בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון:
ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה

משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
דוד בן-חיים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל; שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

תקציר

פתרון בעיות והוכחות תמיד שיחקו תפקיד מכריע במתמטיקה. למעשה, הם הלב והנשמה של הדיסציפלינה הזו. יתרה מזו, שימוש בטכניקות הוכחה שונות – באותו תחום מתמטי או בין התחומים המתמטיים – בעבור בעיה ספציפית אחת, יכול להציג את הקישוריות בין תחומים אלו, כמו גם את העושר, היופי והאלגנטיות של המתמטיקה. במאמר הזה, אנו מציגים בעיה גאומטרית מעניינת ומציגים בעבורה שמונה הוכחות שונות על-ידי שימוש בשיטות מתחומים מתמטיים שונים. כמו כן, נעשה שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית (ג'יאוג'ברה – Geogebra) שבאמצעותה אפשר להעלות השערה ראשונית באשר לפתרון הבעיה. אנו בהחלט תומכים בכך, שהמורים יכללו תרגיל מרובה הוכחות בתכניות ההוראה שלהם במתמטיקה. עידוד תלמידים להגיע לתוצאות בדרכים שונות יחזק את ההערכה שלהם כלפי המתמטיקה, ייתן להם תמריץ להפיק בעצמם אפילו יותר פתרונות אלגנטיים ויספק להם הזדמנות להגיע לתובנה מקורית בנושא הוכחות במתמטיקה. כבונוס, הבעיה שהוצגה סיפקה הפתעה נעימה בכך שפתרונה גילה משולש מיוחד עם תכונות מעניינות. כהשלכה מהניסיון שלנו במאמר הזה, אנו טוענים שראשית יש למלא את הצורך שהקהילה המתמטית-חינוכית תיצור עוד בעיות אותנטיות רבות, כאלו המתאימות לריבוי דרכי פתרון והוכחות, ורק לאחר מכן לבדוק ולחקור את תוצאות היישום שלהן בהוראת מתמטיקה ובלמידתה. בעיות מרובות פתרונות מהוות את הבסיס שעליו בנוי הקורס המכונה "פיתוח חשיבה במתמטיקה" בהכשרת פרחי הוראה במתמטיקה לבית-הספר העל-יסודי במכללת שאנן. אנו נדווח על מחקר זוטא שבדק את דעות הסטודנטים שהשתתפו בקורס ודעות מרצים שונים במכללות בנושא השימוש בבעיות מרובות פתרונות.

מילות מפתח: *הוכחות במתמטיקה; פתרון בעיות; ריבוי פתרונות והוכחות; סביבות גאומטריות דינמיות; תוכנות גאומטריות דינמיות.*

1. מבוא

מטרת המאמר הזה היא להראות עד כמה קשורים זה לזה הנושאים המתמטיים השונים הנלמדים בבית-הספר התיכון, ובמיוחד כיצד הגאומטריה האויקלידית מהווה בסיס שעליו בנויים הנושאים של הגאומטריה האנליטית, הטריגונומטריה, תורת הווקטורים והמספרים המרוכבים. כפועל יוצא מכך, מטרת משנה היא לבדוק את אפשרות השימוש בבעיות מרובות פתרונות בדרכים שונות ובאמצעות נושאים מתמטיים שונים בהכשרת מורים במתמטיקה, ובפרט בהכשרת פרחי הוראה במתמטיקה של בית-הספר העל-יסודי.

מנקודת מבט פדגוגית-דידקטית, המאמר הזה מציג בעיה מתמטית ספציפית, שבמבט ראשון נראה שיש לפתור אותה רק בעזרת גאומטריה אויקלידית. אולם אנו נראה בעקבות כך, שהיא ניתנת לפתרון בעזרת שיטות אחדות נוספות, חלקן גאומטריות ואחרות מבוססות על שטחים אחרים במתמטיקה.

הקיום של ריבוי הוכחות למציאת הפתרון, לא רק מציג לתלמידים את היופי והאסתטיקה של המתמטיקה (Dreyfus & Eisenberg, 1986; Sinclair, 2011), אלא גם מקדם את ההבנה המתמטית של התלמידים על-ידי הצגת חומרים מנקודות מבט שונות. היופי של המתמטיקה מתעצם עוד יותר על-ידי השימוש בתוכנה גאומטרית דינמית (DGS – Dynamic Geometry Software).

נוסף על כך, הבעיה המוצגת במאמר זה מגלה תוצאה מפתיעה: משולש מיוחד עם תכונות מעניינות, שלפי מיטב ידיעתנו, עדיין לא הופיע בספרות המקצועית של המתמטיקה.

2. הוכחות במתמטיקה

הוכחות וטיעונים הם אבני יסוד בפתרון בעיות מתמטיות: הם עוזרים לנו לפרש את המתמטיקה, לקשר רעיונות מתמטיים ולהצדיק את תקפותם של משפטים מתמטיים (Martin et al., 2005). לעולם לא ניתן לפקפק בחשיבות ההוכחה במתמטיקה בכלל, ולא במתמטיקה הבית-ספרית בפרט (Harel & Sowder, 2007). תפקידי ההוכחה הם להוכיח, להסביר ולשכנע (Hanna, 1990; Hersh, 1993).

סטיליאנידס (Stylianides, 2007) מגדיר הוכחה כ"טענה מתמטית, סידרה קשורה של טיעונים בעד או נגד טענה מתמטית, בעלת המאפיינים הבאים:

1. משתמשת באמרות/משפטים המקובלים על-ידי הקהילה המתמטית (קבוצה של משפטים), אשר נכונים וניתנים להשגה ללא צורך בהצדקה נוספת.
2. משתמשת בצורות של שכילה/הסקת מסקנות (דפוסים של הנמקה) תקפות או ידועות לקהילה הלומדת, או בתחום ההמשגה שלה.
3. מתקשרת בעזרת צורות ביטוי (דפוסים של הצעת טענות) אשר מתאימות וידועות לקהילה הלומדת, או בתחום ההמשגה שלה" (עמ' 291).

לו ומקרורי (Lo & McCrory, 2009) מציעים שכדי להבין פעילויות הוכחה בקורסים מתמטיים, יש להוסיף אלמנט רביעי להגדרה:

4. ההוכחה מתייחסת לאובייקטים בתוך הקונטקסט (תלויי קונטקסט) הקובעים מה צריך להוכיח.

ראב (Rav, 1999) מציין, שהוכחה היא בעלת ערך, לא רק בשל הצגת תוצאה כלשהי, אלא גם כי היא יכולה להציג שיטות, כלים, אסטרטגיות ומושגים חדשים בעלי שימוש נרחב יותר במתמטיקה והפותחים כיוונים מתמטיים חדשים. לפי השקפתו של ראב (Rav, 1999), לא ניתן לוותר על הוכחות בהקשר להרחבת הידע המתמטי והן למעשה "הלב של המתמטיקה, הדרך הסלולה ליצירת כלים אנליטיים וזירוז הצמיחה" (עמ' 6). כפי שראב (Rav, 1999) כותב בתזה שלו: "הוכחות, לעומת צורת הניסוח של המשפטים, הן המטען של הידע המתמטי "(עמ' 20).

המי ולופוול (Hemmi & Lofwall, 2009) ביצעו מחקר שבדקו בו השקפות של מתמטיקאים על התועלת בלמידת הוכחות, ובעקבות כך הם הסיקו כי "כל המתמטיקאים במחקר שלהם סברו שהוכחות הן בעלות ערך עבור הסטודנטים, מפני שהן מציעות להם שיטות חדשות, מושגים חשובים והתנסות בחשיבה לוגית הנחוצה בפתרון בעיות" (עמ' 201). אי לכך, אין זה פלא שפיתוח היכולת של סטודנטים להוכיח ולהפעיל שיקול דעת הוא אחת המטרות של הסטנדרטים של תכניות הלימודים בהרבה ארצות. לדוגמה עיקרון אחד במתמטיקה הבית-ספרית בארה"ב הוא: "שיקול דעת והוכחה צריכים להיות חלק עקבי בהתנסויות המתמטיות של הסטודנטים, מהגן ועד סוף בית-הספר התיכון" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

למידת מתמטיקה באופן בסיסי אמורה להיות ממוקדת "ברכישת נקודת מבט מתמטית", "בפיתוח שכילה מתמטית", "בלמידה לתקשר מתמטית", "בביצוע קישוריות במתמטיקה" ו"בבניית קשרים עם דיסציפלינות והתנסויות אחרות" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 56).

מכיוון שלמידת מתמטיקה עוסקת בגילוי, בהוכחה ובשיקול דעת, אלו הן דרכים משמעותיות לפיתוח תובנה, עשיית קשרים וביצוע תקשורת מתמטית. המועצה הלאומית של מורים למתמטיקה (להלן NCTM) מחזקת את העובדה הזו בטענה: "להיות מסוגל להפעיל שיקול דעת הוא חיוני להבנה" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 56). טענה זו מצביעה על כך שבקיאות בהוכחה מתמטית והפעלת שיקול דעת הם חלק בלתי נפרד של המתמטיקה!

בדומה ל-NCTM, חוקרים בולטים בחינוך מתמטי גם טוענים שלא ניתן להמעיט בערך של תפקיד הארגומנטציה וההוכחה בלמידת הסטודנטים, והם תומכים ברעיון של הכללת הנושא הזה בתכנית הלימודים הבית-ספרית ובתכניות הכשרה של מורים למתמטיקה. לדוגמה, בול ועמיתותיה (Loewenberg Ball et al., 2000), דריפוס (Dreyfus, 2000) והנה (Hanna, 1996) תומכים בעמדה הזו:

"הוכחה היא מרכזית במתמטיקה וככזו היא חייבת להיות מרכיב מרכזי של חינוך מתמטי. הדגשה זו מוצדקת לא רק כי הוכחה היא בלב הפרקטיקה המתמטית, אלא גם בגלל שהיא כלי חינוכי לקידום ההבנה המתמטית" (Loewenberg Ball et al., 2000).

דריפוס (Dreyfus, 2000) מציין כי "הוכחה היא בלבה של המתמטיקה, ונחשבת כמרכזית בהרבה תכניות של בתי-הספר התיכוניים".

הנה (Hanna, 1996) קובעת ש"הוכחה ראויה למקום בולט בתכנית הלימודים, מפני שהיא ממשיכה להיות סממן בולט של המתמטיקה עצמה, כשיטה מועדפת של אימות, ומפני שהיא כלי בעל ערך בקידום ההבנה המתמטית".

3. בעיה אחת - הרבה דרכי פתרון והוכחה

אנשי חינוך מתמטי מסכימים שקישור רעיונות מתמטיים על-ידי שימוש ביותר מגישה אחת לפתרון אותה בעיה הוא אלמנט חיוני בהתפתחות השכילה המתמטית (Schoenfeld, 1985; Polya, 1973; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

פתרון בעיות בדרכים שונות גם דורש וגם מפתח ידע מתמטי (Polya, 1973), ומעודד גמישות ויצירתיות במחשבה המתמטית האינדיבידואלית (Leiken & Lev, 2007; Tall, 2007).

בתוספת לתפקיד הייחודי של הוכחה במתמטיקה, אנו סבורים שניסיונות להוכיח תוצאה מסוימת (או לפתור בעיה) על-ידי שימוש בשיטות ממספר ענפים שונים במתמטיקה (גאומטריה, טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים וכדומה) הם מאוד חשובים לפיתוח העמקת ההבנה המתמטית, לפיתוח יצירתיות, להערכת הערך של ארגומנטציה והוכחה בלמידת נושאים מתמטיים שונים. הגישה שלנו, של הצגת ריבוי הוכחות לאותה בעיה, כמכשיר לבניית קישורים מתמטיים, נתמכת על-ידי פוליה (Polya, 1973, 1981), שונפלד (Schoenfeld, 1988), ארסוז (Ersoz, 2009), NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) ולבב-ויינברג ולייקין (Levav-Waynberg & Leiken, 2009).

בדומה מאוד לרעיון שלנו, של "בעיה אחת, ריבוי פתרונות/הוכחות", קיים הרעיון של מטלות בעלות ריבוי פתרונות (multiple solution tasks) המוצגים על-ידי לייקין ולב (Leiken & Lev, 2007), לייקין (Leiken, 2009), לבב-ויינברג ולייקין (Levav-Waynberg & Leiken, 2009). במסגרת הרעיון הזה, קיימת דרישה ברורה להוכחת משפט או טענה במספר דרכים. לייקין (Leiken, 2009) מציינת שההבדלים בין ההוכחות מתבססים על (1) הצגות שונות של מושג מתמטי; (2) תכונות שונות (הגדרות או משפטים) של מושגים מתמטיים מנושא מתמטי מסוים; (3) כלים ומשפטים מתמטיים מענפים מתמטיים שונים; (4) משפטים וכלים שונים מנושאים שונים (לא בהכרח ממתמטיקה). במקרה שלנו, אנו מיישמים את הסוג השלישי של ההבדלים בין ההוכחות: אנו נציג פתרונות שונים לבעיה באמצעות כלים ומשפטים של גאומטריה אויקלידית, גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה, וקטורים ומספרים מרוכבים.

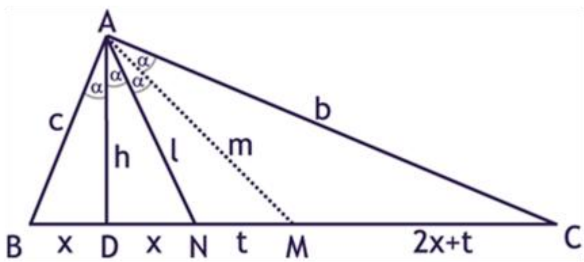
תוספת המושג של ריבוי דרכי פתרון לבעיה אחת לתכנית הלימודים של מתמטיקה, כמו גם את המטלות בעלות ריבוי פתרונות, מאפשרת את ההתפתחות של ידע מתמטי מקושר לא רק בעבור הסטודנטים אלא גם בעבור מוריהם.

4. הצגת הבעיה[1]

נתון משולש ABC שאורכי צלעותיו הם: $BC=a;\ AC=b;\ AB=c$. מהקודקוד A מעבירים את שלושת הקטעים הבאים: את הגובה AD לצלע BC המסומן ב-h, את AN חוצה זווית $\angle A$ המסומן ב-l ואת AM התיכון לצלע BC המסומן ב-m, כפי שניתן לראות בציור מס' 1. נתון ששלושת הקטעים מחלקים את זווית $\angle A$ לארבע זוויות שוות, שכל אחת מהן מסומנת ב-α. יש למצוא את ערכה של זווית זו.

דרך א׳ - שימוש בהנדסת המישור

ברור שהמשולש ΔBAN הוא משולש שווה שוקיים, שכן (משולש שבו $AB=AN=l=c$ הגובה וחוצה הזווית מתלכדים). מעובדה זו ניתן לסמן $BD=DN=x$ ולהוסיף סימון NM=t.



ציור מס׳ 1

על-פי משולש ΔADM, $\frac{m}{h}=\frac{t}{x}$ (על-פי משפט חוצה הזווית) (1)

על-פי משולש ΔANC, $\frac{b}{l}=\frac{b}{c}=\frac{2x+t}{t}$ (על-פי משפט חוצה הזווית) (2)

על-פי משולש ΔABC, $\frac{b}{c}=\frac{2x+2t}{2x}=\frac{x+t}{x}$ (על-פי משפט חוצה הזווית) (3)

על-ידי שימוש בקשרים (2) ו-(3) מקבלים: $\frac{2x+t}{t}=\frac{x+t}{x}\Rightarrow t=x\sqrt{2}$ (4)

1. **המקור לבעיה והנצחה:** את המשימה שעליה מבוסס המאמר הציג לאחד מהמחברים המורה למתמטיקה, מנחם אורנשטיין ז"ל, מבית-הספר נעל"ה שבכפר הנוער צבי סיטרין – חוף הכרמל, שנדרס למוות ביציאה מבית-הספר, בדרכו לביתו ביישוב צופים (מזרחה לכפר-סבא). מנחם ז"ל אהב בכל נפשו את הוראת המתמטיקה והיה אהוד על כל תלמידיו. אנו מקדישים מאמר זה לזכרו. יהי זכרו ברוך.

על-ידי שימוש בקשרים (1) ו-(4) מקבלים:

$$m=\frac{ht}{x}=\frac{hx\sqrt{2}}{x}=h\sqrt{2} \qquad (5)$$

על-ידי שימוש במשפט פיתגורוס במשולש ΔADM מקבלים:

$$(DM)^2+h^2=m^2 \Rightarrow (x+t)^2+h^2=m^2 \qquad (6)$$

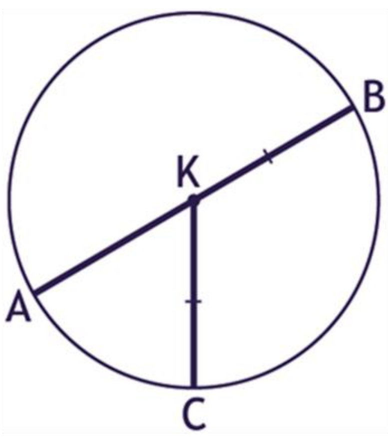
על-ידי שימוש בקשרים (4) ו-(5) מקבלים:

$$[x(1+\sqrt{2})]^2+h^2=2h^2 \Rightarrow h=x(1+\sqrt{2}) \Rightarrow h=DM \qquad (7)$$

על-ידי שימוש בקשר (7) מקבלים, שמשולש ΔADM הוא ישר-זווית ושו"ש, כלומר, $2\alpha=45° \Rightarrow \alpha=22.5°$. התוצאה הסופית מפתיעה, ומחייבת שהמשולש ΔABC הוא ישר-זווית בקודקוד A.

התייחסות למשימה ההפוכה: המשימה ההפוכה היא: נתון משולש בעל זוויות חדות של $\angle BCA=22.5°$ ו- $\angle ABC=67.5°$ ודרך הקודקוד A (של הזווית הישרה) מעבירים בתוך המשולש שלושה קטעים המחלקים את הזווית לארבע זוויות שוות. יש להוכיח שקטעים אלו הם: גובה, חוצה-זווית ותיכון לצלע BC. במקרה זה, ההוכחה פשוטה מאוד בהשוואה למשימה המקורית. בחלק מהמקרים ההוכחות של המשפט ושל המשפט ההפוך קלות וישנם מקרים שההוכחה באחד הכיוונים קלה אך בכיוון ההפוך היא קשה הרבה יותר. דוגמה בולטת לכך, היא ההוכחה הקשה של המשפט: "אם במשולש שווים באורכם שנים מחוצי-הזוויות, אזי המשולש הוא שו"ש", לעומת הקלות שבהוכחת המשפט ההפוך.

הערה דידקטית: כצפוי, מרבית הסטודנטים והמורים שנתבקשו לפתור את משימת המאמר החלו לפתור אותה בדרך גאומטרית המשתמשת במשפט חוצה הזווית, כפי שהוצג בפתרון א' וזאת מהסיבה שבמשימה ישנם שלושה משולשים שבכל אחד מהם עובר חוצה זווית.



ציור מס׳ 2

דרך ב׳ - שימוש בהנדסת המישור

<u>משפט עזר</u>: אם AB הוא קוטר של מעגל ו-K היא נקודה על הקוטר כך ש-$KB=KC$ אזי הנקודה K היא מרכז המעגל (ראו ציור מס' 2).

הוכחת משפט העזר: הזווית $\angle ACB = 90°$ לפי שהיא זווית היקפית הנשענת על הקוטר AB.

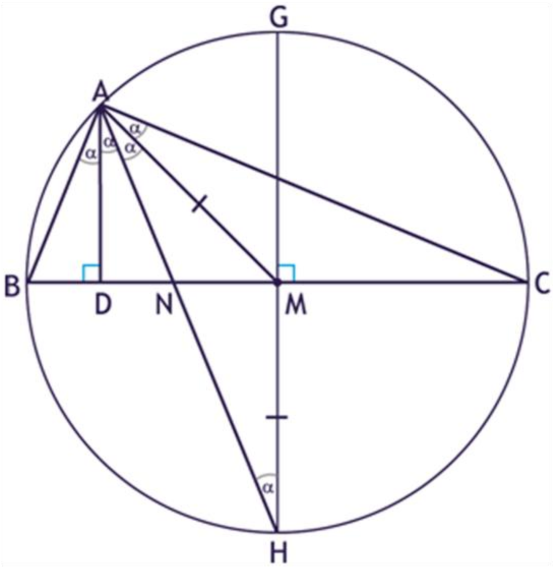
$$\angle KCB = \angle KBC = \alpha \Rightarrow \angle ACK = 90° - \alpha$$

$$\angle CKB = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle AKC = 2\alpha$$

ולכן על-ידי חישוב זוויות במשולש ΔAKC מקבלים $\angle KAC = 90° - \alpha$ ומזה נובע ש- $AK = KC = KB$, שמשמעו: הנקודה K היא מרכז המעגל.

שימוש במשפט העזר להוכחת המשימה:
חוסמים את המשולש ΔABC במעגל כפי שנראה בציור מס' 3.

המיתר GH הוא אנך אמצעי למיתר BC (עובר דרך נקודת האמצע שלו), ועל כן הוא קוטר במעגל. האנך האמצעי GH וחוצה הזווית AN נפגשים בנקודה H שעל המעגל.



ציור מס' 3

מהעובדה ש-$HB=HC$ נובע ש- $\angle CAH = \angle BAH$. על-פי המקבילות של הישרים $AD \| GH$ נובע שוויון בין הזוויות ההיקפיות $\angle DAN = \angle MHA$.

לכן משולש ΔAMH הוא משולש שווה שוקיים או במילים אחרות $AM = MH$.

הנקודה M היא נקודה על הקוטר שמקיימת $AM = MH$, ולכן על-פי משפט העזר הנקודה M היא מרכז המעגל. היות שהמיתר BC עובר דרך נקודה זו הרי שגם הוא קוטר. הזווית $\angle BAC$ שווה ל-$90°$ כזווית היקפית הנשענת על קוטר. כלומר, $4\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 22.5°$.

דרך ג' - שימוש בהנדסת המישור - הוכחה בדרך השלילה

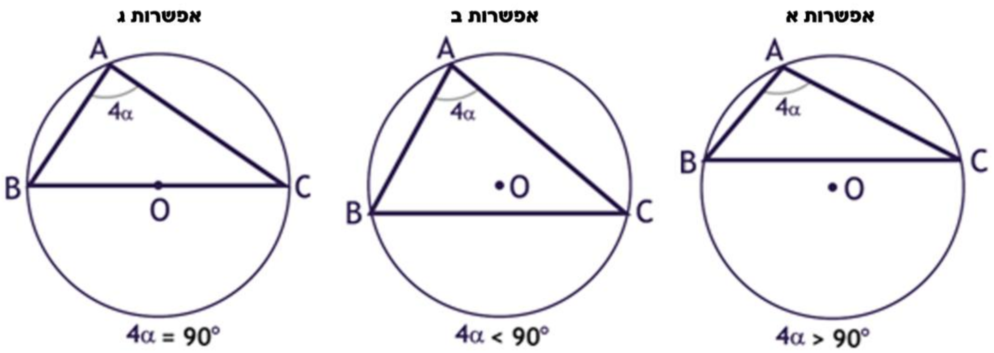
כאשר חוסמים את משולש ΔABC במעגל, קיימות שלוש אפשרויות למיקומו של מרכז המעגל O ביחס לבסיס BC של המשולש:

<u>אפשרות א</u>: אם $4\alpha > 90°$, אזי מיקום המרכז O נמצא מחוץ למשולש.

<u>אפשרות ב</u>: אם $4\alpha < 90°$, אזי מיקום המרכז O נמצא בתוך המשולש.

<u>אפשרות ג</u>: אם $4\alpha = 90°$, אזי מיקום המרכז O נמצא על בסיס המשולש.

שלוש האפשרויות מתוארות בציור מס' 4.

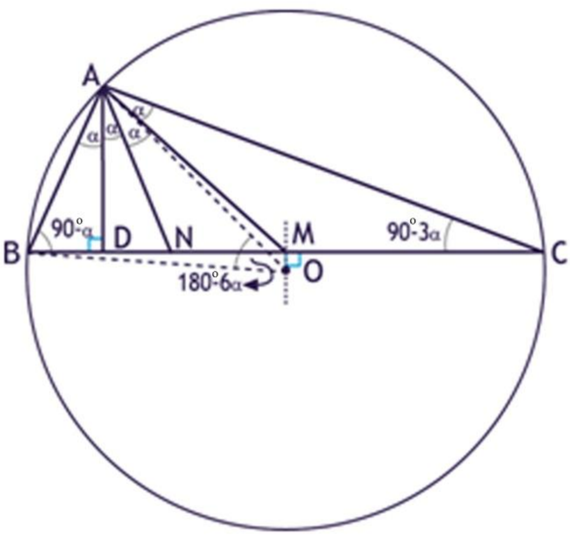


ציור מס' 4

ברור שמרכז המעגל החוסם O נמצא על האנך האמצעי לצלע BC.

השימוש בדרך השלילה מטרתו להוכיח שאפשרויות א ו-ב של מיקום מרכז המעגל יוצרות סתירה.

__אפשרות א__: מחברים את מרכז המעגל O עם הקודקודים A ו-B של המשולש (ראו ציור מס' 5).



ציור מס' 5

הזווית

$CB = 2(90° - 3\alpha) = 180° - 6\alpha$

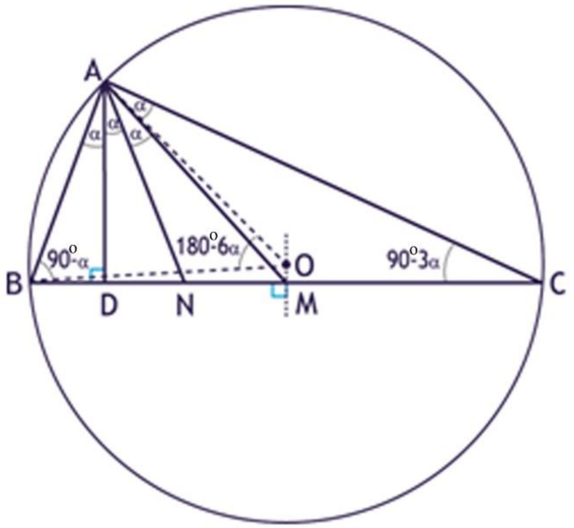
(לפי שזווית מרכזית שווה לכפליים הזווית ההיקפית הנשענות על אותה קשת).

מאחר ש-$OA = OB$ (רדיוסים) הרי שמשולש ΔAOB הוא שווה שוקיים ולכן $\angle OAB = 3\alpha$ מאחר ש-$\angle OAB < \angle MAB$ מתקבל ש-$3\alpha < \angle MAB$ והרי זה בסתירה לנתון ש- $\angle MAB = 3\alpha$,

כלומר נשללת אפשרות א ש-$\angle BAC > 90°$.

__אפשרות ב__: כמו באפשרות א,

מחברים את מרכז המעגל O עם הקודקודים A ו-B (ראו ציור מס' 6).



ציור מס׳ 6

גם במקרה זה
$\angle AOB = 180° - 6\alpha$ והזווית
$\angle OAB = 3\alpha$.
מאחר ש-$\angle OAB > \angle MAB$,
מתקבל ש-$3\alpha > \angle MAB$.
הדבר מהווה סתירה לנתון ש- $\angle MAB = 3\alpha$, כלומר נשללת אפשרות ב' שהזווית $\angle BAC$ קטנה מ- $90°$.

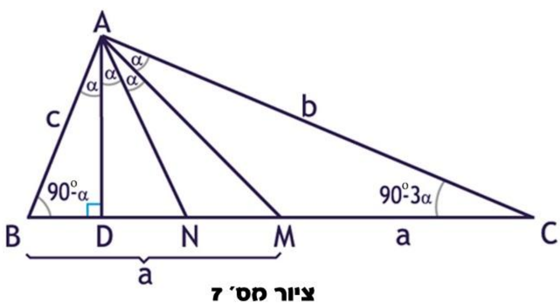
המסקנה:

האפשרות היחידה שקיימת היא אפשרות ג, שבה $4\alpha = 90°$, כלומר המשולש ΔABC הוא משולש ישר-זווית ו- $\alpha = 22.5°$.

הערות מתודיות: בהוכחה בדרך השלילה יש לבדוק את כל האפשרויות ולשלול את כולן, פרט לאחת שהיא האפשרות הנכונה. ראוי לציין שתלמידים מתקשים להבין את הדרך הזו של ההוכחה בדרך השלילה, ולכן תלמידים נמנעים בדרך-כלל להשתמש בדרך זו.

במסגרת חיפוש פתרונות גאומטריים נמצאו שני פתרונות נוספים המבוססים על חסימת המשולש הנתון במעגל. בפתרונות הנוספים שנמצאו לא נעשה שימוש במשפט חוצה הזווית או הוכחה בדרך השלילה.

דרך ד׳ - שימוש בטריגונומטריה



ציור מס׳ 7

נמצאו מספר פתרונות טריגונומטריים שבהם נעשה שימוש במשפט הסינוסים או הקוסינוסים וכן פתרון שבו נעשה שילוב עם חישוב שטחים. כל אחד מפתרונות אלו מחייב שימוש בזהויות טריגונומטריות ובשלב הסופי פתרון

של משוואה טריגונומטרית. הפתרון המוצג במקרה זה הוא הפשוט מבין הפתרונות שהושגו. בשלב הראשון מסמנים: BC=2a (ראו ציור מס' 7).

בשלב השני מבטאים את אורכו של התיכון AM על-ידי שימוש במשפט הסינוסים בשני משולשים שונים והשוואה בין שני הביטויים שמתקבלים.

מהמשולש ΔAMC מקבלים,
$$\frac{AM}{\sin(90°\text{-}3\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow AM = \frac{a\cos 3\alpha}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

מהמשולש ΔAMB מקבלים,
$$\frac{AM}{\sin(90°\text{-}\alpha)} = \frac{a}{\sin 3\alpha} \Rightarrow AM = \frac{a\cos\alpha}{\sin 3\alpha} \qquad (2)$$

מהשוואת קשרים (1) ו-(2) מקבלים,
$$\frac{a\cos 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \Rightarrow \quad 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

ועל-ידי שימוש בזהות של סינוס זווית כפולה מקבלים את המשוואה הטריגונומטרית,

$\sin 6\alpha = \sin 2\alpha$ שפתרונותיה הם:

$$6\alpha = 180° - 2\alpha + 360°k \Rightarrow \alpha = 22.5° + 45°k$$

או

$$6\alpha = 2\alpha + 360°k \Rightarrow \alpha = 90°k$$

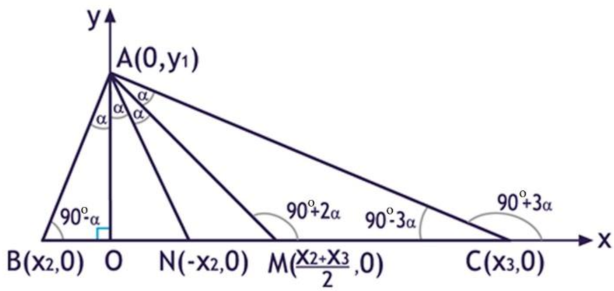
(כאשר k מספר שלם).

הפתרון הרלוונטי היחיד לבעיה הנתונה הוא $\alpha = 22.5°$ ועל כן המשולש ΔABC הוא ישר-זווית.

הפתרון הטריגונומטרי אינו נזקק לבניית עזר, אך מחייב יידע של זהויות טריגונומטריות ויכולת פתרון של משוואה טריגונומטרית.

דרך ה׳ - שימוש בהנדסה אנליטית

מיקום קודקודי המשולש ΔABC במערכת הצירים מופיע בציור מס' 8. שיעורי קודקוד A הנמצא על ציר ה-y הם: $A(0,y_1)$. הקודקודים B ו-C נמצאים על ציר ה-x והשיעורים שלהם מסומנים: $B(x_2,0)$ ו- $C(x_3,0)$. עקב הגובה AO בנקודה $O(0,0)$ שהיא גם ראשית הצירים.



ציור מס' 8

בהתאם לשיעורי הקודקודים B ו-C נקבעו שיעורי הנקודות M ו-N כדלקמן:

$$N(-x_2,\ 0),\ M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ 0\right)$$

בהסתמך על כך שמשולש ΔABN הוא משולש שו"ש.

ממשולש ΔAOB נובע ששיפוע הצלע AB – הוא:

$$\frac{y_1\text{-}0}{0\text{-}x_2} = \frac{\text{-}y_1}{x_2} = \tan(90 - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow x_2 = \text{-}y_1 \tan\alpha \qquad (1)$$

ממשולש ΔAOM נובע ששיפוע התיכון AM הוא:

$$\frac{y_1\text{-}0}{0\text{-}\frac{x_2+x_3}{2}} = \tan(90+2\alpha) = \text{-}\tan(90-2\alpha) = \frac{\text{-}1}{\tan 2\alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{x_2+x_3}{2y_1} \qquad (2)$$

ממשולש ΔAOC נובע ששיפוע הצלע AC הוא:

$$\frac{y_1\text{-}0}{0\text{-}x_3} = \tan(90+3\alpha) = \text{-}\tan(90-3\alpha) = \frac{\text{-}1}{\tan 3\alpha} \Rightarrow x_3 = y_1 \tan 3\alpha \qquad (3)$$

על-ידי הצבה בקשר (2) של ערכי x_2 ו- x_3, כפי שמופיעים בקשרים (1) ו-(3), מקבלים

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{-}y_1\tan\alpha + y_1\tan 3\alpha}{2y_1},\ y_1 \neq 0 \Rightarrow 2\tan 2\alpha = \tan 3\alpha - \tan\alpha \qquad (4)$$

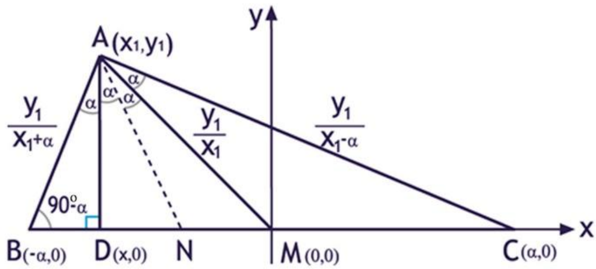
כשרושמים את $\tan 2\alpha$ בצורה $\tan(3\alpha-\alpha)$ ומשתמשים בנוסחה של $\tan(\alpha-\beta)$ מקבלים,

$2\dfrac{\tan 3\alpha\text{-}\tan\alpha}{1+\tan 3\alpha\tan\alpha} = \tan 3\alpha - \tan\alpha$. על-ידי חלוקת שני האגפים ב- $\tan 3\alpha - \tan\alpha \neq 0$,

מקבלים את הקשר, $\tan 3\alpha \tan\alpha = 1$ שמוביל לקשר $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha \sin\alpha = 0$, שממנו מקבלים, $\cos 4\alpha = 0$ ולכן $4\alpha = 90°$. כלומר המשולש ΔABC הנתון הוא ישר-זווית.

דרך ו׳ - דרך נוספת על-ידי שימוש בהנדסה אנליטית

בוחרים מערכת צירים כך שבסיס המשולש BC נמצא על ציר ה-x באופן שהנקודה M – נקודת האמצע של הבסיס, היא הראשית של מערכת הצירים (ראו ציור מס' 9). לפיכך אם נסמן: $BC = 2a$, אזי שיעורי הקודקודים של המשולש יהיו כדלקמן: $A(x_1,y_1)$, $B(-a,0)$, $C(a,0)$.



ציור מס׳ 9

השיפוע של AC הוא $\frac{y_1}{x_1-a}$, והשיפוע של AM הוא $\frac{y_1}{x_1}$. לכן על-ידי שימוש בנוסחת הטנגנס לזווית שבין שני ישרים על-פי השיפועים שלהם מקבלים,

$$\tan\angle CAM = \tan\alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1-a}-\frac{y_1}{x_1}}{1+\frac{y_1^2}{x_1(x_1-a)}} = \frac{ay_1}{x_1^2-ax_1+y_1^2} \qquad (1)$$

השיפוע של AB הוא, $\tan(90^\circ-\alpha) = \frac{y_1}{x_1+a}$ $\qquad (2)$

על-ידי הכפלת קשר (1) בקשר (2) מקבלים,

$$\tan\alpha\cdot\tan(90-\alpha) = 1 = \frac{ay_1}{x_1^2-ax_1+y_1^2}\cdot\frac{y_1}{x_1+a} \Rightarrow x_1(x_1^2+y_1^2-a^2)=0 \qquad (3)$$

היות וברור ש- $x_1 \neq 0$, כי אחרת התיכון וחוצה הזווית היו מתלכדים, כשהמשמעות הייתה שהמשולש הנתון שו"ש ולא היו מתקבלות ארבע זוויות,

לכן $x_1^2+y_1^2-a^2=0 \Rightarrow y_1^2=-(x_1^2-a^2) \Rightarrow \frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=-1$

כלומר, ערך מכפלת השיפועים של הצלעות AB ו-AC הוא (-1), ולכן הצלעות מאונכות זו לזו והזווית $\angle BAC = 90^\circ$ ובהתאמה ערכה של הזווית α הוא 22.5°.

ממבט אחר על קשר (3) מקבלים, $x_1^2+y_1^2-a^2=0 \Rightarrow a^2=x_1^2+y_1^2=AM^2$.

על-ידי שימוש במשפט פיתגורס במשולש ΔADM מקבלים $AM = a$. ולכן משולש ΔBAC הוא ישר-זווית לפי המשפט: "אם במשולש התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש ישר-זווית", כלומר $\angle BAC = 90°$.

התוצאה האחרונה מפתיעה משום שבפתרון לא נעשה כל שימוש בחוצה הזווית. דבר זה מביא למסקנה שכאשר הגובה במשולש יוצר זווית כלשהי עם הצלע של המשולש וגם התיכון היוצא מאותו קודקוד יוצר את אותה זווית עם הצלע השנייה אז המשולש חייב להיות ישר-זווית (סיגלר, 2004).

הערה מתודית: לפי פתרונות ה'-ו', רואים שבפתרונות בדרך של הנדסה אנליטית חייבת להיות מיומנות לבחירת מיקומו של המשולש במערכת הצירים וכן ידע בטריגונומטריה שבלעדיו לא ניתן לפתור את המשימה.

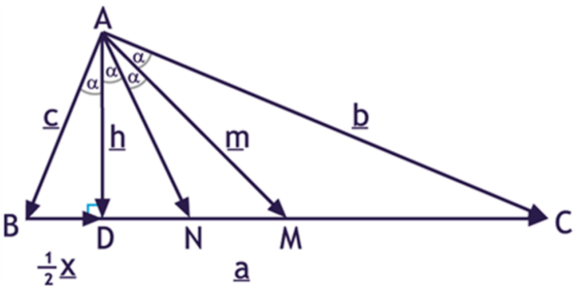
דרך ז׳ - הוכחה על-ידי שימוש בווקטורים

סימון הווקטורים הוא כדלקמן:

$\overrightarrow{AB} = \underline{c}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{\ }$, $\overrightarrow{BC} = \underline{\ }$,

$\overrightarrow{AD} = \underline{h}$, $\overrightarrow{BN} = \underline{x}$, $\overrightarrow{AM} = \underline{m}$,

סימון הווקטורים מופיע גם בציור מס' 10.



ציור מס׳ 10

בהתאם לסימון מקבלים $\underline{a} = \underline{b} - \underline{c}$ (1)

המשולשים ΔADC ו-ΔADB הם ישרי-זווית וגם $b > c$, וזאת משום שהם בעלי צלע משותפת (הגובה) וגם $DC > DB$.

ממשפט חוצה הזווית במשולש ΔABC מקבלים את הקשר הבא,

$\underline{x} = (\underline{a} - \underline{x}) \cdot \frac{c}{b}$ ועל-ידי חילוץ מקבלים, (1)

$$\underline{x} = \underline{a} \cdot \frac{c}{c+b} = (\underline{b} - \underline{c}) \frac{c}{c+b} \qquad (2)$$

בהתאם לסימון הווקטורים הביטוי לווקטור הגובה הוא,

$\underline{h} = \underline{c} + \frac{1}{2}\underline{x}$ ובעזרת קשר (2) מקבלים,

$$\underline{h} = \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c})\frac{c}{c+b} \qquad (3)$$

מאחר שהווקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{h}$ ניצבים זה לזה אזי המכפלה הסקלרית שלהם $\underline{a}\cdot\underline{h}=0$.

הצבת ערכי הווקטורים, כפי שמופיעים בקשרים (1) ו-(3), במכפלה הסקלרית מניבה את הקשר הבא, $(\underline{b}-\underline{c})\left[\underline{c}+\frac{1}{2}\frac{c}{b+c}(\underline{b}-\underline{c})\right]=0$ שלאחר פישוט מקבל את הצורה,

$$\underline{b}\cdot\underline{c} = \frac{c(c^2+2cb-b^2)}{2b} \qquad (4)$$

ממשולש ΔADM מקבלים $\cos 2\alpha = \frac{h}{m}$. בעזרת משפט חוצה הזווית מקבלים,

$\frac{h}{m} = \frac{\frac{\underline{x}}{2}}{\frac{\underline{a}}{2}-\underline{x}}$ ומכאן ערך הווקטור $\underline{x} = \underline{a}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}$. על-ידי שימוש בקשר (2) מקבלים,

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha} = \frac{c}{c+b} \text{ או לאחר חילוץ } \cos 2\alpha = \frac{c}{b-c} \qquad (5)$$

מהזהות הטריגונומטרית $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$ ומקשר (5) מקבלים,

$\cos 4\alpha = \frac{2c^2}{(b-c)^2} - 1 = \frac{c^2+2cb-b^2}{(b-c)^2}$ או בצורה,

$$c^2 + 2bc - b^2 = (b-c)^2\cos 4\alpha \qquad (6)$$

בהסתמך על קשר (6), ניתן לרשום את קשר (4) בצורה,

$$\underline{b}\cdot\underline{c} = \frac{c}{2b}\cdot(b-c)^2\cos 4\alpha$$

מצד אחר ניתן לרשום את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{b}$ ו-$\underline{c}$ בצורה הבאה,

$\underline{b}\cdot\underline{c} = b\cdot c\cos 4\alpha$ ועל-ידי השוואת שני הביטויים שהתקבלו למכפלה הווקטורית של $\underline{b}\cdot\underline{c}$ מקבלים,

$$\cos 4\alpha\left[bc - \frac{c}{2b}\cdot(b-c)^2\right] = 0 \cdot$$

האפשרות הראשונה היא $\cos 4\alpha = 0$, שמשמעותה $4\alpha = 90°$.

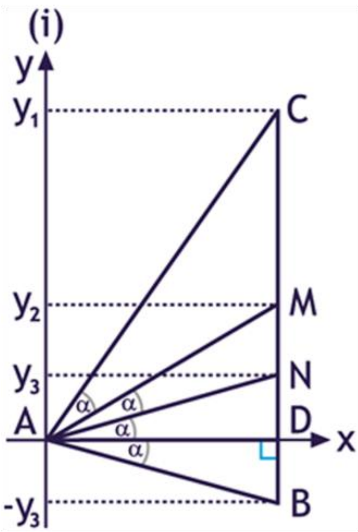
האפשרות השנייה נותנת את הקשר $(b-c)^2 = 2b^2$ או בצורה $\frac{1}{2b}\cdot(b-c)^2 = b$.

לאחר הוצאת שורש ריבועי והוצאת גורם משותף מקבלים $b(\sqrt{2}-1)=-c<0$.

היות ולפי הנתון $b>c$ וכן $\sqrt{2}-1>0$, הרי שהאפשרות השנייה נדחית והמסקנה הסופית היא שהמשולש הנתון חייב להיות ישר-זווית.

ראוי לציין שלמרות שההוכחה בעזרת וקטורים מסובכת ומורכבת יותר בהשוואה להוכחות האחרות, ואף מחייבת שילוב של הנדסת מישור וטריגונומטריה, יש לאלגברה הווקטורית חשיבות רבה ככלי להוכחה ופתרון בעיות כשבחלק מהמקרים היא הדרך הפשוטה יותר בהשוואה לדרכים האחרות.

דרך ח׳ - שימוש במספרים מרוכבים[2]



ציור מס׳ 11

נבחר מערכת צירים כך שהקודקוד A הוא בראשית הצירים והגובה AD מונח על ציר ה-x בכיוון החיובי. מסמנים את הגובה ב- $AD=x$ ואת הצלעות $AC=b,\ AB=c$.

התיאור של המשולש במערכת הצירים של מישור גאוס מופיע בציור מס' 11.

בציור ציר ה-x הוא ציר המספרים הממשיים וציר ה- y הוא הציר המדומה $-iy$.

הנקודות: M,N,D,B ו-C הן בעלות אותו שיעור של $-x$.

סימונים נוספים: $DC=y_1,\ DM=y_2,\ DN=y_3$ (ברור ש- $DB=-y_3$).

במישור גאוס שיעורי הנקודות כדלקמן:

$$C: z_1=x+i\,y_1;\ M: z_2=x+i\,y_2;\ N: z_3=x+i\,y_3;\ B: z_3=x-i\,y_3$$

כעת מבטאים את $(z_3)^2$ בדרך אלגברית ובדרך טריגונומטרית:

בדרך אלגברית $(z_3)^2=(x+iy_3)^2=(x^2-(y_3)^2)+2xy_3i$

בדרך טריגונומטרית על-ידי נוסחת דה-מואבר

$$(z_3)^2=|z_3|^2\ cis\ 2\alpha=(x^2+(y_3)^2)(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)$$

---

2. **העיקרון של הוכחה זו:** בעקבות הצגת הבעיה הנ"ל לקבוצת פרחי הוראה ובקשה לפתור אותה בדרכים שונות, קיבלנו את עיקרי ההוכחה בעזרת מספרים מרוכבים מאחת הסטודנטיות (אירנה לריאנוב). אנו הרחבנו את ההוכחה ומציגים אותה במאמר הזה.

כשמשווים את הערכים הממשיים ואת הערכים המדומים בשני הביטויים מקבלים:

$$x^2 - (y_3)^2 = (x^2 + (y_3)^2)\cos 2\alpha$$

$$2xy_3 = (x^2 + (y_3)^2)\sin 2\alpha$$

על-ידי חלוקת שני הקשרים האחרונים זה בזה, מקבלים את הקשר הבא:

$$\tan 2\alpha = \frac{2xy_3}{x^2-(y_3)^2} \qquad (1)$$

ממשולש ΔAMD מקבלים $\tan 2\alpha = \frac{y_2}{x}$

היות והנקודה M היא נקודת האמצע של הצלע BC, הרי ששיעור ה- y שלה הוא

$$y_2 = \frac{y_1+(-y_3)}{2} \qquad (2)$$

ומכאן מקבלים

$$\tan 2\alpha = \frac{y_1 - y_3}{2x} \qquad (3)$$

מהשוואת הביטויים של $\tan 2\alpha$ שבקשרים (1) ו-(3) מקבלים

$\frac{y_1 - y_3}{2x} = \frac{2xy_3}{x^2-(y_3)^2}$, שלאחר טיפול אלגברי מקבל את הצורה

$$\left(\frac{y_3}{x}\right)^2 = \frac{y_1-5y_3}{y_1-y_3} \qquad (4)$$

ממשולש ΔAND מקבלים $\tan\alpha = \frac{y_3}{x}$, ועל-ידי הצבה בקשר (4) מקבלים

$$\tan^2\alpha = \frac{y_1-5y_3}{y_1-y_3} \qquad (5)$$

ממשפט חוצה הזווית מקבלים:

במשולש ΔABC

$$\frac{b}{c}=\frac{CN}{NB}=\frac{y_1-y_3}{2y_3}$$

במשולש ΔANC

$$\frac{b}{c}=\frac{AC}{AN}=\frac{CM}{MN}=\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}$$

מקשר (2)

$$y_2=\frac{y_1-y_3}{2}$$

מקבלים,

$$\frac{b}{c}=\frac{y_1+y_3}{y_1-3y_3}$$

מהשוואת הביטויים של $\frac{b}{c}$, מקבלים $\frac{y_1-y_3}{2y_3}=\frac{y_1+y_3}{y_1-3y_3}$

ועל-ידי טיפול מתמטי מקבלים את המשוואה:

$\left(\frac{y_1}{y_3}\right)^2-6\left(\frac{y_1}{y_3}\right)+1=0$ שפתרונותיה הם: $\frac{y_1}{y_3}=3\pm2\sqrt{2}$

מהציור ברור ש- $\frac{y_1}{y_3}>1$ ולכן $y_1=(3+2\sqrt{2})y_3$.

על-ידי הצבת הביטוי האחרון בביטוי של $\tan^2\alpha$ כפי שמופיע בקשר (5) מקבלים

$\tan^2\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, וניתן למצוא בעזרת מחשבון ש- $\alpha=22.5°$.

ניתן להימנע מלהיעזר במחשבון על-ידי שימוש בזהות הטריגונומטרית: $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ כאשר

הזווית $\alpha=45°$, ואז מקבלים $\tan^2 22.5°=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

כלומר מתקבלת זווית של $22.5°$, ולכן $\angle BAC=90°$.

5. "הוכחה למחצה" ושכילה אינדוקטיבית על-ידי שימוש בסביבה גאומטרית דינמית (Dynamic Geometry Environment - DGE)

הכנסת התוכנות הגאומטריות הדינמיות (DGS= Dynamic Geometry Software כגון ה- Geometers Sketchpad, ולאחרונה ג'יאוג'ברה – Geogebra) לכיתות יוצרות אתגר למקובל בלמידת משפטים והוכחות דדוקטיביות בהוראה ובלמידה של גאומטריה אוקלידית. סטודנטים/לומדים יכולים להתנסות באמצעות גרירות שונות ושינויים תכופים של אובייקטים גאומטריים שהם בונים, וכתוצאה מכך יכולים להסיק תכונות, הכללות והשערות בנוגע להוויה הגאומטרית.

פעולות הגרירה של אובייקט גאומטרי מאפשרות לסטודנטים להבין/לתפוס מחלקה שלמה של אובייקטים שבהם ההשערה המסוימת היא אינוריאנטית (אינה משתנה), ולכן הסטודנטים משתכנעים שההשערה שלהם תהיה תמיד נכונה (de Villiers, 1998). יחד עם זאת, מחמת הטבע האינדוקטיבי של הסביבה הגאומטרית הדינמית, אנו מכנים את התהליך הזה 'הוכחה למחצה'. אי לכך, בעקבות השימוש בסביבה הגאומטרית הדינמית, הפער הקיים בין הניסוי לתאוריה ברכישת ובהצדקת ידע גאומטרי, הופך לדאגה פדגוגית ואפיסטמולוגית חשובה (Leung & Lopez-Real, 2002). הסטודנטים חייבים להיות מודעים שהם עדיין צריכים להוכיח מאשר לסמוך על הניסוי הווירטואלי.

'כמעין חקירות אמפיריות' רוכשות יותר ויותר חשיבות, הן מבהירות פונקציות של הוכחה שבאופן מסורתי היו מעורערות (de Villiers, 2004; Connor & Moss, 2007). דוגמאות של פונקציות אלו הן הסבר, תובנה, הבנה, תקפות וגילוי. שיטות החקירה הללו, שאינן דדוקטיביות ומסתמכות על ניסוי, אינטואיציה ושכילה אינדוקטיבית (de Villiers, 2004), נראות כמספקות יותר קונטקסט משמעותי להוראת-למידת גאומטריה בעזרת הסביבה הגאומטרית הדינמית מאשר הגישה הקלסית של הוכחה כדרך של קבלת וודאות.

כתוצאה מהנ"ל, החלטנו לבדוק איך הבעיה שלנו ניתנת לפתרון במסגרת הסביבה הגאומטרית הדינמית. השתמשנו בעזרת תוכנת ג'יאוג'ברה (Geogebra) שבעזרתה יכולנו לבנות ולשלוט בתנאים הנתונים של הבעיה (משולש שמאחד מקודקודיו מועברים שלושת הקווים המיוחדים), וגרירת האובייקט המתמטי באחד הקודקודים של המשולש – עד לקבלת 4 הזוויות הנוצרות על-ידי צלעות המשולש ושלושת הקווים המיוחדים, שתהיינה שוות.

לג'יאוג'ברה (Geogebra) יש יתרון שמקבלים בכל רגע ורגע את גודל הזוויות השונות בעקבות הגרירה, תוך כדי שמירה על התנאים הבסיסיים של הבעיה. בנקודה זו, ידענו שזה אמור לקרות כאשר הזווית $\angle BAC$ היא 90^0, ואכן זו התוצאה שקיבלנו. הניסוי מוצג במלואו בקישור הבא: http: //highmath.haifa.ac.il/stupel/st.doc

הקלות שבה ניתן להעלות השערות ראשוניות באשר לסוג המשולש על-ידי שימוש בתוכנה גאומטרית דינמית, הובילה אותנו להסיק שמהלך פעולה אפקטיבי יהיה להתחיל להציג את הבעיה בעזרת תוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra) (או כל תוכנה מתאימה אחרת), לאפשר לסטודנטים לבנות את המשולש עם שלושת הקווים המיוחדים, להציג תנאים שיש לפקח עליהם, ולהשתמש בגרירה של האובייקט

הגאומטרי עד לקבלת התוצאה. אז ברגע שמתקבלת ההשערה שהזווית חייבת להיות 90^0, צריך לבקש מהסטודנטים להוכיח את התוצאה באופן דדוקטיבי באמצעות כלים גאומטריים מקובלים. התוכנה בסביבה הגאומטרית הדינמית משמשת כלי מתווך לגישור הפער בין המודל הפיזי ובין ההוכחה הסימבולית הפורמלית.

6. חקר מקרה (case study)

במהלך הסמסטר השני של שנת הלימודים תשע"ב, ערכנו במכללה להכשרת מורים שאנו מלמדים בה, מחקר זוטא בנושא של פתרון בעיות בדרכים רבות ושונות.

מטרת המחקר הייתה לבדוק הן את היכולת של פרחי ההוראה לפתור בעיות בדרכים שונות והן להעריך מהי דרגת החשיבות שהם מייחסים לשימוש באסטרטגיה זו בהוראה שלהם ושל התלמידים שלהם בעתיד. במקביל, מטרת משנה הייתה לבחון בו זמנית גם את ההתייחסות של המרצים למתמטיקה (בחלקם גם מורים ותיקים ומנוסים בהוראה בפועל בבתי-ספר תיכוניים) לשימוש בשיטה של פתרון בעיות בדרכים רבות ושונות, והאם קיים הבדל מבחינתם בין הוראה כזו לתלמידי תיכון לעומת הסטודנטים במכללה.

במחקר השתתפו 37 סטודנטים וסטודנטיות בשנה ג', לקראת סיום לימודיהם בחוג למתמטיקה במסלול הכשרת מורים לבית-הספר העל-יסודי (לכיתות ז'-י'). במהלך תכנית ההכשרה מועברים קורסים סמסטריאליים בנושא "בעיות נבחרות בהנדסת המישור" ו"שילוב תחומים במתמטיקה". בשני הקורסים הללו מוצגות בעיות לפתרון בדרכים שונות, ולעתים זו הזדמנות מצוינת להשלים פערים בידע המתמטי ובמיוחד להקנות לסטודנטים כלים מתודיים/פדגוגיים להרחבת ארסנל שיטות/אסטרטגיות ההוראה שלהם. במקביל נעשתה פנייה למרצים במכללות להוראה שחלקם הם גם מורים מנוסים בבתי-ספר תיכוניים, לקחת חלק במחקר. 13 מרצים השיבו לנו בחיוב.

בשלב הראשון של המחקר חולקה השאלה הבאה לסטודנטים ונשלחה גם למרצים למתמטיקה במספר מכללות באזור הצפון, כדי ששני המדגמים יענו עליה:

> "האם לדעתך יש ערך להציג/לדרוש פתרון של משימות במתמטיקה במספר דרכים שונות בהוראה בבית-הספר העל-יסודי ו/או במכללות להכשרת מורים? נא לתת דוגמאות לתרגילים/בעיות/משימות במתמטיקה, שניתן לפתור במספר דרכים."

למעלה מ-90% מהסטודנטים הביעו הסכמה באשר לחשיבות ההצגה ופתרון הבעיות בעזרת שיטות מתמטיות שונות. באופן ספציפי הם ציינו את החשיבות מהסיבות: *"פיתוח חשיבה"; "חיבור בין נושאים שונים שנלמדים במהלך הלימודים"; "עידוד יצירתיות"; "תהליך לימודי משמעותי שבו התלמיד יכול להתפתח ולחזק את ידיעותיו וגם ירחיב את אופקיו"; "בכיתה של מצטיינים, הם יכולים לראות את היופי שבמתמטיקה וחווים חוויה בעת פתרון תרגיל מסוים במספר דרכים המובילות לאותו פתרון"*. רק 3 מהסטודנטים סברו אחרת, כגון: *"להציג פתרון של משימות במספר דרכים מקשה על*

הלומדים ויוצר בלבול... יש ללמוד כל נושא בפני עצמו"; "לא כל תלמיד יכול לראות את כל האפשרויות במיידית ו/או בזמן מבחן".

מבחינת הדוגמאות, במרבית המקרים, הסטודנטים הציגו את משפט פיתגורס, תיכון ליתר במשולש ישר זווית, מציאת שטחים; כל הדוגמאות הללו הוצגו רק במילים וללא פיתוח נוסף.

בשלב השני של המחקר הוצגה לסטודנטים בעיית ארבע הזוויות ונתבקשו לפתור אותה בכל דרך שתיראה להם. זו הייתה שאלה אתגרית בעבור הסטודנטים והתקבלו מהם תשובות מעטות; בדרך-כלל בשיטות של גאומטריית המישור וטריגונומטריה. במקרה יוצא מן הכלל, אחת הסטודנטיות הציעה פתרון מיוחד בעזרת מספרים מרוכבים, שהוביל לפתרון המלא בשיטה זו המוצגת במאמר.

בהמשך, בשלב השלישי, הסטודנטים קיבלו את כל ההוכחות שהיו ברשותנו (כ-12 דרכים שונות) ונערך דיון עמם. הם נתבקשו להצביע על הפתרון היפה ביותר לדעתם: מה הפתרון הפשוט ביותר ומהי דרך הפתרון השגרתית ביותר ולפרט את החשיבות והתרומה של פתרון בעיה מסוימת בדרכים שונות.

הסטודנטים התרשמו מאוד מהמספר הרב של הפתרונות לבעיה. מבחינת סדר העדיפויות, 16 סטודנטים מתוך ה-37 העדיפו את הפתרון בשיטת גאומטריה אנליטית בטענה ש*"הוא יותר פורמלי ולכן קל יותר, אך עדיין יש צורך לבחור את מיקום ראשית הצירים"*. 9 סטודנטים אחרים העדיפו את הדרך הגאומטרית, ושאר 12 הסטודנטים את השיטה הטריגונומטרית וציינו *"כי הפתרון בדרך זו מחייב שליטה בזהויות ויכולת של פתרון משוואות טריגונומטריות"*.

מבחינת היופי של הפתרונות, 18 סטודנטים וסטודנטיות ציינו שהפתרון בשיטה הגאומטרית הכי יפה. עיקר ההתייחסות הייתה להוכחה בדרך השלילה. *"לא היינו חושבים על כך, למרות שלאחר הצגת ההוכחה, הייתה ברורה ומסתמכת על משפטי הנדסה ידועים מאוד"*. לגבי הפתרון בשיטת האלגברה וקטורית: *"נראה מסובך למדי, אבל נתן הזדמנות להשלים הבנה של החומר בנושא עצמו"*, או התבטאות כגון *"זו הזדמנות ליישם תאוריה שנלמדה בקורס תורת הווקטורים"* שנלמדה באחד מקורסי ההכשרה במתמטיקה.

במקביל לעיסוק בנושא הזה של ריבוי דרכי פתרון לבעיות ספציפיות, במסגרת קורס לשילוב הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה, התנסו הסטודנטים בשימוש בתוכנות שונות ובעיקר בתוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra). המורה של הקורס קיבלה מאתנו את בעיית ארבעת הזוויות כמו גם בעיות נוספות כדי שהסטודנטים יתנסו בהצגה שלהן להעלאת השערות באשר לפתרון שלהן.

בשלב הזה לאחר שראו את מגוון השיטות לפתרון בעיית ארבע הזוויות, היה אפשר להבחין בשינוי עמדות של הסטודנטים לכיוון העצמת החשיבות של שימוש בכלים מתמטיים שונים לפתרון בעיה אתגרית.

בשלב האחרון של המחקר לגבי קבוצת הסטודנטים, נבחרו באופן אקראי 12 סטודנטים מהקבוצות שלמדו את הנושא, ונערך ראיון מובנה עם כל אחד/אחת. הריאיון עמם כלל 5 שאלות. נדווח כאן על 2 מהן:

1. *מהו בעיניך הערך של הצגת פתרונות/הוכחות מרובים לאותה בעיה? האם כדאי להשקיע בכך?*
2. *בהנחה שאתה מלמד או עומד ללמד בבית-הספר, האם תנקוט בשיטות כאלו? האם תדרוש מתלמידיך לפתור בעיות בכמה שיטות שונות?*

לשאלה הראשונה כל הסטודנטים המרואיינים חזרו שוב על הרעיונות של *"מאפשרת לראות את התמונה הכללית לעומת חלק נפרד בשטח אחד קטן"*, או *"הוכחות מרובות לאותה בעיה מפתחות, מעוררות, מסקרנות... יותר מעניינות וזה לא סכמטי"*, *"מפתחות מיומנויות חשיבה גם לסטודנטים וגם למורים"*. מכאן, שהראיונות אוששו את הנכתב על-ידי מרבית אלו שענו על השאלון בתחילה.

באשר לשאלה השנייה, כאן כבר היו 7 מרואיינים שהביעו דעתם שאכן ידרשו מתלמידיהם פתרונות בשיטות שונות, אפילו במבחנים וכמובן בשיעורי-בית. אחת המרואיינות ציינה שתדרוש שימוש בשיטות שונות כי *"כך אוכל להחליט באילו נושאים התלמידים שולטים היטב ובאילו שולטים פחות"*. לעומת זאת מספר לא מבוטל של 5 סטודנטים שהביעו דאגה ש*"השיטה הזו תבלבל את התלמידים"* או *"ננקוט בה, רק במקרים מסוימים ולא תמיד ולא בכל נושא"*. סיבות אחרות *"צריך לקחת בחשבון את מגבלות הזמן שעומד לרשות המורה כמו גם את מגבלות היכולת של התלמידים"*, וזה *"טוב רק לתלמידים ברמה מסוימת"*.

יש לציין שהקורסים שעסקו בפתרון בעיות בדרכים שונות, קיבלו חוות דעת טובה יחסית מהמשתתפים, על שאלון הערכת איכות ההוראה המועבר על-ידי המכללה בסוף כל קורס הנלמד בהכשרת מורים. הרמה הכללית מקבוצה אחת הייתה 5.6 ומהשנייה 5.8 (מתוך 6). גם בחלק המילולי, הסטודנטים הביעו שביעות רצון גבוהה יחסית מהקורס וניהולו.

<u>אנקדוטה</u>: אחד הסטודנטים בקורס, מורה בפועל זה הרבה שנים ומשלים תעודת הוראה, הגיש עבודה במסגרת תרגיל בית על בעיה דומה ופתר אותה בכל השיטות שהצגנו לעיל לבעיית ארבעת הזוויות. הבעיה שהציג הייתה בעיית שלוש הזוויות, מאחר ומעבירים מאותו קודקוד A "רק" גובה ותיכון שיוצרים 3 זוויות שוות כל אחת – והשאלה הייתה מהו הערך של α (מקור הבעיה: משימות מקשרות בפיתוחה של פרופ' רוזה לייקין מאוניברסיטת חיפה, במימון המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי – מל"מ). במקרה זה שוב התקבל משולש ישר זווית, אולם הפעם משולש ישר זווית עם $30°$, $60°$, כאשר הזווית הישרה בקודקוד A.

כפי שמצוין לעיל, 13 מרצים למתמטיקה במכללות להכשרת מורים השיבו לשאלון הראשוני. במקרה זה, שלחנו יחד עם השאלון את הבעיה עם פתרונות מגוונים. כל המשיבים הביעו התלהבות משיטות הפתרון השונות והעושר האצור בהן מבחינה מתמטית. כולם הביעו הסכמה לגבי חשיבות פתרון בעיות בשיטות שונות ומגוונות. אחד מהמשיבים הדגיש את העובדה, שניסיונות ראשונים לפתור בעיות מסוימות מסתיימים בכישלון. *"אבל אם בן אדם יודע שלכל סיטואציה אפשר לגשת ממספר כיוונים, אז כישלון ראשון לא מפחיד אותו – הוא מתחיל לחפש דרכים חדשות. וזה מגבש את האופי שלו! וזה היבט חינוכי חשוב מאוד בלימודי המתמטיקה!"*. מרצה אחר התייחס לנושא ההערכה: *"יש לציין*

שפתרון בעיות בדרכים שונות מאפשר להשוות ביניהן, להעריך את היתרונות והחסרונות שלהן. כלומר, מבחינה פדגוגית מדובר לא רק על יישום ידע, אלא גם על הערכה שלפי טקסונומית היעדים החינוכיים של בלום נחשבת כרמה הגבוהה ביותר".

אחת המרצות הדגישה את נושא היצירתיות המתמטית, כאשר מספר ממדים שלה (שטף, גמישות ומקוריות) מתבטאים בשיטה של ריבוי פתרונות והוכחות. כמו כן, היא ציינה את חשיבות קיום הדיון הכיתתי המזדמן על-ידי הפתרונות השונים (יפה יותר? קל יותר? מסביר יותר? מדוע? וכדומה).

רוב המרצים (10 מתוך ה-13) עשו הבחנה בין המטרות הקשורות לתלמידים בבית-הספר לבין הכשרת מורים. לדוגמה, אחת המשיבות הדגישה בהתייחסות לתלמידים את *"הקישוריות לענפי מתמטיקה שונים; מענה להטרוגניות (התלמיד החזק פותר בדרכים אחדות, ואילו התלמיד האטי יותר יפתור לפחות בדרך אחת); גמישות ומעבר בין ייצוגים שונים; מטרת תרגול והשימוש ביותר מושגים וכלים מתמטיים; הנאה והדגשת היופי של המתמטיקה"*. באשר לשימוש בהכשרת מורים, היא הדגישה שכל הנקודות שנמנו בעבור התלמידים נכונות גם להכשרת מורים, ומכאן עשתה הבחנה והתייחסה ספציפית לפרחי ההוראה: *"עצם ההתעסקות בפתרון בעיות בדרכים שונות, גורמת לפרח ההוראה להרגיש (לא רק להבין) את יתרונותיה, וכך גדל הסיכוי שישתמשו באסטרטגיה זו"*; מאפשרת לקיים *"חזרה ללא תחושת חזרה: פרחי ההוראה זקוקים לרענון ולחיזוק הרקע המתמטי שלהם, ולא תמיד הם מודעים לכך* די הצורך"; "פתרון בעיות בדרכים שונות מאפשר למורה לעתיד לבחור, מבין מגוון פתרונות, פתרון שמתאים יותר למטרות ההוראה או לפתיחת נושא".

ארבעה מרצים ציינו את "התועלת החינוכית הצומחת לתלמיד בניסיונו לפתור בעיה מתמטית אחת בדרכים שונות, וזו רבה מזו המושגת מעיסוקו בפתרון בעיות רבות בעלות מבנה פתרון דומה, או אף זהה"; "לעתים יותר יעיל לפתור בעיה מתמטית בשלוש דרכים שונות במקום לפתור שלוש בעיות שונות בדרך אחת".

הדגשות נוספות מעבר ל"פיתוח גמישות מחשבתית" היו בנוגע ל"היפוך ידע תאורטי לידע יישומי ושימושי"; "שיפור היכולת של המורה ליצור עניין בשיעורים"; "שיפור היכולת של המורה לטפח את הסקרנות והחקרנות של תלמידיו".

בעקבות החשיפה לאפשרות השימוש בכלים טכנולוגיים (במקרה שלנו במיוחד התוכנה הגאומטרית דינמית, ג'יאוג'ברה [Geogebra]), רוב המרצים הדגישו את אפשרות "ההמחשה החזותית" ו"ההבלטה" של "עוצמתה האדירה של המתמטיקה" באמצעות הכלים הנ"ל. כל זאת, מעבר להדגשת הפן האינדוקטיבי בעזרת התוכנה לעומת הפן הדדוקטיבי הדרוש כהשלמה לפתרון ו/או להוכחה.

<u>לסיכום</u>, חקר המקרה, הן של הסטודנטים/פרחי ההוראה והן של המרצים למתמטיקה במכללות מצביע בבירור על חשיבות רבה של יישום השיטה של פתרון בעיות בדרכים שונות, ואנו מציעים להרחיב את ההכללה של הנושא הן בהוראה התיכונית והן בהכשרת מורים למתמטיקה במכללות לחינוך. אנו מציעים לכלול לפחות קורס מיוחד לשם כך, וזאת מעבר לשילוב השיטה בקורסים המתמטיים והפדגוגיים בתכניות ההכשרה.

7. הערות מסכמות והשלכות על ההוראה

הגאומטריה היא מכרה זהב למשימות מרובות דרכי פתרון. ההוכחות ניתנות להפקה על-ידי שימוש בשיטות שונות מתוך נושא מסוים של הגאומטריה, או מתוך ענפים מתמטיים אחרים, כגון גאומטריה אנליטית, טריגונומטריה ומרחבים וקטורים. מחברי המאמר הזה טוענים שריבוי הוכחות עשויים לקדם גם הבנה טובה יותר וגם העלאת היצירתיות של הסטודנטים הלומדים מתמטיקה. חקר המקרה כפי שתואר לעיל, חיזק משמעותית טענה זו.

ריבוי דרכי הפתרון שהוצגו כאן בעבור שאלה אחת בגאומטריה מציגים את הקישוריות בין שטחים שונים של המתמטיקה, ומראים איך גאומטריה יכולה לשמש כבסיס לנושאים כגון טריגונומטריה, גאומטריה אנליטית ותורת הווקטורים. לדוגמה, כאשר פותרים את הבעיה בעזרת שיטות של גאומטריה אנליטית (מעבר לשימוש הברור בגאומטריה אויקלידית), מתגלה הקשר לטריגונומטריה באמצעות השיפועים של צלעות המשולש וכתוצאה מכך הצורך לפתור משוואות טריגונומטריות. כאשר משתמשים בהוכחה בווקטורים, הקשר לטריגונומטריה מתברר בדרישה ליישם את נוסחת המכפלה הסקלרית, ושוב קיים הצורך לפתור משוואות טריגונומטריות כדי להגיע לתוצאה הרצויה.

העיסוק של הסטודנטים עם הקשר בין ענפים שונים של המתמטיקה בונה את ראייתם את המתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף בדיד של נושאים מנותקים האחד מן השני (House & Coxford, 1995). במרבית מספרי המתמטיקה לבתי-הספר ברחבי העולם, הבעיות במתמטיקה מאורגנות בתוך נושאים ספציפיים המוצגים בתכנית הלימודים: הסטודנטים נוטים לחשוב שבעיות מסוימות קשורות לנושאים מסוימים, ולכן מניחים שלכל בעיה יש שיטה אחת ויחידה לפתרונה (Shoenfeld, 1988). כמו כן, בה בעת שמסמך הסטנדרטים של NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) מדגיש את הצורך שמורים אמורים למצוא משימות המציגות קישוריות בין ענפים מתמטיים שונים, הוא גם מדגיש שלאתר משימות כאלו מצריך זמן רב וקורא ליוזמה מיוחדת מצד המורים להשקיע מאמצים בהכנת משימות כאלו. הניסיון שלנו מראה בהחלט, שעל אף שהמשימה הזו אינה קלה, קיים צורך לזהות בעיות נוספות שאפשר לפתור אותן בעזרת שיטות מגוונות והדורשות יישום של הוכחות מתחומים שונים של המתמטיקה. אנו רואים שמתפקידנו להמשיך ולחפש בעיות מתאימות כאלו ומעודדים את העמיתים שלנו גם לעשות זאת. אנו מאמינים שהמורים למתמטיקה צריכים להציג לסטודנטים שלהם בעיות שחייבים לפתור אותן ביותר מדרך אחת, וממליצים ככל האפשר ליישם ידע מענפים שונים של המתמטיקה. כמסקנה ממחקרו, בינגולבלי (Bingolbali, 2011) מציין שליישום של ריבוי דרכי פתרון בעיות יש פוטנציאל לפיתוח "ההבנה היחסית" (relational understanding – מושג הנזקף לזכותו של סקמפ [Skemp, 1976]) ותורם להתפתחות העצמאות שלהם. יתרה מזו, כאשר בוחנים סטודנטים, המורים צריכים לאפשר להם לפתור לעתים בעיות על-ידי שימוש בהוכחות מענף מתמטי כלשהו ולא לעמוד על כך שיפתרו בעזרת הוכחה מהנושא הספציפי הנלמד באותה עת. המחקר זוטא שביצענו מצביע על כך, שאכן גם פרחי הוראה וגם המרצים במכללות מדגישים את חשיבות הקישוריות של תחומים שונים ואת פיתוח היצירתיות וההבנה המתמטית באמצעות השיטה של ריבוי פתרונות לבעיות נתונות.

בתקופה זו ובימים אלה, בלתי אפשרי להתעלם מההתפתחות של הטכנולוגיה וההשפעה שלה כמעט על כל שטחי החיים. מערכת החינוך אינה יוצאת מן הכלל, ובהחלט לא ניתן להתעלם מהערך של הטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה. אנו מאמינים באמונה שלמה ביתרונות של שילוב תוכנות גאומטריות דינמיות (DGS) בפתרון בעיות מתמטיות ולמעשה הדגמנו את הבעיה שלנו בשימוש בתוכנת הג'יאוג'ברה (Geogebra).

בגיליון מיוחד של PME (Jones, Gutierrez & Mariotti, 2000) בהיותם עורכים אורחים של הגיליון שכותרתו "Proof in dynamic geometry environments", הם הצהירו ש"קיימת עדות רחבה, שעבודה עם תוכנה גאומטרית דינמית מספקת לסטודנטים אפשרויות של גישה למתמטיקה תאורטית, משהו שדי קשה לתפיסה באמצעות כלים פדגוגיים אחרים" (עמ' 3).

חקר אינדוקטיבי באמצעות ה-DGS יכול להוביל את הסטודנטים לפתח השערות משלהם לגבי הפתרון של בעיה, ולאחר מכן לעסוק בהוכחה הדדוקטיבית. כל זאת בתוספת לתרומה של ראיית הצגות גרפיות שונות של המושגים ומצבים קשורים אחרים של הבעיה. לכן אנו ממליצים שמורי המתמטיקה יאפשרו תחילה לסטודנטים שלהם להתמודד עם פתרון בעיות באמצעות עבודה בסביבות כאלו עד שהם מגיעים להשערה סולידית בעבור הוכחה דידקטית.

לסיכום, מאמצנו להתמודד עם הבעיה המוצגת, סיפקו לנו הרגשה אמתית של עבודה כמו המתמטיקאים אשר מחפשים פתרונות שונים לבעיה, במיוחד אלו שהם קצרים, אלגנטיים ואסתטיים מבחינה מתמטית. על-ידי עידוד הסטודנטים הלומדים גם לעשות כך, הם גם ילמדו להעריך את הקשרים בין הענפים השונים של המתמטיקה ויגלו כיצד אפשר להתמודד עם בעיה אחת מנקודות מבט שונות. נוסף על כך, השילוב של התוכנות של הסביבות הדינמיות יוסיפו כלי טכנולוגי משלים שיעזור לסטודנטים בחקירה שלהם, ובה בעת גם יספק אמצעים למורים כבסיס לפעולה פדגוגית ודיונים בכיתה. כבונוס, גילינו משולש מיוחד במינו, שבו שלושת הקווים המיוחדים מקודקוד אחד יוצרים ארבע זוויות שוות ביניהם ובין הצלעות של המשולש.[3]

3. הבעת תודה: המחברים רואים כחובה אישית להביע את תודתם והוקרתם לד"ר ורדה טלמון, מנהלת המרכז הארצי של המורים למתמטיקה בבתי-הספר העל-יסודיים שבאוניברסיטת חיפה, ולעובדות המרכז גאולה סבר ומאיה כץ על הסיוע הרב שהתקבל מהן, להכנת הקישורים לתוכנה הגרפית-דינמית, שאפשרה הצגה חזותית של הבעיה.

8. מקורות

סיגלר, א' (2004). מיומנו של מורה: משפט הפוך מעניין, בעקבות שאלה של תלמידה. *על"ה, 31*, 26-28.

Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *The Australian Journal of Teacher Education*, *36*(1), 18-31.

Connor, J., & Moss, L. (2007). *Student use of mathematical reasoning in quasi-empirical investigations using dynamic geometry software*. Paper presented at Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME 2007), Department of Mathematics, Ohio University, Ohio. Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.127.9441&rep=rep1&type=pdf

de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-394). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

de Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*(3), 397-418.

Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 11-25). Nicosia: The University of Cyprus.

Dreyfus, T., & Eisenberg T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics, 6*(1), 2-10.

Ersoz, F. A. (2009). Proof in different mathematical domains. *ICME Study, 1*, 160-165.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig & A. Guietrrez (Eds.), *Proceedings of the 20st International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: PME.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hemmi, K., & Löfwall, C. (2009). Why do we need proof. *Proceedings of CERME 6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 201-210). Lyon: CERME.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

House, P. A., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). *Connecting mathematics across the curriculum*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jones, K., Gutiérrez, A., & Mariotti, M. A. (2000). Proof in dynamic geometry environments: Guest editorial. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 1-3. Retrieved from http://eprints.soton.ac.uk/63766/

Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. *ICME Study, 19*(2), 31-36.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME.

Leung, A., & Lopez-Real, F. J. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(2), 145-165.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. *Proceedings of CERME 6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 776-785). Lyon: CERME.

Lo, J. J., & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics course for prospective elementary teachers. *ICME Study, 19*(2), 41-46.

Loewenberg Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2000). The teaching of proof. *ICME IX Discussion Document*, Tokyo, Japan.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Education Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(2), 145-166.

Sinclair, N. (2011). Aesthetic considerations in mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 2-32.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 38*, 289-321.

Tall, D. (2007). *Teachers as Mentors to encourage both power and simplicity in active material learning*. Plenary Lecture at the Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing, Abu-Dhabi.

מקורות נוספים בעברית הקשורים לנושא המאמר (אינם מצוטטים במפורש בגוף הטקסט):

אפלבאום, מ' וסמובול, פ' (2005). תגובה למאמר: "הוכחה בדרך אחרת". *על"ה, 35*, 80-82.

יאנובסקי, ל' (2011). פתרון בעיות לא שגרתיות בעזרת שיטות מקוריות מתחומים מתמטיים שונים. *על"ה, 45*, 36-42.

לייקין, ר' (2006). על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות. *על"ה, 36*, 8-14.

לייקין, ר', לבב-ויינברג, ע' וולטמן, א' (2012). ריבוי פתרונות לבעיה בגאומטריה והכללת הבעיה. *על"ה, 47*, 30-36.

שריקי, ע' וזיסקין, ק' (2005). אפשר גם בלי טריגונומטריה – דרך אחרת לחישוב אורכי המחוגים של מעגל חוסם ומעגל חסום של משולש. *על"ה, 35*, 12-14.

ד"ר משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.
מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים. פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל. עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה.

בעבר ראש חוג למתמטיקה במכללת שאנן ומנהל בית-ספר שש-שנתי. ראש המסלול העל-יסודי.

פרופ' דוד בן-חיים

בוגר הטכניון (מתמטיקה-פיזיקה תואר ראשון), לימודי תואר שני באוניברסיטת חיפה (מתמטיקה-חינוך) ותואר שלישי Michigen State Univ. בחינוך מתמטי.
ראש מינהלת מל"מ - המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט וראש החוג למתמטיקה במכללת שאנן.