לזכרו של פרופ׳ גדי מורן

גזאלין פאוזייה, בית ספר תיכון הגליל, נצרת

הצטערתי מאוד לשמוע על מותו הפתאומי והטרגי של פרופ' גדי מורן, המנחה שלי בעבודת הגמר לקבלת תואר מוסמך מאוניברסיטת חיפה. המנחה שלי גדי, שהערכתי והערצתי מאוד. הוא הנחה אותי בנאמנות ובסבלנות, בעידוד מתמיד ותמיכה שלא נעצרה בשום מקום וזמן.

פרופ' גדי מורן, המרצה הגאון, שאהב את המתמטיקה ששכנה בלבו, היה מנחה מכל הלב, שדאג להצלחתי כסטודנטית ושמר על קשר טוב שלא נקטע. אף פעם אחת לא היססתי להרים טלפון ולשאול על מה שעלה לי בראש ותמיד נעניתי בשמחה. גדי ישב אתי שעות רבות, העיר והאיר באופן בלתי מתפשר ותרם מידע משלו.

הוא התייחס אלי בכבוד, ניחם אותי באבדן אמי ז"ל. תמיד התעניין במקור המשפחה שלי, בכפר שבאתי ממנו, בשפה הערבית בפרט ובכל השפות בכלל.

גדי מורן היה אדם צנוע וטוב לב, עם חיוך שהאיר את פניו, היה חביב על כל מי שהכיר אותו, אהב את הסטודנטים שלו שהעריצו אותו מאוד, ולא ויתר על נוכחותם במסיבת סיום עבודתו באוניברסיטה.

גדי מורן אהב מאוד את הטבע, סיפר לי תמיד על טיוליו בארץ ובעולם, ומחלון החדר שלו באוניברסיטה היה עומד ואומר לי: "תסתכלי, אני רואה את חוף עתלית".

גדי, לעולם לא אשכח אותך ואזכור אותך לכל החיים כמנחה ומורה דרך, באהבה, הערכה, הערצה וכבוד.

יהי זכרו ברוך.

להלן מופיע תקציר מעבודת הגמר שלי בחינוך מתמטי בהנחייתו של פרופ' גדי מורן: "**פרקים בגיאומטרית השיקוף**".

גאומטריה זו, שעיקר התפתחותה במאתיים-שלוש מאות השנים האחרונות, עוסקת בתכונות של צורות הנשמרות על ידי **שיקופים במכדרים** (ספירות) במרחב, ובמקרה הדו-ממדי שבו נתרכז – במישור – על ידי **שיקופים במעגלים**.

תקוותי היא שעבודה זו תשרת מספר מטרות: ראשית, תאפשר למורים היכרות עם פרק יפהפה

בגאומטריה. שנית, גיבוש פרקים מרתקים בגאומטריה שישמשו תלמידי תיכון מעוניינים ומתקדמים אם בשימוש עצמי אם בחוגים חברתיים.

גאומטריית השיקוף תורמת בפישוט צורות, בפתרון בעיות גאומטריות, בגילוי עובדות גאומטריות חדשות, בהוכחות משפטים ובחקירת יישומים פרקטיים מגוונים.

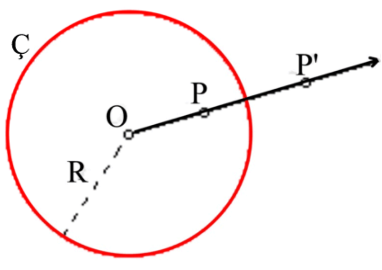
העבודה נוגעת בנושאים הבאים:

- מבוא ובו רקע היסטורי, העתקות במישור האוקלידי והרחבת המישור האוקלידי למישור השיקוף.
- נושאים בגאומטריית השיקוף וביניהם:
  1. מושגים בסיסיים, כגון אלומות מעגלים לסוגיהן (היפרבולית, פרבולית, אליפטית).
  2. יישומים הכוללים משפטים ידועים וחשובים, כגון משפט פויירבך, מעגל אפולוניוס.
  3. היכרות עם חבורות טרנספורמציות של המישור האוקלידי (איזומטריות ודמיונות) והצגתן במישור הזהה לו – מישור גאוס המרוכב.
  4. הצגת טרנספורמציית השיקוף במעגל במישור גאוס המורחב, כבסיס להיכרות עם החבורה הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים (המסומנת בעבודה זו באות **G**). זיהוי חבורה זו כחבורת העתקות מביוס ומביוס-צמודות.

טרנספורמציית השיקוף במעגל ככלי מתמטי התגבשה בעיקר במאה השנים שבין 1750 ל-1850. קוסטר (Coxeter, 1980) ייחס את המצאתה במהדורה השלישית של ספרו "Introduction to Geometry" לג'יקוב שטיינר (Jacob Steiner) ב-1828.

שיקוף במעגל מחליף את פנים המעגל עם חוצו

יהי Ç מעגל עם מרכז O ורדיוס R. אם P נקודה במישור שונה מ- O , **השיקוף של הנקודה P ביחס למעגל Ç** , היא הנקודה P' במישור על <u>הקרן</u> [OP) , המקיימת: מכפלת המרחקים של P ו- P' מ- O שווה ל R^2. כלומר $\mathbf{OP\cdot OP' = R^2}$



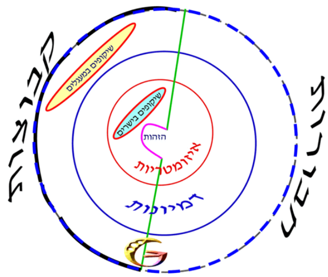
טרנספורמציית השיקוף במעגל Inversion in Ç היא העתקה חד-חד ערכית של הקבוצה $\{O\} \setminus \pi$ על עצמה (π המישור האוקלידי) , מסומנת $R_Ç$ ומשמרת:

- Ç
- הקרן מ O, וכן כל הישרים דרך O (ללא O) .

נרחיב את המישור האוקלידי ל**מישור השיקוף** $\{O_\infty\}$ $\pi^* = \pi\cup$ על ידי ההגדרה: $O' = O_\infty$ ו- $O_\infty' = O$.

- השיקוף של 'P הוא P עצמה, כלומר העתקה זו היא אינוולוציה **(involution)** של π^* (בדומה לשיקוף של המישור האוקלידי בישר).

- החבורה **G** הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים מכילה תת-חבורות וקבוצות של טרנספורמציות כמתואר להלן:



נכיר חבורות וקבוצות אלו בשלב העבודה והן טרנספורמציית **השיקוף במעגל**.

העבודה כללה :

א. רקע מתמטי – האיזומטריות והדמיונות

ב. הגדרה ובניות בסרגל ובמחוגה

ג. תכונות יסודיות של טרנספורמציית השיקוף במעגל:

- שימור מעגרים
- שימור ניצבות מעגרים
- שימור מידת הזווית בין מעגרים נחתכים

ד. מושגים קשורים למעגלים:

1. חזקה של נקודה ביחס למעגל
2. ציר ניצב עבור שני מעגלים
3. אלומות **מעגלים/מעגרים**

ה. יישומים:

1. הוכחות של משפטים (כמו משפט Ptolemy, Pappus, Feuerbach)
2. סרגולים
3. בעיות בנייה

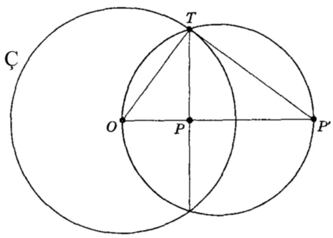
ו. השיקוף במעגל במסגרת המישור המרוכב :

- הצגת חבורות המישור האוקלידי – **איזומטריות ודמיונות** – כפעולות אלגבריות במספרים מרוכבים.
- **פונקציות ליניאריות וליניאריות צמודות** שמתבררות כזהות לדמיונות ישירים ומהפכים בהתאמה.
- חבורת הטרנספורמציות **G** הנוצרת על ידי שיקופים במעגלים, כאשר **העתקות mobius** הן תת-חבורה שלה

בניות השיקוף של נקודה P ביחס למעגל נתון Ç בעזרת סרגל ומחוגה

בנייה 1

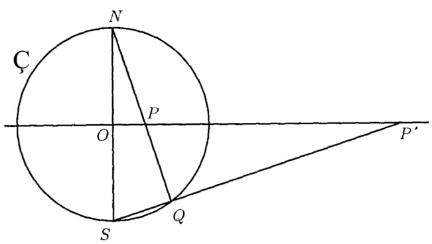
תהיינה 'P , P שתי נקודות על אותה קרן מ-O, P בתוך Ç, 'P בחוץ. אזי P שיקוף של 'P ב-Ç אם ורק אם נקודת ההשקה T של משיק דרך 'P ל Ç הנה נקודת חיתוך של האנך ל-$l(O,P) = l(O,P')$ ב-P עם Ç.



(*) $\Delta OPT \sim \Delta OTP'$

בנייה 2

תהיינה 'P , P שתי נקודות על אותה קרן מ-O, P בתוך Ç, 'P בחוץ. תהיינה N , S נקודות החיתוך של האנך לקרן זו ב-O עם Ç. אזי P שיקוף של 'P ב-Ç אם ורק אם הישר $l(S,P')$ ניצב לישר $l(N,P)$.



$\triangle SOP' \sim \triangle SQN$ ומתקיים $OP \cdot OP' = R^2$ $SOP' \Leftrightarrow \triangle PON \sim \triangle$

גזאלין פאוזייה

בוגרת תואר ראשון בהוראת מתמטיקה ומדעי המחשב מטעם הטכניון, תואר שני בחינוך ומתמטיקה מאוניברסיטת חיפה. מורה למתמטיקה בבית ספר תיכון הגליל נצרת.