משוואות המכילות פרמטרים - תפיסות ושגיאות אופייניות של תלמידי תיכון ופרחי הוראה

בת-שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום, נתיבות
דינה חסידוב, המכללה האקדמית גליל מערבי, עכו

תקציר

במחקר זה בדקנו כיצד תופסים תלמידים ופרחי הוראה משוואות המכילות פרמטרים. המחקר נערך בקרב תלמידי תיכון (73) ופרחי הוראה (43) ובדק כיצד פותרים הנבדקים משוואות שבהן משתמשים באותיות שונות, כגון a, b, x, y..., ונדרש בכל פעם לבודד אות אחרת. מטרות המחקר היו לבדוק מהן הדרכים שבהן משתמשים הנבדקים, מהם הקשיים שבהם נתקלים בפתרון משוואות המכילות פרמטרים והאם יש הבדלים בין תלמידים לפרחי הוראה. המידע נאסף באמצעות שאלון, ריאיון ותצפיות פתוחות, ונעשו ניתוחים כמותיים ואיכותניים של הנתונים. נמצא כי משוואות המכילות פרמטרים הן קשות לפתירה. בממצאים אלה אובחנו מצבים מסוגים שונים שהשפיעו על ביצוע המשימות: האות שצריך להביע, הסידור של המשוואה וסוג המשוואה. כמו כן נמצאו הבדלים בין הביצועים של פרחי הוראה לביצועים של תלמידים. הממצאים שנציג במחקר זה יכולים להרחיב את גוף הידע שממנו ילמדו מורים על שגיאות תלמידים ומקורותיהן.

מילות מפתח: *משוואות; פרמטרים; תלמידי חטיבה עליונה; פרחי הוראה; חינוך מתמטי; ידע מתמטי; קוגניציה ומתמטיקה; מושגים מתמטיים.*

מבוא ורקע תאורטי

מערכת הסמלים במתמטיקה מאפשרת למתמטיקאי להשיג את רמת ההפשטה הנדרשת לפתרון בעיות כלליות. השימוש באותיות לסימון משתנים ופרמטרים הוא בסיס לשפה מדעית. משוואות אלגבריות המכילות נעלמים ופרמטרים מייצגות קבוצה של משוואות בעלות מבנה זהה, וכן צורות כלליות של קשרים כמותיים בין גדלים כלליים למיניהם. למשל, הנוסחה $y= 3x+b$ מייצגת משפחה של פונקציות לינאריות בעלות אותו שיפוע.

חשיבות רבה יש להתפתחות מערכת סמלים וסימבולים במתמטיקה בכלל ובאלגברה בפרט, והעיסוק בהם הוא בסיס להבנת האלגברה, האנליזה ותחומים נוספים. התפתחות הסמלים המתמטיים שהחלה באלגברה גרמה למהפכה בתחום, והיום אי אפשר לחשוב על המתמטיקה ללא משתנים ופרמטרים.

החשיבות הרבה של האלגברה מתבטאת במקום המרכזי שהיא תופסת בלימודי המתמטיקה הנלמדת בבית הספר. האלגברה הנלמדת בבית הספר כוללת אמצעים לפתרון בעיות ולתיאור קשרים ויחסים, והיא המפתח לאפיון ולהבנה של מבנים מתמטיים (Kieran, 2007). שיעור אלגברה בבית הספר מתמקד, בדרך כלל, בפרוצדורות הכוללות סמלים מתמטיים, לעתים אף ללא העמקה במשמעות.

לימוד פורמלי של אלגברה מתחיל בחטיבת הביניים – שלב שבו עוברים התלמידים מעיסוק במספרים לעיסוק באותיות – עיסוק הדורש חשיבה מופשטת. פלקסר (Flexer, 1984) מצא כי האלגברה היא אבן נגף לפני תלמידים בתחילת דרכם בלימודי תחום זה.

במחקרים אחרים שנעשו (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1982; Kieran, 2014; Witzel, Mercer, & Miller, 2003) נמצא כי ביצועם של תלמידים במשימות אלגבריות הוא נמוך, ולאחוז נכבד מהם היו קשיים תפיסתיים בתחום האלגברה, הנובעים מקושי מניפולטיבי של סימבולים מתמטיים בביטויים ובמשוואות. טעויות של תלמידים באלגברה קשורות, בין השאר, בדרך שבה הם תופסים את השינויים המושגיים במעבר מאריתמטיקה לאלגברה (Matz, 1980). תלמידים רבים מתקשים להכיר בכך שאות מייצגת מספר, והם אינם יודעים לעבוד עם הערכים הסימבוליים (Herscovics & Kieran, 1980).

נמצאו מחקרים מעטים העוסקים במושג הפרמטר ומשמעותו (Bloedy-Vinner, 1994, 1995, 2001; Furinghetti & Paula, 1994; Ursini & Trigueros, 2004).

אורסיני וטריחרוס (Ursini & Trigueros, 2004) מצאו כי השימוש בפרמטרים כדי לסמל הכללה היה קשה מאוד לתלמידים. גם במקרים שבהם הצליחו התלמידים לכתוב ביטוי אלגברי, הם לא היו מסוגלים להסביר את התפקידים השונים של האותיות בביטוי האלגברי. במחקר נמצא עוד כי כדי לעבוד עם הפרמטרים כראוי, רצוי שתהיה לתלמידים יכולת להבחין בין נעלמים ומשתנים. נמצא שיכולת הבחנה זו תלויה בהקשרים שבהם הוצגו הפרמטרים.

במחקרים בודדים אחרים עסקו החוקרים בפתרון משוואות המכילות פרמטרים. סדיווי (Sedivy, 1976) טען כי תרגילים ומשוואות המכילים פרמטרים קשים יותר לפתרון מתרגילים ובעיות המכילים מספרים. טענה דומה התקבלה גם מעדויות של מורים שמלמדים בבית הספר התיכון. סדיווי (שם) מציין שלמשוואות פרמטריות יש שימושים לא רק במתמטיקה אלא גם במדעים. לפיכך, הקושי שיש לתלמידים במשוואות המכילות פרמטרים מפריע ומכשיל גם במקצועות לימוד אחרים. לדעתו, בעיות עם פרמטרים בוחנות את הידע המתמטי של הפותר, ומאפשרות לגלות את נקודות החולשה שלו. יתרה מזו, בעיות כאלה מאבחנות אסטרטגיות שגויות וכשלים לוגיים של התלמיד.

דיוויס והנקין (Davis & Henkin, 1978) רואים חשיבות רבה בפתרון משוואות ריבועיות בכלל ומשוואות בעלות מקדמים פרמטריים בפרט. כמו כן הם מתארים כיצד הם מפרשים את הבנת הנושא. הם מציינים את המיומנויות המגוונות הנדרשות לפתרון משוואות ריבועיות, ודנים בסוגי ידע וצורות הבנה שהשגתם הכרחית. לטענתם, הבנה ופתרון משוואות ריבועיות עם פרמטרים משפרים את ההבנה של משוואות בכלל בקרב תלמידים.

סקמפ (Skemp, 1987) טען שלימוד הכללים ללא הסיבות מאפשר לתלמיד לתפקד בתוך מסגרת מוגבלת

מאוד, ולהתמודד עם בעיות סטנדרטיות בלבד. בלי הבנה של "מה לעשות" ו"מדוע", התלמיד לא יוכל להתמודד עם מטלות חדשות או מורכבות. ההבנה מאפשרת לו לטפל בכל אוסף נתונים בחופשיות ועל פי מטרות משתנות. ממצאי מחקר של פישביין ומוזיקנט (Fischbein & Muzicant, 2002) מעידים על כך שתלמידים למדו בעיקר בצורה פרוצדורלית, והם אינם מקשרים בזמן פתרון משוואות בין הידע המושגי לידע הפרוצדורלי.

במחקר זה נתמקד במשוואות המכילות פרמטרים, ועל כן נביא מהספרות דיון במושג "פרמטר". פרנקל (1942) אינו מזכיר את המושג פרמטר אבל בהגדרתו את ה"קבוע" הוא כנראה מתכוון לפרמטר:

> אם סימן ידוע מסמן בתוך נושא מתמטי גודל, שערכו **קבוע במשך כל הנושא**, נאמר: הסימן מסמן (גודל) קבוע. במקרים רבים מסומן הקבוע ע"י אות (*a, b*.....); בזה יצוין שהגודל אמנם קבוע (מספר, נקודה וכו'), אבל לא משנה מהו הערך הקבוע הנידון (המוגבל פעמים לשדה מסוים וכו') (עמ' 243).

פרנקל מדגיש כי "לתכונה להיות 'גודל קבוע' או 'משתנה' אין אופי אובייקטיבי ומוחלט. הברירה בין שתי האפשרויות נמצאת במקרים רבים בידינו, כלומר תלויה במטרה שנשאף אליה" (עמ' 229).

כדי להבהיר סוגיה זו פרנקל מביא דוגמה מתחום הפיסיקה: חוק בויל-מריוט וגי-לוסק $T=pv/R$. האם כאן p ו-v שניהם משתנים או רק אחד מהם משתנה ואיזה מהם?

התשובה תהיה: הדבר תלוי בדרך שבה הגענו אל היחס או במטרה שנתכוון אליה. מצד אחד, אם רוצים להדגיש את תלות הטמפרטורה T בנפח v ובלחץ p, אזי נקבל פונקציה בעלת שני משתנים: p ו-v. מצד אחר, אם נרצה לחקור את התהליך כאשר הלחץ קבוע ואינו משתנה במשך התהליך, אזי הנוסחה מביעה את תלות הטמפרטורה בנפח הגז, ואז p הוא קבוע ו-v הגורם המשתנה היחיד. במקרים אחרים p יהיה המשתנה היחיד ו-v יהיה קבוע אם נשאיר את נפח הגז קבוע במשך התהליך שבו משתנה הלחץ.

לדברי פרנקל (שם):

> במתמטיקה (לא כן בפיסיקה) נהוג לסמן את הקבועים באותיות הראשונות של האלפא-ביתא הרומי, או היוני: *a, b, c...., A, B, C,.....*, לעומת זאת את המשתנים ב-*x, y, z, u, ...*- *v, w*. מובן שזה רק מנהג, אבל מנהג מועיל; פעמים ייתכן לנהוג אחרת (עמ' 227).

דקארט הנהיג לראשונה את מנהג זה במאה השבע-עשרה, כשעדיין הייתה הפרדה דיכוטומית בין המשתנה לפרמטר. השינוי במשמעות ובשימושים של המשתנה הביאו לידי כך שאותה אות יכולה לשנות תפקיד. לכן מציין פרנקל שזהו "מנהג" בלבד שניתן לשינוי. יש לזכור שהוא כתב זאת בשנות החמישים כאשר תכנית הלימודים במתמטיקה הייתה שונה לגמרי מהתכנית של ימינו. חומר לימודי שנלמד היום בתיכון נלמד אז באוניברסיטה, ולמדו אותו אנשים בעלי אוריינטציה מתמטית בלבד. לכן יש מקום לשקול האם גם היום רצוי להמשיך במנהג זה.

פורנגטי ופאולה (Furinghetti & Paula, 1994) ראו בפרמטר מושג "חמקמק" בגלל היותו, לדעתן, דו-משמעי: מצד אחד הוא משתנה כמו משתנה, ומצד שני הוא נעלם. הן לא ציינו שבנוסף להיותו משתנה ונעלם הוא גם משמש כקבוע.

הידיעה שאות נחשבת לפרמטר או משתנה אינה מובנת מהביטוי עצמו אלא מקביעה מסוימת. לעתים תוך כדי תהליך המשתנה הופך לפרמטר או הפרמטר הופך למשתנה.

לדוגמה: מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (3,5) ושיפועו הוא 4.

שלבי הפתרון

- כותבים את המשוואה $y=ax+b$ שבה a ו-b הם הפרמטרים, ואילו x ו-y הם המשתנים.
- מציבים את הקבוע 4 במקום הפרמטר a ואת הקבועים 3 ו-5 עבור x ו-y בהתאמה. פותרים את המשוואה עבור המשתנה b (המשמש כאן כנעלם ובשלב קודם שימש כפרמטר).
- התהליך מסתיים כאשר מציבים את הערכים המספריים המתקבלים, כלומר הקבועים, במקום הפרמטרים a ו-b ומקבלים משוואה שבה x ו-y הם משתנים.

אילני (1997) הראתה שאותיות שונות נתפסות אצל תלמידים ופרחי הוראה כמייצגות משתנה בלבד, ואותיות אחרות כמייצגות פרמטרים בלבד. כל האמור לעיל מלמד על הקושי שיש בהבנת מושג הפרמטר ועל הצורך לבדוק כיצד פותרים משוואות המכילות פרמטרים. יש הסכמה רחבה לכך כי חשוב שמורים יכירו דרכי חשיבה נכונות ושגויות של תלמידים באשר לנושאים מתמטיים ומקורות אפשריים לשגיאות אופייניות. מודעות מסוג זה תורמת תרומה ניכרת להוראה (Karsenty, Arcavi, & Hadas, 2007). ממחקרים עולה שכאשר לתלמידים יש בעיות בנושא מתמטי כלשהו, לעתים בעיות דומות עולות גם בקרב מורים ופרחי הוראה (Almog & Ilany, 2012; Graeber, Tirosh, & Glover, 1989).

במאמר זה בחרנו להתמקד באופן שתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ופרחי הוראה לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה פותרים משוואות המכילות פרמטרים. תלמידים בבית הספר לומדים לפתור משוואות רגילות ומשוואות עם פרמטרים שבהן שולטת האות x כמשתנה שצריך להביע באמצעות האותיות $a, b, c...$.

הנבדקים קיבלו משוואות מגוונות באותיות מאותיות שונות ותרגילים מגוונים שבהם התבקשו לבטא אותיות שונות, כמו $a, b, c...$ באמצעות x, ותרגילים שבהם התבקשו לבטא את x באמצעות אותיות אחרות.

מטרות המחקר

מטרות המחקר היו לבדוק ולאתר קשיים של תלמידי תיכון ושל סטודנטים להוראה בפתרון משוואות פרמטריות ולענות על השאלות:

1. כיצד פותרים הנבדקים משוואות פרמטריות שבהן צריך להביע אותיות שונות?
2. מהן הדרכים שבהן משתמשים הנבדקים?
3. מהם הקשיים שבהם נתקלים הנבדקים בפתרון משוואות פרמטריות?
4. האם יש הבדלים בין תלמידים לפרחי הוראה? אם כן, מהם?

מתודולוגיה

סוגי המשוואות

במחקר זה נעסוק במשוואות פרמטריות "פשוטות" ובמשוואות פרמטריות "יישומיות". משוואות פרמטריות "פשוטות" הן משוואות המכילות פרמטרים שבהן עושים אלימינציה של המשתנה המבוקש, ובתהליך הפתרון נדרשים צעדים סטנדרטיים של פתירת משוואות ממעלה ראשונה או שנייה (דוגמאות בטבלאות 1 ו-3). במאמר זה נתייחס אל הידע הדרוש לפתירתן של משוואות אלה כאל ידע פרוצדורלי (אילני, 1997; Ilany & Hassidov, 2013, 2014).

משוואות פרמטריות "יישומיות" הן משוואות המכילות פרמטרים, והפתרון שלהן אפשרי לא רק על ידי אלימינציה אלא דורש גם יישום. נוסף לכך יש צורך להפעיל שיקול דעת לפני פתירת המשוואות הפרמטריות, כמו למשל, מציאת קשר בין פרמטרים. במקרים רבים לא נתקלו הנבדקים בהכרח בשאלות מסוג זה בעבר (דוגמאות בטבלה 4). במאמר זה נתייחס אל הידע הדרוש לפתירת בעיות מסוג זה כאל ידע מושגי.

אוכלוסיית המחקר

43 פרחי הוראה בשנים ג ו-ד ללימודיהם להוראת מתמטיקה לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה בשלוש מכללות גדולות במרכז הארץ.

73 תלמידי כיתות י"ב ברמה גבוהה של לימודי מתמטיקה מארבעה בתי ספר תיכוניים מבוססים במרכז הארץ הנחשבים כבעלי רמת הוראה גבוהה במתמטיקה.

כלי המחקר

שאלון – נעשה שימוש בחלק משאלון שהכיל שש שאלות פרמטריות "פשוטות". במאמר נציג ממצאים של חמש שאלות פרמטריות "פשוטות": שלוש המכילות משוואות ממעלה שנייה ושתיים המכילות משוואות ממעלה ראשונה שבהן הפרמטר הוא ממעלה שנייה. השאלון הכיל גם שש שאלות פרמטריות "יישומיות". במאמר נציג ממצאים של שלוש שאלות כאלה. השאלון קיבל תיקוף ממומחים (אילני, 1997).

ראיונות – כדי להבין הבנה בלתי אמצעית את דרכי החשיבה של הנבדקים ולהתחקות אחריהן, רואיינו בריאיון סגור חמישה תלמידים ושישה פרחי הוראה. הראיונות עסקו באותם נושאים שהוצגו בשאלון. בניית הריאיון נעשתה לאחר העברת השאלון וניתוחו כדי להבהיר ולחזק שאלות שהיו בשאלון.

תצפיות – בזמן העברת השאלון נערכו תצפיות פתוחות כדי לעקוב ולהתחקות בצורה בלתי אמצעית אחרי תגובות הנבדקים בתהליך פתרון השאלות.

עיבוד נתונים

כמותי – כולל טבלאות, התפלגויות ואחוזי הצלחה, מבחני χ^2 ומבחני t.

איכותני – נעשה באמצעות תצפיות בעת פתירת השאלונים, ניתוח ההסברים המילוליים של הפותרים לפי קריטריונים וקטגוריזציה ולפי ראיונות.

ממצאים

להלן יוצגו הממצאים שעלו מכל אחת מהשאלות שהיו כלולות בשאלונים מתוך שימת לב להבדלים בין

פרחי הוראה לתלמידים.

את הממצאים נציג לפי החלוקה של משוואות פרמטריות "פשוטות" ומשוואת פרמטריות "יישומיות". הטבלאות בסעיפים השונים מציינות אחוזי שגיאות ואחוזי הצלחה של הנבדקים במשימות השונות. הקטגוריות של שגיאות הנבדקים חולקו לשני סוגים: **שגיאות של חישוב** ו**שגיאות שימוש באותיות**. האחרונות באו לידי ביטוי בהשמטת אותיות, בידוד האות הלא נכונה או הבעת האות באמצעות אותה אות עצמה (ראו דוגמאות בהמשך).

משוואות פרמטריות "פשוטות"

בחרנו להציג שלוש משוואות ממעלה שנייה בעלות מבנה דומה. בכל אחת מהן יש להביע את אחת האותיות באמצעות אותיות אחרות שונות ממנה.

טבלה 1: ניתוח משוואות פרמטריות "פשוטות" (תל=תלמידים, פ"ה=פרחי הוראה)

תלמידים n=7 3 פרחי הוראה n=4 3		סוג המשוואה (דרך הפתרון)	אחוז הפותרים נכון		אחוז שגיאות חישוב		אחוז שגיאות שימוש באותיות		לא ענו	
שאלה מספר	השאלה		תל	פ"ה	תל	פ"ה	תל	פ"ה	תל	פ"ה
16	בטאו את x (באמצעות a) במשוואה: $5x^2+8ax-4a^2=0$	משוואה ממעלה שנייה, משוואה מסודרת	70 p=0.004	88	5	5	18 P=0.002	5	7	2
1	בטאו את c (באמצעות x) במשוואה: $c^2+3xc+4x=0$	משוואה ממעלה שנייה, משוואה מסודרת	63 P=0.001	70	1	2	33	26	3	2
9	בטאו את b (באמצעות x) במשוואה: $x^2+6bx+5b^2=0$	משוואה ממעלה שנייה, משוואה לא מסודרת, צריך להביע את b באמצעות x.	28	43	0	5	66	36	4	16

השאלות בטבלה רשומות מהאחוז הגבוה יותר של הפותרים נכון אל האחוז הנמוך.

$*p < 0.05$; $**p < 0.01$; $***p < 0.001$

המשוואות בשלוש השאלות בטבלה דומות במבנה: הן ממעלה שנייה ו"מסודרות" כמשוואה ריבועית. אולם בשאלה 16 ($5x^2+8ax-4a^2=0$) מבקשים למצוא את x, אות הנתפסת על ידי תלמידים כמייצגת משתנה (אילני, 1997; Ilany, 1998), ואילו בשאלות האחרות מבקשים למצוא את c או את b, אותיות הנתפסות על ידי חלק מהנבדקים כמייצגות פרמטר (שם). בשאלות 16 ו-9 הפרמטר מופיע בחזקה שנייה ואילו בשאלה 1 הפרמטר מופיע בחזקה ראשונה.

מתוצאות המחקר מתקבל שעל שאלה 16 ענו טוב יותר מאשר על שאלות 1 ו-9. כלומר, נראה שסוג

האות השפיע על תשובות הנבדקים. המשוואה בשאלה 9 ($x^2+6bx+5b^2=0$) דומה מאוד במבנה שלה למשוואות בשאלה 16, אולם בשאלה 16 התבקשו הנבדקים למצוא את x, ואילו בשאלה 9 התבקשו למצוא את b. התוצאות מראות שאחוז הפותרים נכון את שאלה 9 לעומת אחוז הפותרים נכון את שאלה 16 הוא בהפרש מובהק: 70% מתלמידים ענו נכון על שאלה 16 לעומת 28% שענו נכון על שאלה 9; 88% מפרחי ההוראה ענו נכון על שאלה 16 לעומת 43% שענו נכון על שאלה 9.

אחוז השגיאות הנובע משימוש באותיות גם הוא גבוה במידה ניכרת ומעיד על הפער בין הקבוצות באשר לשתי השאלות (66% שגיאות אצל תלמידים בשאלה 9 לעומת 28% שגיאות אצל תלמידים בשאלה 16; 36% שגיאות אצל פרחי הוראה בשאלה 9 לעומת 5% שגיאות אצל פרחי הוראה בשאלה 16). מהסברי הנבדקים בראיונות התברר שהאות שיש למצוא היא גורם משפיע על פתרון המשוואה. עוד גורם שהתגלה כמשפיע על פתרון המשוואה הוא סידור המשוואה.

חיזוק למשמעות של סידור המשוואה אפשר לראות בהשוואת תוצאות פתרון שאלות 9 ו-1. בשאלה 9 רשומה משוואה ($x^2+6bx+5b^2=0$) הדומה במבנה למשוואה ($c^2+3xc+4x=0$) של שאלה 1, אך אינה מסודרת בסדר שבו פותרים בדרך כלל משוואה ריבועית כאשר רוצים להביע את b באמצעות x. כאן התקבלו התוצאות הנמוכות ביותר (28% תלמידים ו-43% פרחי הוראה פתרו נכון את המשוואה). הסיבות לכך הן כנראה הקושי בסידור המשוואה ובמציאת אות "לא מקובלת". בראיונות הוסבה תשומת הלב של המרואיינים לכך שיש להביע את b במשוואה בשאלה 9. אף שזה הודגש רוב המרואיינים הביעו את x. אחת המרואיינות (פרח הוראה) הביעה את x ואמרה: "את לא רוצה את x, את רוצה את b. באופן אוטומטי אני מוצאת את x, כי זו משוואה ריבועית". היא ניסתה להביע את b ואמרה: "אני לא יכולה למצוא את b. אני יודעת שיש אפילו שני פתרונות בגלל שיש $\Delta>0$. אבל אני לא יכולה למצוא. אני חושבת שגם אי אפשר". בסוף הריאיון חזרנו אל השאלה ורשמנו את המשוואה $5b^2+6xb+x^2=0$ (במיוחד בסדר שונה ממה שהופיע בשאלון, הפעם כיוון שמחפשים את b, b^2 הופיע ראשון במשוואה). המרואיינת הביעה את b באמצעות x מידית ובלי כל בעיה. כלומר, במקרה זה סידור המשוואה באותיות – תהליך שהיא איננה רגילה אליו – הקשה עליה אף שאין לה קושי טכני בסידור משוואות. בשאלות אחרות שבהן נדרש הנשאל להביע את x במשוואה "לא מסודרת" היא פתרה בלי כל קושי. נוסף על כך היא הביעה גם אותיות שונות באמצעות x בלי כל קושי. לאחר הריאיון היא אמרה: "מעתה, אקפיד לתת לתלמידי להביע אותיות שונות, ובכל פעם לאו דווקא בסדר המקובל".

(הערה: סידור המשוואה בשאלה 9 הוא רק דרך אחת לפתור את המשוואה. דרך שנייה היא בהחלפת האותיות. כלומר, במקום b להציב את x, במקום x להציב את b, ולאחר שמוצאים את x צריך שוב להחליף את האותיות. יש לציין שבמחקר זה איש מהנבדקים לא השתמש בשיטה זו. שיטה שלישית היא להביע את x באמצעות b ורק לאחר מכן להביע את b באמצעות x. בשיטה השלישית השתמשו חלק מהנבדקים שפתרו נכון את השאלה).

האחוז הגבוה של השגיאות המאופיינות ב"שימוש באותיות" יכול לציין את הבעייתיות שיש לנבדקים בפתירת משוואות פרמטריות בעלות אותיות שונות.

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות

דוגמאות לשגיאות בשל שימוש באותיות בשאלה 1

בשאלה 1 (ראו טבלה 1) התשובה הנכונה היא: $c_{1,2}=\frac{-3x\pm\sqrt{9x^2-16x}}{2}$.

בשאלה זו היה קושי לנבדקים לקבל תשובה "בלתי גמורה" מאחר שאת הביטוי שהתקבל בשורש אי אפשר להמשיך לפשט. בשל כך חלק מהנבדקים שרשמו תשובה נכונה מחקו את תשובתם. בטבלה 1 סומנו נבדקים אלה באחוז הפותרים נכון מאחר שההתייחסות הייתה לנבדקים שהביעו את c.

שגיאות נוספות

נבדקים שמצאו את x ולא את c (2% מפרחי הוראה); נבדקים שאמרו "אי אפשר למצוא את c כי הוא פרמטר" (5% מפרחי הוראה). c הוא פרמטר ולכן יכול להיות כל מספר; נבדקים שהביעו את c באמצעות c (4% מהתלמידים), למשל $c=\frac{-4x}{c}+3x$; תלמידה שפתרה את שאלה 16 בלי כל בעיה, כתבה כאן: "אין לי שמץ של מושג" וכן נבדקים שהשמיטו את כל האותיות (2% מהתלמידים).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 9

נבדקים שמצאו את x ולא את b (11% מהתלמידים, 5% מפרחי הוראה); נבדקים שהביעו את b באמצעות b (6% מהתלמידים, 10% מפרחי הוראה), למשל $b=-\frac{x^2}{6x+5b}$; נבדקים שאמרו "אי אפשר" (16% מהתלמידים, 10% מפרחי הוראה), כי: "אי אפשר למצוא מכיוון שיש שני נעלמים ורק משוואה אחת", נימוק נוסף: "לא יכולים למצוא את b כי יש לנו משתנה נוסף x"; נבדקים שמצאו את x בהתעלמות מ-b: $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=1,-5$ (3% מהתלמידים); נבדקים שהשמיטו חלק מהאותיות (6% מהתלמידים); נבדקים שאמרו "b הוא פרמטר לכן התשובה היא כל מספר" (2% מהתלמידים, 2% מפרחי הוראה).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 16

בשאלה 16 16% מהתלמידים ו-2% מפרחי ההוראה השמיטו את a מהתשובה הסופית, לדוגמה:

$$x_{1,2}=\frac{-8a\pm12a}{10}\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=\frac{2}{5}$$

דוגמה נוספת

$$\frac{-8a\pm12a}{10}\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=\frac{2}{5}$$

בכלליות אפשר לראות שפרחי הוראה פותרים טוב יותר מתלמידים.

להלן שתי שאלות הנראות כמשוואות ממעלה שנייה, אולם האות שצריך למצוא היא ממעלה ראשונה.

טבלה 2: ניתוח ממצאי משוואות פרמטריות "פשוטות"

מספר השאלה	השאלה (תלמידים n=73, פרחי הוראה n=43)	סוג המשוואה (מבחינת דרך הפתרון)	אחוז הפותרים נכון – תל	אחוז הפותרים נכון – פ"ה	אחוז שגיאות חישוב – תל	אחוז שגיאות חישוב – פ"ה	אחוז שגיאות שימוש באותיות – תל	אחוז שגיאות שימוש באותיות – פ"ה	לא ענו – תל	לא ענו – פ"ה
5	בטאו את m במשוואה (באמצעות x): $7-m=mx^2$	**משוואה ממעלה ראשונה**	67	88 p=0.02	3	0	29	10 p=0.004	1	2
21	בטאו את x במשוואה (באמצעות a): $a^2(x-1)+1=-x-2ax$	**משוואה ממעלה ראשונה** אבל מזכירה משוואה ממעלה שנייה לא מסודרת. יש צורך בפתיחת סוגריים, כינוס איברים באמצעות a^2 (פרמטר שהועלה בחזקה) וסידור המשוואה. יש מגבלה $a\neq-1$ על a: וצריך לצמצם.	36*	73 p= 0.05	1	6	41	14 p=0.00	22	7

* הנבדקים ביטאו נכון את x, אבל לא תמיד סיימו את התהליך. פירוט לכך מופיע בטבלה 3.

*p < 0.05; **p < 0.01; ***p < 0.001

בשאלה 5 התבקשו הנבדקים לבטא את האות m, אות הנתפסת על ידי חלקם כפרמטר (אילני, 1997). זוהי משוואה **ממעלה ראשונה** שתהליך הפתרון שלה אמור להיות פשוט, אולם רק 67% מהתלמידים השיבו נכונה ו-29% שגו בשגיאות הנובעות מאי-הבנת השימוש באותיות (דוגמאות לשגיאות מובאות בהמשך). אצל פרחי ההוראה 88% פתרו נכון, 10% שגו שגיאות הנובעות משימוש לא נכון באותיות והאחרים שגו שגיאות אחרות.

טבלה 3: פירוט ממצאי הנבדקים בשאלה 21 שביטאו נכון את x אבל לא תמיד סיימו את התהליך

שאלה 21	אחוז הנבדקים שבודדו נכון $x=-\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$ – תל	פ"ה	אחוז הנבדקים שביטאו את x נכון, צמצמו וציינו את תחום ההגדרה – תל	פ"ה	אחוז הנבדקים שלא צמצמו ולא ציינו את תחום ההגדרה – תל	פ"ה	אחוז הנבדקים שהציבו נכון. כתבו את תחום ההגדרה, אבל לא צמצמו – תל	פ"ה	אחוז הנבדקים שהציבו נכון וצמצמו, אבל לא ציינו את תחום ההגדרה – תל	פ"ה
בטאו את x $a^2(x-1)+1=-x-2ax$	27	73	1	19	8	30	0	5	27	19

	p=0.05	**p=0.0001**

*p < 0.05; **p < 0.01; ***p < 0.001

גם בשאלה 21 רשומה משוואה שהמשתנה שלה הוא **ממעלה ראשונה**. בשאלה זו נדרש למצוא את x, אות הנתפסת אצל רוב הנבדקים כמייצגת משתנה (אילני, 1997). המשוואה הנתונה מזכירה משוואה ממעלה שנייה והיא אינה משוואה "מסודרת". יש צורך בפתיחת סוגריים, בסידור המשוואה, בכינוס איברים באמצעות a^2 (פרמטר שהועלה בחזקה) ובביצוע טכניקה אלגברית, ובנוסף לכך יש מגבלה על a ‏($a\neq-1$). סדרת פעולות אלו על האותיות גרמה, כנראה, לשגיאות רבות במיוחד אצל התלמידים. רק 36% מהם ביטאו נכון את x באמצעות a. כלומר, התלמידים לא התייחסו לתחום ההגדרה ולצמצום ורשמו: $x=\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$ (פירוט נמצא בטבלה 3). לעומת זאת אצל פרחי ההוראה המצב היה טוב יותר: 73% מהם ענו תשובה נכונה. ניתוח הטעויות של הנבדקים נמצא כי 41% מהתלמידים לעומת 14% מפרחי ההוראה שגו שגיאות הקשורות באותיות.

מטבלה 3 עולה כי אחוז קטן ביותר מהנבדקים שביטאו נכון את x באמצעות a התייחסו גם אל תחום ההגדרה של הפתרון. חלק מהנבדקים שולטים רק בטכניקה האלגברית. תשובה מלאה ענו תלמידים בודדים (1%), ואחוז קטן ביותר של פרחי הוראה (19%).

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 5

בשאלה 5 נדרש למצוא את m במשוואה: $7-m=mx^2$ והתשובה הנכונה היא $m=\frac{7}{x^2+1}$.

תשובות שגויות לדוגמה:

- מצאו את x (3% מהתלמידים)
- ענו "אי אפשר" (10% מהתלמידים, 7% מפרחי הוראה)
- הפכו את המשוואה למשוואה ריבועית עבור m (3% מהתלמידים):

$$xm^2+m-7=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+28x}}{2x}$$

או:

$$m_{1,2}\frac{-1\pm\sqrt{1+28x^2}}{2x^2}$$

דוגמה נוספת

$$7-m=mx^2\Rightarrow mx^2+m=0\Rightarrow m(x^2+1)=0\Rightarrow m=0$$

$$x^2+1\neq0$$

$$x^2\neq-1$$

לכן תמיד נכון

הפתרון הנכון לשאלה 21

בשאלה 21 נדרש למצוא את x במשוואה $a^2(x-1)+1=-x-2ax$. התשובה הנכונה היא:

עבור $a\neq-1$, $x=-\frac{a+1}{a^2+2a+1}=\frac{1}{a+1}$

ועבור $a=-1$, x יכול להיות כל מספר.

דוגמאות לשגיאות שימוש באותיות בשאלה 21

- 4% מהתלמידים הביעו את x באמצעות x, למשל:

$$a^2(x-1)+2ax+x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2-4(x-1)(x+1)}}{2(x-1)}$$

דוגמה אחרת:

$$x=\frac{-x(1+2a)}{a^2}$$

דוגמה נוספת

התלמידים רשמו $x=-2ax-a^2(x-1)+1$ ואמרו "לכן אי אפשר לחלץ את x לבד".

- 6% מהתלמידים ו-2% מפרחי ההוראה הפכו את x ל-x^2.
- 32% מהתלמידים ו-5% מפרחי ההוראה אמרו "לא יודעים".
- 3% מהתלמידים הביעו את a במקום את x.

משוואות פרמטריות "יישומיות"

בחרנו להציג שלוש שאלות המוצגות בטבלה 4. כדי לפתור את המשוואות האלה נידרש לבצע מספר שלבים, לבצע חקירה, וכמו כן הפתרון לא תמיד "נראה לעין".

טבלה 4: ניתוח שאלות פרמטריות "יישומיות" (תל=תלמידים, פ"ה=פרחי הוראה)

מספר השאלה	תלמידים n=73 פרחי הוראה n=43 **השאלה**	**סוג המשוואה (מבחינת דרך הפתרון) ודוגמאות לפתרונות**	**אחוז הפותרים נכון** תל	פ"ה	**הציבו משוואה נכונה ולא סיימו או שגו בדרך** תל	פ"ה	**לא ענו** תל	פ"ה
17	מצאו לאלו ערכי m שני שורשי המשוואה מתלכדים: $(m+3)x^2+4mx+3m-2=0$	צריך למצוא עבור איזה ערך של m, כלומר: $16m^2-4(m+3)(3m-2)=0$ מסדרים את המשוואה: $4m^2-28m+24=0$ לכן $m^2-7m+6=0$, כלומר: $m_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}$ ולכן $m_{1,2}=1,6$	**33**	**49**	**40**	**19**	**27**	**32**
19	הוכיחו שלמשוואה $(a+b)x^2+2ax+a-b=0$ יש לפחות שורש ממשי אחד לכל b ו- a	**משוואה ממעלה שנייה,** משוואה מסודרת, צריך למצוא עבור איזה ערכים של $\Delta\geq0$ a ו- b, כלומר: $4a^2-4(a+b)(a-b)\geq0$ לכן $4a^2-4a^2-4b^2=4b^2$ וזה תמיד אי שלילי	**45**	**42**	**14**	**2**	**41**	**56**
23	נתונה הפרבולה $y=-x^2+6x-6$ וישר מהצורה $y=2x+c$ א. עבור איזה ערך של c ישיק הישר לפרבולה? (<u>התוצאות ניתנו רק לסעיף א</u>) ב. מה יקרה כאשר c גדול מהערך שמצאת בסעיף א? תן דוגמה אחת ל- c כזה. ג. מה יקרה כאשר c קטן מהערך שמצאת בסעיף א? תנו דוגמה אחת ל- c כזה. ד. מה מאפיין את שלושת הישרים בסעיפים א, ב, ג? (או מה המשותף לשלושת הישרים?) התשובות בטבלה עבור סעיף א בלבד.	שתי משוואות אחת ממעלה שנייה, שאלה לא סטנדרטית, צריך להבין את הקשר בין שתי המשוואות. שני שלבים לפתרון: דרך א: הנגזרת של הפרבולה שווה לשיפוע הישר: $-2x+6=2$ לכן $x=2$ מאחר שעבור נקודת ההשקה שבה $x=2$ מתקיים: $2x+c=-x^2+6x-6$ לכן: $c=-2$ דרך ב: בנקודת ההשקה מתקיים: $2x+c=-x^2+6x-6$, לכן: $x^2-4x+(c+6)=0$ כדי שלמשוואה יהיה פתרון יחיד נדרש ש- $\Delta=0$, לכן: $16-4c-24=0$ ולכן $c=-2$	**21**	**19**	**13**	**18**	**66**	**63**

מתוצאות המחקר מתקבל שפחות מ-50% מהנבדקים פתרו נכון משוואות פרמטריות "יישומיות". אחוז גבוה ביותר של הנבדקים לא השיבו כלל על המשוואות "היישומיות". לדוגמה, בשאלה 23 66% מהתלמידים ו-66% מפרחי ההוראה לא ענו כלל. בקרב הנבדקים שענו תשובה שגויה נמצא שכל אחד מהם שגה שגיאה שונה. בחלק מהמקרים נמצא שפרחי ההוראה פתרו טוב יותר מהתלמידים.

דוגמאות לשגיאות של נבדקים

שאלות 17 ו-19 הן שאלות דומות: בשאלה 17 הפתרון הוא עם שוויון ומקבלים תוצאה מספרית. בשאלה 19 הפתרון מצריך טיפול באי-שוויון ובשני פרמטרים בו בזמן. נוסף לכך מקבלים פתרון "חיובי תמיד", כלומר מתקבל פתרון שאינו מספרי ולכן ייתכן שהוא אינו מובן תמיד לתלמידים.

אחת מפרחי ההוראה כתבה:

> "עברו מספר שנים טובות מאז שלמדתי את החומר, אז יש דברים שאני זוכרת, יש כאלה שניסיתי להסיק ממה שאני זוכרת ויש שאלות שפשוט אני לא יודעת איך להסתכל עליהם."

על שאלות 17, 19 ו-23 כתבה "לא זוכרת".

בשאלה 19 היא ניסתה לפתור:

$$D=(2a)^2-4(a+b)(a-b)=4a^2-4(a^2-b^2)=4a^2-4a^2-4b^2=-4b^2$$

עכשיו צריך להוכיח ש- $c/a>0$ - "אבל אני לא זוכרת איך להמשיך מכאן"

דוגמה לשגיאה של פרח הוראה בשאלה 17:

$$X_{1,2}=\frac{-4m\pm\sqrt{(4m)^2-4.(m+3).(3m-2)}}{2(m+3)}=\frac{-4m\pm\sqrt{16m^2-4(3m^2-2m+9m}}{2m+6}$$

$$=\frac{-4m\pm\sqrt{16m^2-12m^2+8m-36m+24}}{2m+6}=\frac{-4m\pm\sqrt{4m^2-28m+24}}{2m+6}$$

דוגמה נוספת של פרח הוראה בשאלה 17:

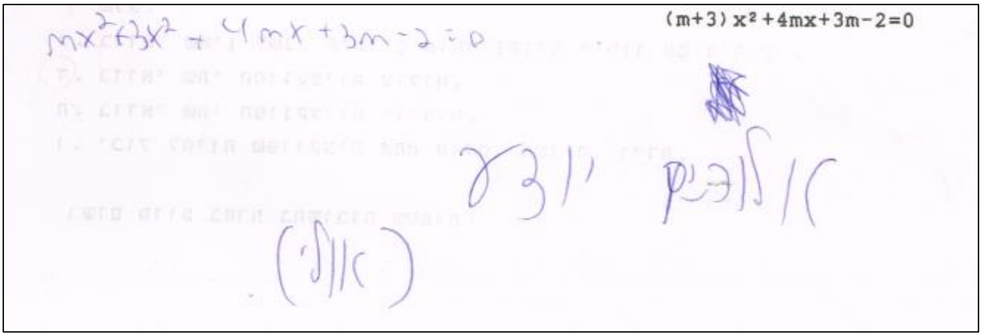
$$X_{1,2}=\frac{-4m\pm\sqrt{16m^2-4(m+3)(3m-2)}}{2(m+3)}$$

$$X_{1,2}=\frac{-4m\pm\sqrt{16m^2-4(3m^2-2m+9m-6)}}{2(m+3)}=\frac{-4m\pm\sqrt{16m^2-12m^2-28m+24}}{2(m+3)}$$

$$X_{1,2}=\frac{-4m\pm\sqrt{4m^2-28m+24}}{2(m+3)}=\frac{-4m\pm\sqrt{(m-6)(m-1)}}{2(m+3)}$$

חלק מהנבדקים ידעו שבשאלה 17 $\Delta=0$ ובשאלה 19 $\Delta\geq 0$. אבל לא ידעו כיצד להמשיך.

תלמיד י"ב הלומד חמש יחידות מתמטיקה כתב כתשובה לשאלה 17:



בשאלה 23 סעיף א:

7% מהנבדקים ענו: c=-6 מכיון ש-c במשוואה $y=-x^2+6x-6$ שווה ל-(-6).

3% מהנבדקים ענו: c=6 מאחר ש- $y'=2x+6$

65% מהנבדקים לא ידעו בכלל איך להתמודד עם השאלה.

בסעיפים ב, ג, ד שבהם היה צריך להפעיל שיקולים לוגיים בלבד, רק כ-24% מהנבדקים ענו נכון.

אחת מפרחי ההוראה כתבה:

> "הערה – אני כבר שכחתי את הפרבולות והמשוואות וזה בגלל המקצועות במתמטיקה שמלמדים אותנו."

סיכום ודיון

במאמר זה הוצגו ממצאים הקשורים לשימוש במגוון אותיות בפתרון משוואות פרמטריות. באמצעות עיסוק במשוואות פרמטריות אפשר ללמוד על נקודות חולשה בידע של התלמידים במתמטיקה, וכמו כן מהטעויות אפשר ללמוד על אסטרטגיות שגויות.

הממצאים של המחקר הנוכחי לגבי **משוואות פרמטריות "פשוטות"** מראים כי בין 18% ל-66% מהתלמידים ובין 5% ל-36% מפרחי ההוראה ביצעו שגיאות בשימוש באותיות. במשוואות שבהן הופיעו גם אותיות שונות מ-x נתקלו הנבדקים השונים בקשיי פתרון, בעיקר כאשר נדרשו למצוא את הפתרון באמצעות אות אחרת מ-x. רוב הנבדקים הכירו את הטכניקות האלגבריות, אולם כאשר המשוואה לא הייתה "מסודרת" בצורה המקובלת, חלק נכבד מהם נתקל בבעיות בעת פתירתן (לדוגמה המשוואה $x^2+6bx+5b^2=0$ שבה נדרש למצוא את b).

תוצאות המחקר מלמדות על הבדל מובהק בין פרחי ההוראה ובין תלמידים באחוזי ההצלחה ובביצוע שגיאות בפתרון המשימות. פרחי ההוראה פותרים משוואות פרמטריות "פשוטות" טוב יותר מאשר התלמידים. נמצא שיש הבדל מובהק בין האוכלוסיות בסוג השגיאה. תלמידים שוגים יותר מפרחי ההוראה בשגיאות הנובעות משימוש לא נכון באותיות.

במשוואות פרמטריות "יישומיות" פחות מ-50% מהנבדקים פתרו נכון. כמו כן התברר כי בחלק מהמקרים פרחי ההוראה פתרו טוב יותר מהתלמידים ללא הבדל מובהק. בשאלות אלו אין קושי טכני לתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ולפרחי הוראה, אבל הן מורכבות וצריך להפעיל שיקולים ומחשבה לפני פתירתן. סקמפ (Skemp, 1987) וכן פישביין ומוזיקנט (Fischbein & Muzicant, 2002) מעידים על כך שתלמידים למדו בעיקר בצורה פרוצדורלית, והם אינם מקשרים בזמן פתרון משוואות בין הידע המושגי ובין הידע הפרוצדורלי, ולפיכך החוקרים מדברים על החשיבות שבהבנה.

לדוגמה, שאלה 23 אינה מסובכת מבחינה טכנית, אך היא כנראה שאלה בלתי מוכרת לנבדקים. כ-65% מהם לא ענו על שאלה זו כלל וכלל. ייתכן שהדבר נובע מכך שזו הייתה השאלה האחרונה בשאלון, אולם נמצא שגם בראיונות האישיים לא ידעו הנבדקים לענות על השאלה. מתוך כך אנו מניחים שהתקבל חיזוק לגבי השגיאות והמסקנות שעלו מהתשובות של הנבדקים לשאלון, ולכך שהם לא ידעו כיצד לפתור את השאלה. ייתכן שהם אינם יודעים להתמודד עם שאלות מסוג זה, וכנראה חסרה לנבדקים הבנה מושגית שאותה היינו מצפים מתלמידי חמש יחידות מתמטיקה ומפרחי הוראה לבית ספר על-יסודי. השגיאות שנעשו בתשובות על השאלה מעידות על חוסר הבנתה, כי אי אפשר לענות על שאלות מסוג זה בצורה טכנית. צריך להבין את השאלה, אפשר גם לשרטט אותה, מה שבהחלט יכול לעזור למצוא פתרון (אבל הנבדקים לא עשו זאת).

בכלליות נמצא כי אחוז הפותרים נכון משוואות פרמטריות "יישומיות" הוא נמוך מאחוז הפותרים משוואות פרמטריות "פשוטות". נוסף על כך, אחוז הנבדקים שלא השיבו כלל על המשוואות "היישומיות" הוא גבוה.

לסיכום, מחקר זה בדק את היכולת של תלמידי תיכון ופרחי הוראה לפתור ולהבין משוואות פרמטריות. נמצא שהקשיים של הנבדקים בפתרון משוואות פרמטריות נובעים כנראה מכך שהם עובדים בצורה טכנית, וחסרה להם ההבנה המושגית של משמעות פתרון המשוואה. הם לא מתעמקים במשמעות המשוואה ופתרונה, אלא ניגשים אוטומטית לפתור בלי לזהות את האות שצריך להביע ואת סוג המשוואה.

ממחקר זה אפשר ללמוד שמספר גורמים משפיעים על פתירת משוואות פרמטריות: האות שצריך להביע, הסידור של המשוואה וסוג המשוואה (פשוטה או יישומית).

הממצאים מלמדים על כך שבפתרון משוואות פרמטריות שוגים גם בשגיאות שבהן שוגים במשוואות בלי פרמטרים, כמו שגיאות חישוב, צמצום, העברה מאגף לאגף, תחום ההגדרה ועוד. נוסף לכך יש שגיאות ייחודיות למשוואות פרמטריות הקשורות לאותיות.

בדרך כלל משוואות עם פרמטרים קשות יותר לפתרון ממשוואות שאינן מכילות פרמטרים. זאת מאחר שבמשוואה עם פרמטרים ההתמודדות עם תהליך הפתרון כוללת גם את השלבים של פתרון משוואה רגילה נוסף להתמודדות עם הפרמטר, מה שמקשה על התהליך. חלק גדול מהנבדקים ניגשים לפתור את המשוואות הפרמטריות בצורה "אוטומטית" ואינם מפעילים שיקול דעת בכל שאלה. תוצאות דומות נמצאו אצל אילני ושמואלי (אילני ושמואלי, 2000; Ilany & Shmueli, 1998) שחקרו את נושא האוטומטיזם בקרב תלמידים ומורים בחטיבת ביניים.

השלכות המחקר

- מומלץ להגביר את מודעות התלמידים באמצעות שיח מתמטי לפתירת משוואות המכילות פרמטרים, לעורר דילמות, להדגיש את הדומה והשונה בין משוואות בלי פרמטרים למשוואות עם פרמטרים. כמו למשל, יש לשים לב לאות שצריך להביע אותה ולהקפיד על כך שלא נביע אותה באמצעות אותה אות עצמה. כמו כן רצוי לגוון את האותיות שבהן משתמשים הן כמשתנים והן כפרמטרים, מה שיגביר את הסיכוי שהתלמידים יהיו מקובעים פחות לאותיות מסוימות וירחיב את הבנת המושגים.
- כדאי שהמורים יקדישו תשומת לב מיוחדת להבהרת המושגים עצמם ולהבהרת הדומה והשונה ביניהם, ולא ילמדו אותם וישתמשו בהם רק בצורה טכנית. למשל, כאשר פותרים תרגילים שבהם משתמשים באותיות לסירוגין כמשתנה וכפרמטר, יש להבהיר לעומק את השלבים השונים, ויש להתייחס לשימושים השונים של האותיות בכל שלב: משתנה, פרמטר או קבוע. חשוב לתת שאלות מהסוג שהרכבי (Arcavi, 1994) הציע:

  נתונה הפונקציה הלינארית $y = mx + b$, x ו-y משתנים, m ו-b פרמטרים. כאשר מציבים ערכים עבור m ו-b מקבלים פונקציה מסוימת. מה קורה כאשר מציבים ערכים עבור x ו-y, למשל $2 = m3 + b$?

  שאלות כאלה מחדדות את ההבדל בין תפקידי הפרמטרים לתפקידי המשתנים.
- מומלץ להציע לתלמידים להתנסות במשוואות דומות המופיעות באותיות שונות, ברמות סידור מגוונות, הוראות שונות וחזקות למיניהן. לתלמידים מתקדמים אפשר להציע בעיות המכילות משוואות פרמטריות "יישומיות". דוגמאות מופיעות אצל אילני (1997) ואילני והסידוב (Ilany & Hassidov, 2013).

ממצאי מחקר זה מלמדים על הצורך בהעמקת תחום הידע במשוואות פרמטריות. המלצתנו היא לערוך עוד מחקרים בתחום זה מאחר שהיכולת לפתור תרגילים המכילים פרמטרים משקפת ידע עמוק במתמטיקה, והעיסוק במשוואות פרמטריות עשוי להעמיק את ההבנה המתמטית ולעזור לתלמידים במיוחד באלגברה.

רשימת מקורות

אילני, ב' (1997). **תפיסת המושגים משתנה ופרמטר אצל תלמידי חמש יחידות מתמטיקה ופרחי הוראה** (עבודת דוקטור). אוניברסיטת תל-אביב.

אילני, ב' ושמואלי, נ' (2000). "אוטומטיזם במציאת פתרון" אצל תלמידי חטיבת הביניים. **על"ה, 25**, 50-55.

פרנקל, א"ה (1942). **מבוא למתימטיקה: בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדשה** (כרך ראשון חלק ב). תל-אביב: מסדה.

Almog, N., & Ilany, B., (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 347-364.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense, informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking – The case of parameter. In J. P. Ponte &

J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88-95). Lisbon: University of Lisbon.

Bloedy-Vinner, H. (1995). Analgebraic interpretation of algebraic expressions: Functions or predicates? In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 42-49). Ressifi: University of Ressifi.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables – Parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic.

Carpenter, T. O., Corbett, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1982). Students' performance in algebra: Results from the national assessment. *School Science and Mathematics, 82*(6), 514-531.

Davis, R. B., & Henkin, L. (1978). Inadequately tested aspects of mathematics learning. In *Testing, teaching, and learning: Report of a conference on research on testing* (pp. 83-97). Washington, D.C.: National Institute of Education.

Fischbein, E., & Muzicant, B. (2002). Richard Skemp and his conception of relational and instrumental understanding: Open sentences and open phrases. In D. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Richard Skemp* (pp. 49-77). Flaxton, Queensland: Post Pressed Publishers.

Flexer, B. K. (1984). Predicting eighth-grade algebra achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 352-360.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 368-375). Lisbon: University of Lisbon.

Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Pre-service teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 95-102.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Ilany, B. (1998). *The elusive parameter. In The 23rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 265). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Ilany, B., & Hassidov, D. (2013). "Simple" & "not simple" parametric equations. In *The 37th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 70). Kiel: University of Kiel.

Ilany, B., & Hassidov, D. (2014). Solving equations with parameters. *Creative Education, 5*, 963-968.

Ilany, B., & Shmueli, N. (1998). "Automatism" in finding a "solution" among junior high school students. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 56-63). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Karsenty, R., Arcavi, A., & Hadas, N. (2007). Exploring informal products of low achievers in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour, 26*, 156-177.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27-32). Dordrecht: Springer Reference.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 361-368). Bergen, Norway: Psychology of Mathematics Education.

Sedivy, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 121-126.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(2), 121-131.

ד"ר בת-שבע אילני

עוסקת במתמטיקה ובחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים ובאוניברסיטה הפתוחה. השתתפה בכתיבה, בפיתוח, בייעוץ ובעריכה של חומרים וספרים המיועדים לגיל הרך, לבית-הספר ולהכשרת מורים למתמטיקה ואשר עוסקים בנושאים מגוונים. ביניהם הספרים: יחס ופרופורציה - מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה; פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך: תאוריה, מחקר ומעשה בהכשרת מורים; שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות.

ד"ר דינה חסידוב

בוגרת אוניברסיטת חיפה (בשלושת התארים). חברת סגל בכיר במכללה האקדמית גליל מערבי, עד לאחרונה. מחקריה עוסקים בתפיסות שגויות של מורים וגננות בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובקדם יסודי ובמדידת הישגים בחשבון והערכתם בקרב תלמידים ביסודי ובגן הילדים. עוסקת בהכשרת מורים ומנחות להוראת מתמטיקה בגני ילדים, בשילוב טכנולוגיות חינוכיות בהוראה ולמידת מתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים ובשילוב טכנולוגיות חינוכיות בהשכלה הגבוהה.