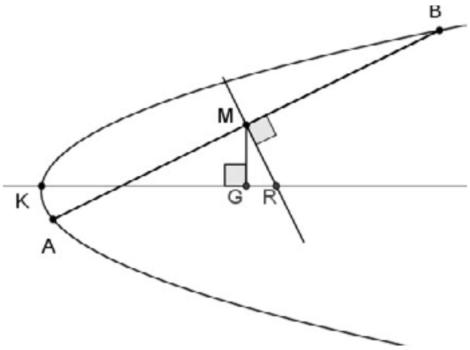
קישור 2: שוויון קטעים על ציר הפרבולה
Link 2: https://www.geogebra.org/m/MUdTrapS

יישומון מספר 3 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 3, מדגים את התכונה שאורך היטל הנורמל על ציר הפרבולה הוא גודל קבוע השווה לפרמטר של הפרבולה, כאשר גוררים את הנקודה E על גבי הפרבולה.

קישור 3: אורך קבוע של היטל נורמל הפרבולה
Link 3: https://www.geogebra.org/m/E9VFPCkQ

דרך ג': מציאת מיקום המוקד בעזרת אנך אמצעי למיתר.

מעבירים מיתר כלשהו AB ובונים לו אנך אמצעי בנקודה M שעליו כמוצג באיור 5. האנך האמצעי חותך את ציר הפרבולה בנקודה R. מהנקודה M מורידים אנך MG לציר הפרבולה. על פי תכונה ידועה, האורך של הקטע GR הוא p – הפרמטר של הפרבולה. למציאת המוקד, חגים קשת ברדיוס $\frac{GR}{2}$ מהנקודה K.



איור 5: מציאת מוקד הפרבולה בעזרת אנך אמצעי למיתר

יישומון מספר 4 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 4, מדגים את התכונה שההיטל GR של הקטע MR על ציר הפרבולה, הוא גודל קבוע כאשר גוררים את הנקודה B על גבי הפרבולה ובתנאי שהמיתר AB אינו ניצב לציר הפרבולה. ניתן לשנות בסרגל את הפרמטר של הפרבולה ובכל שלב מופיעים ערכי p ו-GR על המסך.

קישור 4: אורך קבוע של היטל אנך אמצעי למיתר בפרבולה
Link 4: https://www.geogebra.org/m/Y7RREbJU

<u>דרכים אחרות</u> (ללא תיאור בנייה ואיורים)

1. מעבירים בפרבולה שני מיתרים מאונכים זה לזה. תהיינה M ו-N נקודות האמצע של המיתרים, אזי $y_M\cdot y_N=-p^2 \Rightarrow p=\sqrt{-y_M\cdot y_N}$ והבנייה מתבצעת על פי ערכי הגדלים y_M ו- y_N ובניית הממוצע ההנדסי שלהם.
2. תהא A נקודה כלשהי על הפרבולה. האנך מ-A לציר ה-y חותך את ציר y בנקודה B. האנך מהנקודה B לישר AO – ראשית הצירים) חותך את ציר ה-x בנקודה C ששיעוריה C(2p,0).
3. תהא A נקודה כלשהי על הפרבולה. ידועה התכונה שאם המשיק לפרבולה בנקודה A חותך את ציר ה-y בנקודה B, אזי $\angle ABF=90^0$ (F מוקד הפרבולה). בונים אנך לקטע AB דרך הנקודה B. אנך זה חותך את ציר הסימטריה בנקודת המוקד.

הערה: דרכי הבנייה המגוונות שהוצגו למשימה המוזכרת לעיל, וכן אלו שנשתמש בהן בשתי המשימות להלן, מציגות את יופייה של המתמטיקה ויש בהן השלמה למאמרים שהוצגו בהם דרכי הוכחה מגוונות לאותה משימה מתמטית, אם בשימוש בכלים מאותו התחום אם בשילוב של כלים מתחומים אחרים. בכך מודגמת התפיסה כי המתמטיקה היא כעץ ענק שענפיו משתלבים זה בזה (סטופל והריר, 2008; סטופל ומוגילבסקי, 2004; Henkin & Loonard, 1978; Leikin, 2009; Stupel & Ben-Chaim, 2013b).

משימה ב': מציאת צירי הסימטריה וערכי הפרמטרים של אליפסה

באיור 6 נתונה אליפסה ללא סימון צירי הסימטריה שלה.

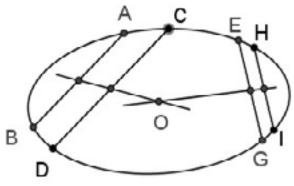
תיאור הבנייה

בונים באליפסה זוג מיתרים מקבילים (AB ו-CD) ונקודות האמצע שלהם.

בונים זוג מיתרים מקבילים נוסף (EG ו-HI) ונקודות האמצע שלהם.

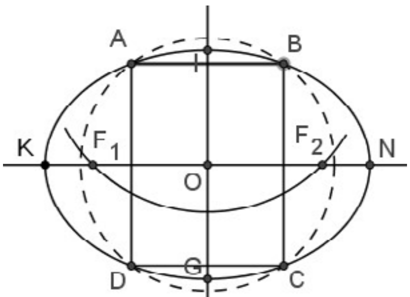
מיתרים אלו אינם מקבילים לזוג המיתרים הראשון.

על פי תכונה ידועה של אליפסה: "אמצעי מיתרים מקבילים נמצאים על קו ישר העובר דרך מרכז האליפסה", מעבירים את שני הישרים המחברים את אמצעי המיתרים והם נחתכים בנקודה O שהיא מרכז האליפסה (ראה איור 6).



איור 6: מציאת מרכז האליפסה

מהנקודה O – מרכז האליפסה, חגים מעגל עם רדיוס כזה שיחתוך את האליפסה בארבע נקודות A,B,C,D כמתואר באיור 7. נקודות אלו (בשל הסימטריה של האליפסה ביחס לצירים) הם הקודקודים של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירי האליפסה.



איור 7: מציאת המוקדים של אליפסה

מחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות של המלבן ומתקבלים צירי הסימטריה של האליפסה. צירים אלו חותכים את האליפסה בנקודות K, I, N, G שהן נקודות הקצה של צירי האליפסה.

לכן, $a=ON$ – פרמטר של הציר הגדול של האליפסה; $b=OI$ – פרמטר של הציר הקטן של האליפסה.

לפי הגדרת האליפסה $r_1+r_2=2a$ כאשר r_1 ו- r_2 הם הרדיוסים היוצאים מהמוקדים. עבור הנקודה I מתקיים ש- $r_1=r_2=a$. לכן מנקודה זו חגים קשת ברדיוס a החותכת את הציר הגדול של האליפסה בשתי נקודות שהם המוקדים שלה (F_1 ו- F_2 באיור 7).

יישומון 5 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 5, מדגים את התכונה שאמצעי מיתרים מקבילים באליפסה נמצאים על ישר אחד שעובר דרך מרכז האליפסה. באמצעות גרירה הנקודה A או הנקודה E על האליפסה אפשר לשנות את הזוויות של המיתרים. בגרירת הנקודות C או H אפשר לשנות את המרחק בין המיתרים המקבילים.

קישור 5: ישרים המחברים אמצעי מיתרים מקבילים באליפסה

Link 5: https://www.geogebra.org/m/y4NjzNuB

משימה ג':

ג1: מציאת אורך הציר הממשי של היפרבולה - ערך הפרמטר a

גם במקרה זה נתונה היפרבולה ללא סימון צירי הסימטריה. מציאת נקודת מרכז ההיפרבולה (נקודת מפגש הצירים) ושרטוט הצירים עצמם, נעשית באותה הדרך ובהתבסס על אותן התכונות שבעזרתן נמצאו צירי האליפסה (משימה ב'). באשר למציאת שאר הפרמטרים (b ו-c), קיים קושי שלא היה במקרה של אליפסה.

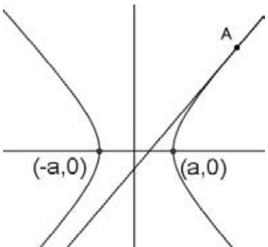
את הפרמטר a מקבלים מנקודת החיתוך של ההיפרבולה עם הציר הממשי (ציר ה-x), כמתואר באיור 8.

את הפרמטר b אי אפשר למצוא כי ההיפרבולה לא חותכת את הציר המדומה (ציר ה-y).

למציאת הפרמטרים b ו-c יש לבנות משיק להיפרבולה.

תיאור בניית משיק להיפרבולה בנקודה כלשהי עליה:

תהא הנקודה $A(x_A,y_A)$ נקודה על ההיפרבולה ובנקודה זו רוצים לבנות משיק להיפרבולה (ראה איור 8).



איור 8: מציאת הציר הממשי של היפרבולה

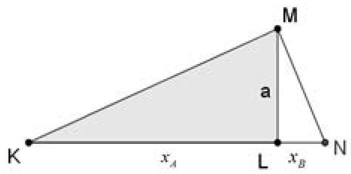
משוואת המשיק היא $\frac{x_A\cdot x}{a^2}-\frac{y_A\cdot y}{b^2}=1$ והוא חותך את ציר ה-x בנקודה $B(x_B,0)$.

על פי משוואת המשיק מקבלים

$x_B\cdot x_A=a^2 \Rightarrow a=\sqrt{x_B\cdot x_A}$.

תיאור הבנייה של הקטע x_B:

מעתיקים את הקטע x_A ומסמנים את קצותיו K, L (ראה איור 9).



איור 9: מציאת אורך הציר הממשי של היפרבולה

בנקודה L בונים אנך שאורכו a. מתקבל משולש ישר זווית ΔKLM.

בנקודה M בונים אנך לישר KM החותך את המשך KL בנקודה N. אורך הקטע LN הוא x_B ומאחר שהמשולש ΔKLM הוא ישר זווית אזי a הוא הממוצע הגאומטרי של x_A, x_B.

על סמך אורכי הקטעים x_A ו- x_B אפשר לבנות את המשיק.

ג2: מציאת ערכי הפרמטרים b ו-c של היפרבולה על סמך משיק ונורמל

בוחרים על ההיפרבולה נקודה כלשהי A ובנקודה זו בונים משיק ונורמל והם חותכים את צירה הממשי בנקודות Q ו-R בהתאמה כמתואר באיור 10.

לפי תכונה ידועה $OQ\cdot OR=c^2$ כאשר O – נקודת מפגש הצירים.

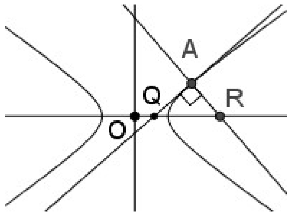
מכאן $c=\sqrt{OQ\cdot OR}$.

על-פי אורכי הקטעים Q ו-OR בונים את הממוצע הגאומטרי שלהם

שהוא הפרמטר c.

כעת בונים משולש ישר זווית שניצב אחד שלו a, היתר שלו c ומקבלים את אורך הניצב השני שהוא b - הפרמטר של הציר המדומה.

יישומון 6 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 6, מציג את התכונה שמכפלת מרחקי נקודות החיתוך של המשיק ושל הנורמל (עם הציר הממשי) מראשית הצירים, הוא גודל קבוע השווה לריבוע מרחק המוקד (c^2) כשנקודת ההשקה A נעה על ההיפרבולה. כשגוררים את הנקודה Q ערך מכפלת המרחקים נשארת קבועה.



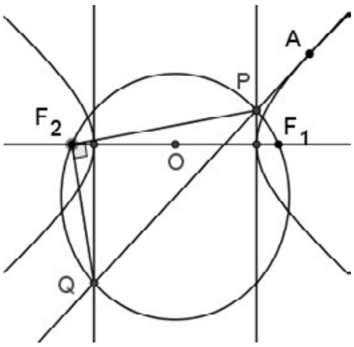
איור 10: מציאת ערכי הפרמטרים b ו-c של היפרבולה

קישור 6: מכפלה קבועה של קטעים על ציר ההיפרבולה

Link 6: https://www.geogebra.org/m/jB24sajs

ג3: מציאת ערכי הפרמטרים b ו-c של היפרבולה על סמך שלושה משיקים

בונים משיק בנקודה כלשהי A, וכן את שני המשיקים בקודקודי ההיפרבולה כמתואר באיור 11. המשיק בנקודה A חותך את המשיקים שעוברים בקודקודים בנקודות P ו-Q. על פי תכונה ידועה ממוקדי ההיפרבולה רואים את הקטע PQ בזווית ישרה. על הקטע PQ כקוטר בונים מעגל החותך את הציר הממשי בנקודות F_1 ו-F_2 שהם מוקדי ההיפרבולה.



איור 11: מציאת ערכי הפרמטרים b ו-c של היפרבולה על סמך שלושה משיקים

כעת בונים משולש ישר-זווית שניצב אחד שלו a והיתר c (אורך הקטע $F_2O=c$).

הניצב האחר הוא הפרמטר b.

יישומון 7 שאפשר להגיע אליו בעזרת קישור 7, מדגים את התכונה כי ממוקדי ההיפרבולה רואים ב-90° את הקטע הנחתך ממשיק בידי שני משיקים להיפרבולה בקודקודיה. כשגוררים את הנקודה A על גבי ההיפרבולה, $\angle PF_2Q$ נשארת קבועה 90°.

קישור 7: מבט ממוקדי ההיפרבולה על קטע הנחתך ממשיק להיפרבולה

Link 7: https://www.geogebra.org/m/PsJ3bsZu

ג4: מציאת ערכי הפרמטרים b ו-c של היפרבולה ללא משיקים

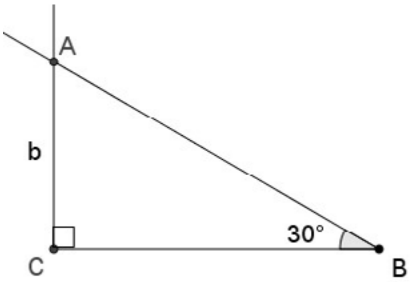
לאחר מציאת הערך של a מוצאים את ערך y של נקודה A שעל ההיפרבולה שערך ה-x שלה הוא $2a$ כמתואר באיור 12.

כשמציבים את ערכי הנקודה A במשוואת ההיפרבולה מקבלים:

$$\left(\frac{2a}{a}\right)^2-\left(\frac{y_A}{b}\right)^2=1\Rightarrow\frac{y_A^{\,2}}{b^2}=3\Rightarrow\frac{y_A}{b}=\sqrt{3}$$

למציאת הערך של b משתמשים בתכונה גאומטרית ידועה שבמשולש ישר זווית $30^0, 60^0, 90^0$ יחס הניצבים הוא $\sqrt{3}$. מעתיקים את הקטע y_A שקצותיו הם הנקודות B ו-C כמתואר באיור 13.

בקודקוד C מעלים אנך ובקודקוד B בונים זווית של 30°. קרן הזווית מהנקודה B חותכת את האנך שבנקודה C בנקודה A. האורך של הניצב AC הוא הגודל של הפרמטר b. את האורך של הפרמטר c (מיקום המוקדים) מוצאים באותה הדרך שזה נעשה בסעיף ג2.



איור 13: מציאת ערכי הפרמטר של היפרבולה

הערה מתודית

ביצוע הבניות התאפשר בעזרת התכונות המיוחדות של המקומות הגאומטריים. גם לנו כמי שעוסקים בחינוך מתמטי לא כולן היו ידועות מלכתחילה. רק כאשר עמדנו לפני מבוי סתום להמשך הבניות, פנינו לספרי הלימוד ומצאנו בהם תכונות לא מוכרות שרק בעזרתן הצלחנו להתמודד עם האתגר של הבניות. אין לנו ספק שיש עוד תכונות המאפשרות לבצע את הבניות בדרכים אחרות. מכל מקום ראוי לבקש מהתלמידים לנסות לאתר תכונות אחרות בספרי הלימוד ובמאמרים בנושא או בהעלאת השערות ובדיקתן לשם אישור באמצעות תוכנה גאומטרית דינמית. אך כמקובל, אין להסתפק בתוכנה הגאומטרית ויש להוכיח כל תכונה ותכונה בדרך הפורמלית כמקובל במתמטיקה.

סיכום

הוצגו דרכים מגוונות לביצוע בניות הנדסיות בשלושה מקומות גאומטריים שמופיעים בתוכניות הלימוד של החינוך העל-יסודי. ביצוע הבניות הסתמך על התכונות המיוחדות שלהם וכדי להבליט אותן, שולבו קישורים ליישומונים המאפשרים לקורא לבצע חקר דינמי שלהן.

רשימת מקורות

גבע י' (1996). מתמטיקה ל-5 יחידות (כרך ג). תל-אביב: המחבר.

גורן, ב' (2005). גיאומטריה אנליטית (5 יחידות לימוד). תל-אביב: המחבר.

מן, א' (1987). [סרגל ומחוגה](). על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 3, 11-15.

סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (1996). **בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות**. שאנן, ב, 95-108.

סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (1998). **עוד על בניות הנדסיות ייחודיות**. שאנן, ד, 249-264.

סטופל, מ' וחריר, ש' (2008). **"יפה היא הגאומטריה" – חיזוק ההיגד ע"י הצגת דרכי פתרון לאותה משימה**. שאנן, יג, 255-271.

סטופל, מ' ומוגילבסקי, ר' (2004). **הדגמת דרכי-פתרון שונות לארבע משימות הנדסיות**. שאנן, ט, עמ' 367-384.

סטופל, מ', זיסקין, ק' ובן-חיים, ד' (עורכים). (2015). בניות גיאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות. חיפה: שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך.

Henkin, L., & Leonard, W. A. (1978). **A Euclidean construction?** *Mathe-*

matics Magazine, 51(5), 294-298.

Liekin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hana & M. De Villiers (Eds.), *The proceeding of the 19th ICMI Study conference: Proofs and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 31-36). National Taipei University, Taiwan.

Martin, G. E. (1998). *Geometric constructions*. New York: Springer

Riddle, D. R. (1996). *Analytic geometry* (6 ed.). Australia: Brooks/cole cengage learning.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013a). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezoids: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal (ASMJ)*, *27*(2), 6-24.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013b). **One problem, multiple solutions: Howmultiple proofs can connect several areas of mathematics**. *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(2), 129-161.

Yiu, P. (2014). **Three constructions of Archimedean circles in an arbelos**. *Forum Geometricorum*, *14*, 255-260.