התפתחות בעיית חקר המשלבת בין בניות הנדסיות ובין התכונות המיוחדות של הצורות המתקבלות

ויקטור אוקסמן, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; מכללת הגליל המערבי, עכו
משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; האקדמית גורדון, חיפה

הקדמה

יש בבניות ההנדסיות, פרט להיותן אמצעי להכנת צורות שונות, הזדמנות ליישום של ידע ומשפטים שנרכשו במהלך הלימוד של גאומטריה אוקלידית. יש בעיות הנדסיות שמבחינת הקושי שלהן, משמשות אתגר למתמודד עמן ועל כן מחייבות חשיבה יצירתית ומציאת דרכי פתרון בלתי שגרתיות התורמות לפיתוח החשיבה.

בקורס אקדמי של פרחי הוראה למתמטיקה, שחלקו עסק בבניות הנדסיות, החל מהשימוש בכלי הבנייה המסורתיים: סרגל ומחוגה, וכלה בבניות הנדסיות המבוצעות בעזרת תכנת גאומטריה דינמית, נתבקשו הסטודנטים להתמודד עם חקר הצורות המתקבלות מתוך ביצוע שינויים בנתוני המשימה. כשבחקר התקבלה תכונה מסוימת בצורה שנבנתה, נדרשה הוכחה פורמלית מושלמת לנכונותה.

משימה א׳ - בנייה כלפי חוץ של משולשים שווי-צלעות על צלעותיו של משולש כלשהו

משימת החקר הראשונה הייתה בניית משולשים שווי-צלעות כלפי חוץ על צלעות של משולש כלשהו, ומציאת המרכז של כל אחד מהם על סמך בנייתם (מפגש תיכונים, או חוצי-זוויות או גבהים או אנכים אמצעיים כי מדובר במשולש שווה-צלעות שבו נקודות אלו מתלכדות). עם חיבור שלושת המרכזים, נתבקשו הסטודנטים לקבוע את סוג המשולש שהתקבל.

כיוון שכל סטודנט בנה לבדו משולש מקורי בעל צלעות באורך שונה מזה של עמיתו, ההפתעה הייתה שאצל כל אחד מהם התקבל שמשולש המרכזים הוא משולש שווה-צלעות.

בשלב זה הוצגה הבנייה על ידי יישומון של גאוג'ברה, והובלטה בבירור התכונה של משולש המרכזים. גרירת קדקוד המשולש המקורי שינתה את גודלו של המשולש והדגימה את העובדה שעבור כל משולש, משולש המרכזים שמתקבל הוא שווה-צלעות.

תכונה זו נקראת **משפט נפוליון** (Coxeter, 1969; Coxeter & Greitzer, 1967; Eddy & Fritsch, 1994; Pappas, 1989, p. 57), והיא מיוחסת לקיסר צרפת נפוליון בונפרטה (1769-1821).

שימוש ביישומון דינמי 1: אפשר לגרור את קדקודי המשולש המקורי ולראות שעבור כל משולש מתקבל שמשולש המרכזים ΔKLM הוא משולש שווה צלעות.

Link 1: https://www.geogebra.org/m/X6bHWTr9

כעת נדרשו הסטודנטים למצוא הוכחה מתמטית לתוצאה שהתקבלה, בכל דרך שיחפצו.

לרוב הבעיה עצמה אינה מוכרת, וההוכחה שלה מחייבת שליטה בכלים מתמטיים שונים.

מבין ההוכחות שמצאנו, תוצג כאן הוכחה המשתמשת בכלים טריגונומטריים, החל ממשפט הקוסינוסים וכלה בזהויות טריגונומטריות.

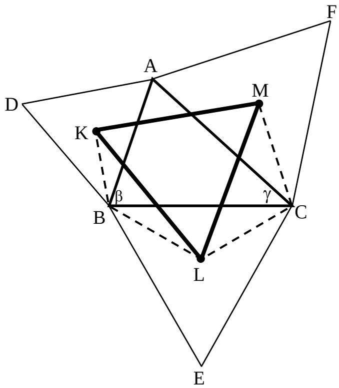
הוכחה של משפט נפוליון - קבלת משולש שווה-צלעות

המשולש המקורי הוא ΔABC וצלעותיו הן: a, b, c.

שלושת המשולשים השווי-צלעות הם:

ΔCAF , ΔCBE ו-ΔABD, ומרכזיהם בהתאמה הם M,

L ו-K, כפי שנראה באיור 1.



איור 1

לפי שהנקודות L ו-K הם מרכזי המשולשים, נובע:

$$\angle CBL=\angle ABK=30^\circ \ , \ BL=\frac{a}{\sqrt{3}} \ , \ BK=\frac{c}{\sqrt{3}} \ , \ CM=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש BKL מקבלים: איור 1

$$KL^2 = BK^2 + BL^2 - 2\cdot BK\cdot BL\cdot\cos(\beta+60^\circ) = \frac{c^2}{3}+\frac{a^2}{3}-\frac{2ac}{3}\cdot\cos(\beta+60^\circ)$$

בדומה לכך, על פי משולש CML מקבלים:

$$ML^2 = \frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}\cdot\cos(\gamma+60^\circ)$$

יש להוכיח כי $KL^2 = ML^2$.

נשאר להוכיח את השוויון: $c^2 - 2ac\cdot\cos(\beta+60^\circ) = b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma+60^\circ)$

או: $c^2 - b^2 = 2a[c\cdot\cos(\beta+60^\circ) - b\cdot\cos(\gamma+60^\circ)]$

על ידי שימוש במשפט הסינוסים מקבלים: $a = 2R\sin\alpha \ , \ b = 2R\sin\beta \ , \ c = 2R\sin\gamma$

יש להוכיח את השוויון הבא:

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta = 2\sin\alpha[\sin\gamma\cdot\cos(\beta+60^\circ) - \sin\beta\cdot\cos(\gamma+60^\circ)]$$

על ידי שימוש בזהות טריגונומטריות, ידוע כי: $\sin^2\gamma - \sin^2\beta = \sin(\gamma+\beta)\cdot\sin(\gamma-\beta)$

ועל ידי שימוש בזהות במשולש: $\sin\alpha = \sin(\gamma+\beta)$

נשאר להוכיח כי: $\sin(\gamma-\beta)=2[\sin\gamma\cdot\cos(\beta+60°)-\sin\beta\cdot\cos(\gamma+60°)]$

מטפלים באגף ימין על ידי שימוש בנוסחת המעבר ממכפלה לסכום ומקבלים:

$$2\cdot\frac{1}{2}[\sin(\gamma+\beta+60°)+\sin(\gamma-\beta-60°)-\sin(\beta+\gamma+60°)-\sin(\beta-\gamma-60°)]=$$

$$=\sin(\gamma-\beta-60°)-\sin(\beta-\gamma-60°)=2\sin(\gamma-\beta)\cdot\cos(-60°)=\sin(\gamma-\beta)$$

כלומר הוכחנו: KL=LM

בדומה מוכיחים ש- KL=KM ועל-כן המשולש KLM הוא משולש שווה-צלעות.

הערות:

1. ניתן להוכיח כי המשפט נכון גם עבור המקרה שבונים את המשולשים שווי-הצלעות כלפי פנים.
2. שטחו של המשולש המקורי שווה להפרש שבין שטח משולש המרכזים כשהמשולשים נבנים כלפי חוץ ובין שטח משולש המרכזים כשהמשולשים נבנים כלפי פנים.

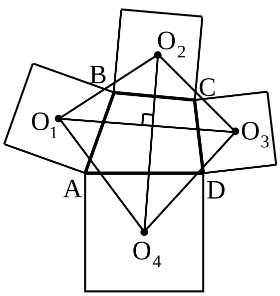
התוצאה המפתיעה של משימת בניית המשולשים עוררה את השאלה האם אפשר להגיע להכללה מהסוג להלן:

כאשר בונים כלפי חוץ על צלעותיו של מצולע כלשהו, בעל n צלעות, מצולעים משוכללים כל אחד בעל n צלעות, האם מרכזיהם ישמשו קדקודים של מצולע משוכלל?

לשם מטרה זו נתבקשו הסטודנטים לבצע משימות המשך.

משימת המשך

על צלעותיו של מרובע כלשהו יש לבנות בעזרת סרגל ומחוגה ריבועים כלפי חוץ, לחבר את מרכזיהם, ולהסיק מסקנה באשר לצורתו של מרובע המרכזים (ראה איור 2).



איור 2

השאלה הייתה, האם צורתו של מרובע המרכזים הוא ריבוע? הבנייה הראתה שמרובע המרכזים אינו ריבוע.

בשלב זה נשאלו הסטודנטים האם המסקנה האחרונה נכונה גם למרובעים מיוחדים, כגון ריבוע, מלבן, מעוין, מקבילית, דלתון, דלתון קעור, טרפז שווה-שוקיים, טרפז ישר-זווית.

כמו כן, הם התבקשו להתייחס לאורכי אלכסוני מרובע המרכזים והזווית שביניהם.

הבניות של המרובעים המיוחדים הניבו תשובות מעניינות:

- עבור מקבילית מתקבל שמרובע המרכזים הוא ריבוע.

  לכן גם עבור ריבוע, מלבן ומעוין, מרובע המרכזים הוא ריבוע.

- עבור טרפז שווה-שוקיים מתקבל דלתון.

- עבור דלתון (כולל דלתון קעור) מתקבל טרפז שווה-שוקיים.

בשלב זה כשההתפעמות מהתכונה המרהיבה רבה, נאמר לסטודנטים שמדובר במשפט ידוע של המתמטיקאי הדגול ואן האובל שפורסם לראשונה ב-1878: **Van Aubel's theorem** (de Villiers, 1998; Wells, 1991, p. 11; Yaglom, pp. 95-96).

הסטודנטים נדרשו להוכיח בדרך גאומטרית שאכן מתקבלות הצורות לעיל, ולחשב את אורך הצלע של מרובע המרכזים עבור מקבילית. נתקבלו ההוכחות הגאומטריות בלא קשיים מיוחדים, ועבור מקבילית בעלת צלעות באורך a ו- b וזווית חדה α, מתקבל שאורך הצלע של ריבוע המרכזים הוא:

$$t=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+ab\sin\alpha}$$

עבור מלבן בעל צלעות באורך a ו-b, אורך הצלע של ריבוע המרכזים הוא: $t=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

עבור מעוין בעל צלע באורך a וזווית חדה α , אורך צלע ריבוע המרכזים הוא: $t=a\sqrt{1+\sin\alpha}$

עבור ריבוע בעל צלע באורך a, אורך צלע ריבוע המרכזים הוא: $t=a\sqrt{2}$

באשר לשאלה על אלכסוני מרובע המרכזים, נמצא שהם שווים ומאונכים.

שימוש בתכנה דינמית

כדי להמחיש באופן דינמי את השינוי המתקבל בצורתו של מרובע המרכזים, הוכן יישום דינמי של הבנייה בעזרת Geogebra.

שימוש ביישומון דינמי 2: היישומון מאפשר חקר דינמי של משפט ואן-האובל.

Link 2: https://www.geogebra.org/m/Zv4ygDaz

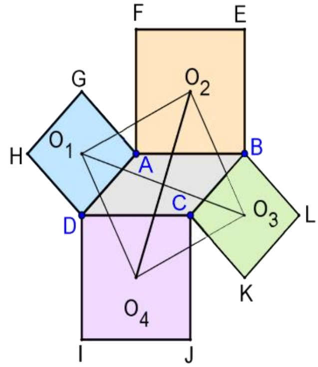
בעזרת היישום אפשר לגרור את כל אחד מארבעת הקדקודים של המרובע המקורי ולראות את השפעת שינוי צורתו על צורת מרובע המרכזים. בכל מצב, אורכי צלעות המרובע המקורי, אורכי אלכסוני מרובע המרכזים וכן הזווית ביניהם ($90°$) מופיעים על דף השרטוט של היישום.

רשת הקווים המופיעה על המסך של יישומון דינמי 2 כרקע למישור השרטוט מאפשרת בניית מרובעים מיוחדים.

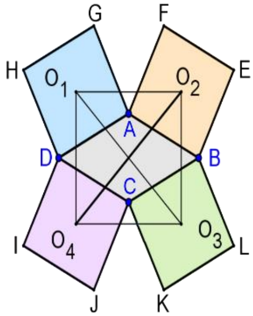
בשונה מהשימוש בכלי השרטוט המסורתיים, בעזרת התכנה הדינמית אפשר להדגים בלי קושי את הבנייה עבור מרובע מקורי קמור או קעור, ולראות שגם במקרים אלו נשמרות התכונות של אלכסוני מרובע המרכזים.

כמו כן, גם במקרה של ניוון המרובע המקורי למשולש.

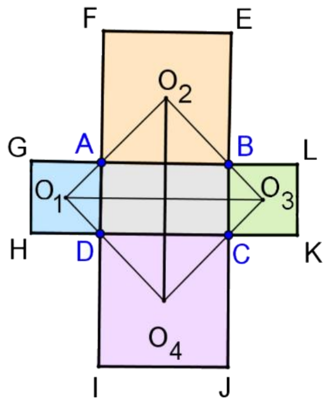
להלן צורות מרהיבות שהתקבלו למרובע המרכזים עבור מקרים מיוחדים על ידי שימוש בתכנה גאומטרית דינמית.



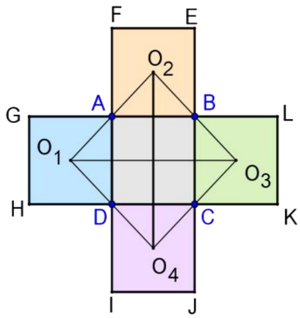
איור 3



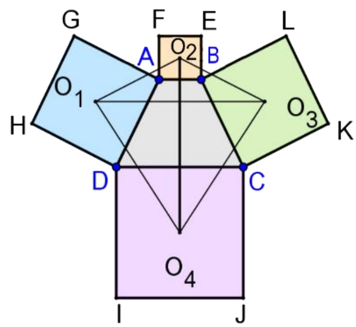
איור 4



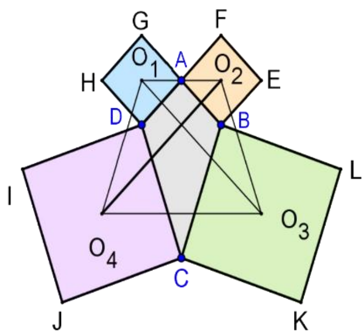
איור 5



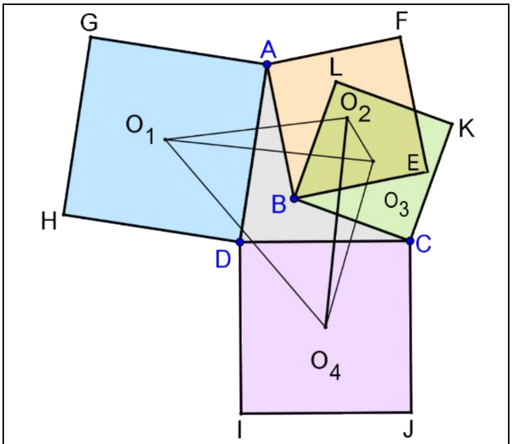
איור 6



איור 7



איור 8



איור 9

יופייה של המתמטיקה מתגלה כאשר מתבררים השימור והשינוי הבאים:

כאשר ABCD מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע – מרובע המרכזים הוא ריבוע.

כאשר ABCD טרפז שווה-שוקיים – מרובע המרכזים הוא דלתון.

כאשר ABCD דלתון – מרובע המרכזים הוא טרפז שווה-שוקיים.

צורות ייחודיות אלו נראות באיורים 3-8.

התכונות $O_1O_3 \perp O_2O_4$ ו- $O_1O_3 = O_2O_4$ נשמרות גם כאשר המרובע ABCD הוא קעור (ראה איור 9).

כמו כן, התכונות לעיל מתקיימות כאשר הריבועים נבנים כלפי פנים.

הוכחת משימת מרובע הריבועים

כפי שכבר צוין, ההשראה לחקירת בעיית מרובע הריבועים הייתה בעיית בניית המשולשים, שהניבה תוצאה מפתיעה של קבלת משולש שווה-צלעות.

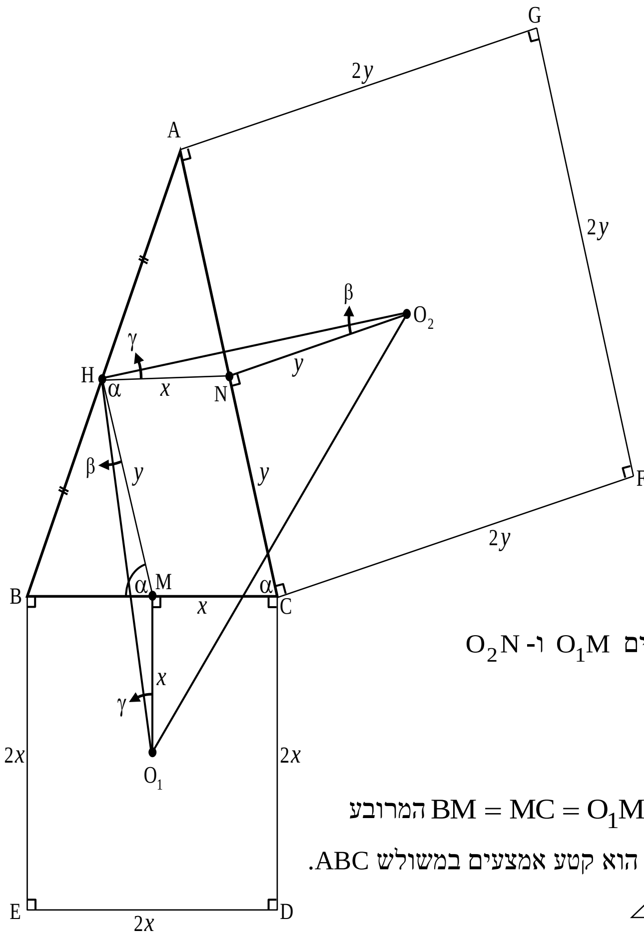
כיוון שהבעיה לא הייתה מוכרת, היא נחקרה תחילה על ידי בנייה בכלים מסורתיים ולאחר מכן על ידי שימוש בתכנה גאומטרית דינמית. התכנה הדינמית אפשרה לשנות באופן שוטף את אורכי צלעות המרובע ולמעשה שימשה סמן בולט למציאת התכונה המרכזית של מרובע המרכזים – אלכסונים שווים באורכם וניצבים זה לזה. חשוב לציין שגם לאחר שהתכנה הדינמית הציגה את אורכי האלכסונים והזווית ביניהם והתבררה התכונה, הרי שאין להסתפק בכך ולראות בזאת כהוכחה לנכונות התכונה. ייתכן מצב שעבור בחירת אורכי צלעות מסוימות התכונה לא תתקיים. במאמרים קודמים (סטופל ובן-חיים, 2014, עמ' 97; Stupel & Ben-Chaim, 2013a), הודגש שהתוצאה הנראית מהשימוש בכלי הטכנולוגי הממוחשב, היא לכל היותר יכולה להיחשב כ"הוכחה למחצה", וחייבת להינתן הוכחה מתמטית פורמלית כמקובל.

לאחר חיפוש הבעיה במקורות רבים (ספרים ומאמרים), היא נמצאה בספרו של ויקטור פרסולוב

(ברוסית) שאף מביא הוכחה לתכנה המיוחדת של מרובע המרכזים תוך שימוש בכלי של סופרפוזיציה של סיבובים. תלמידים ואף מורים רבים אינם מיומנים בשימוש בפעולת סיבוב להוכחת בעיות גאומטריות, ובפרט שעבור הבעיה המוצגת, פעולת הסיבוב מקשה על הבנת הפתרון בשל הגדלת צפיפות הקווים שבאיור.

מסיבה זו מוצגות במאמר שתי הוכחות שונות למשימה, בכלים מתמטיים שתלמידי תיכון יכולים להשתמש בהם כי יש להם את הידע והמיומנות המתאימים. בהזדמנות זו הוכחו משפטי עזר ונעשה שימוש במשפט הקוסינוסים למרובע, דבר המוסיף ידע לתלמידים. הוכחות בדרכים שונות מבליטות את יופייה של המתמטיקה וכתחום המשלב ענפים רבים (סטופל ובן-חיים, 2014, עמ' 97; Stupel & Ben-Chaim, 2013a, 2013b).

הוכחה בדרך גאומטרית שאלכסוני מרובע המרכזים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה



איור 10

בשלב המקדים להוכחה, יינתן משפט עזר.

משפט עזר

נתון משולש כלשהו ABC, שעל שתיים מצלעותיו בונים כלפי חוץ ריבועים.

תהא הנקודה H אמצע הצלע AB, ו- O_1 ו- O_2 מרכזי הריבועים BCDE ו-ACFG בהתאמה, כנראה באיור 10.

מסמנים את אורכי צלעות הריבועים BCDE ו-ACFG ב- $2x$ ו- $2y$ בהתאמה.

מהנקודות O_1 ו- O_2 מורידים אנכים O_1M ו- O_2N לצלעות המשולש.

מתקבל:

$BM = MC = O_1M = x$, $AN = NC = O_2N = y$

המרובע HNCM הוא מקבילית, והקטע HN הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

$\angle NCB = \angle HMB = \angle NHM = \alpha$

המשולשים ΔO_1MH ו- ΔO_2NH חופפים לפי צ.ז.צ.

מהחפיפה נובע: $HO_1 = HO_2$, כלומר המשולש ΔO_1HO_2 הוא משולש שווה-שוקיים.

מהחפיפה נובע גם:

$\angle O_2HN = \angle HO_1M = \gamma$, $\angle HO_2N = \angle O_1HM = \beta$ על פי סכום זוויות במשולש ΔHO_1M מתקבל: $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, ולכן $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$

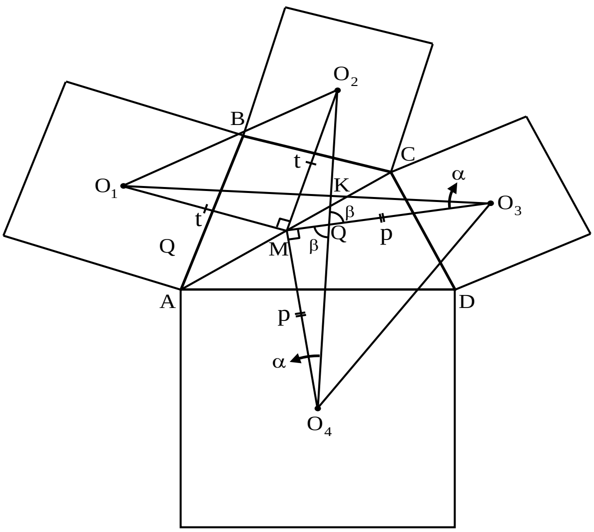
ההוכחה של תכונת אלכסוני מרובע המרכזים

מעבירים את האלכסון AC במרובע ABCD ומסמנים את נקודת האמצע שלו ב- M.

מחברים את הנקודה M עם מרכזי הריבועים ומתקבלים שני משולשים: ΔO_1MO_2 ו- ΔO_3MO_4 (כנראה באיור 11), שהם משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים, כפי שהוכח במשפט העזר.

מסמנים: $MO_3 = MO_4 = p$, $MO_1 = MO_2 = t$ (ראה איור 11).

מכאן נובע שהמשולשים ΔO_1MO_3 ו- ΔO_2MO_4 חופפים לפי צ.ז.צ.



איור 11

מהחפיפה נובע: $O_1O_3 = O_2O_4$

מסמנים ב- K את נקודת החיתוך של אלכסוני מרובע המרכזים (לא בהכרח נמצאת על האלכסון AC), ומסמנים ב- Q את נקודת החיתוך של MO_3 ו- O_2O_4 .

מחפיפת המשולשים נובע גם כי:

$\angle O_1O_3M = \angle O_2O_4M = \alpha$, ובעזרת הזוויות הקדקודיות: $\angle O_4QM = \angle O_2QO_3 = \beta$

מתקבל ש- $\angle O_1KO_4 = 90^\circ$.

בשלב זה אפשר גם לחשב את ריבוע אורכי צלעות מרובע המרכזים:

$$O_1O_2{}^2 = 2t^2$$

$$O_3O_4{}^2 = 2p^2$$

$$O_1O_4{}^2 = t^2 + p^2 - 2tp \cdot \cos\angle O_1MO_4$$

$$O_2O_3{}^2 = t^2 + p^2 - 2tp \cdot \cos\angle O_2MO_3$$

כיוון ש- $\angle O_1MO_4 + \angle O_2MO_3 = 180°$

מקבלים: $O_2O_3{}^2 = t^2 + p^2 + 2tp \cdot \cos\angle O_1MO_4$

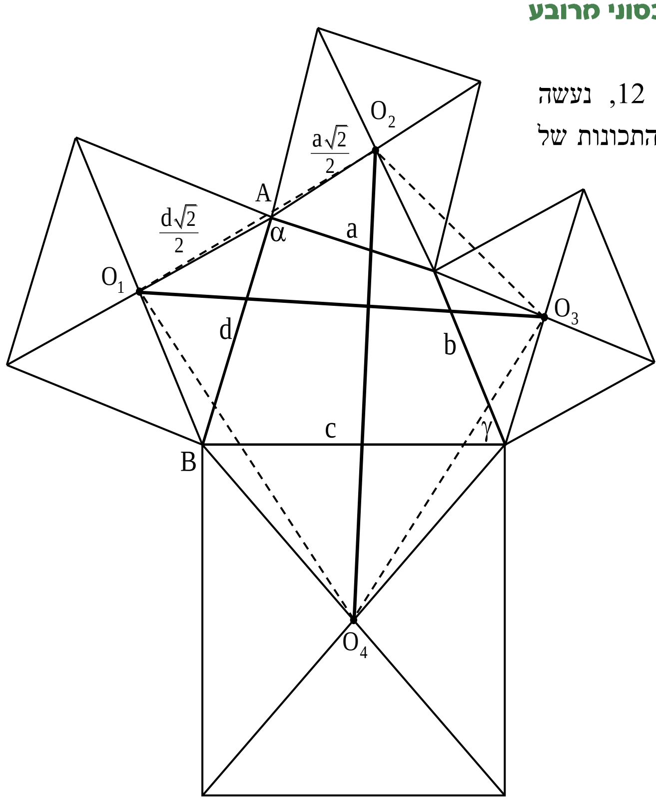
מכאן מתקבל שוויון של סכום ריבועי צלעות נגדיות: $O_1O_2{}^2 + O_3O_4{}^2 = O_1O_4{}^2 + O_2O_3{}^2$

וכפי שהוכח מקודם, זהו התנאי לכך שאלכסוני מרובע המרכזים מאונכים זה לזה.

זוהי הוכחה נוספת לתכונה של מרובע המרכזים.

הוכחה בדרך טריגונומטרית שאלכסוני מרובע המרכזים מאונכים זה לזה

בהתאם לסימונים המופיעים באיור 12, נעשה שימוש במשפט הקוסינוסים להוכחת התכונות של מרובע המרכזים.



על פי משפט הקוסינוסים במשולש ΔO_1AO_2 מקבלים:

$$(O_1O_2)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} - ad\cdot\cos(90°+\alpha) = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} + ad\cdot\sin\alpha =$$

$$(O_1O_2)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 + 2ad\sin\alpha) = \frac{1}{2}(a^2 + d^2 + 4\cdot S_{\Delta ADB})$$

באותו אופן מקבלים: $(O_3O_4)^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + 4\cdot S_{\Delta BDC})$ כאשר נעשה שימוש בקשרים:

$\angle O_3CO_4 = 360° - (90°+\gamma) = 270° - \gamma$, $\cos(270°-\gamma) = -\sin\gamma$ מכאן:

$$(O_1O_2)^2 + (O_3O_4)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d) + 2\cdot S_{ABCD}$$

מכאן סכום ריבועי זוג צלעות נגדיות שווה לסכום ריבועי זוג הצלעות הנגדיות האחרות, ועל-כן האלכסונים מאונכים זה לזה.

כשמחברים את ריבועי אורכי כל הצלעות של מרובע המרכזים, מקבלים:

$$O_1O_2{}^2 + O_2O_3{}^2 + O_3O_4{}^2 + O_4O_1{}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4\cdot S_{ABCD}$$

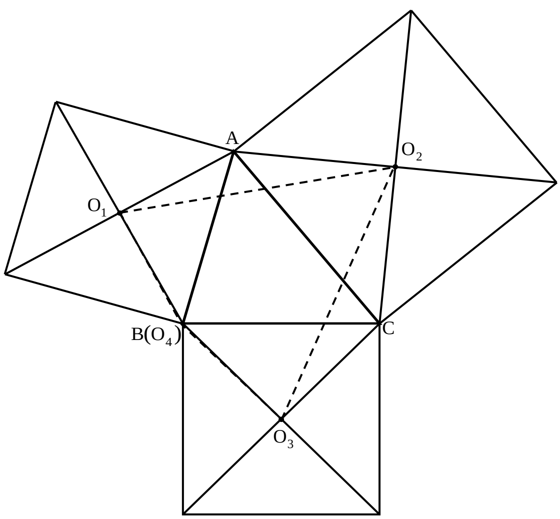
כיוון ששטח המרובע הוא ביטוי חיובי, הרי שעבור כל מרובע מקורי מתקיים:

$$O_1O_2{}^2 + O_2O_3{}^2 + O_3O_4{}^2 + O_4O_1{}^2 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

שוויון יתקיים רק כאשר המרובע המקורי מתנוון לקטע של קו ישר.

הערה מתודית

כפי שרואים ההוכחה של משפט ואן האובל למרובע כללי מחייבת מיומנות הוכחה ברמה גבוהה. אולם עבור המקרים המיוחדים המתוארים באיורים 8-3 ההוכחה של המשפט עבור מקרים אלו היא משימה אפשרית עבור תלמידי העל-יסודי הלומדים מתמטיקה ברמה מוגברת.



איור 13

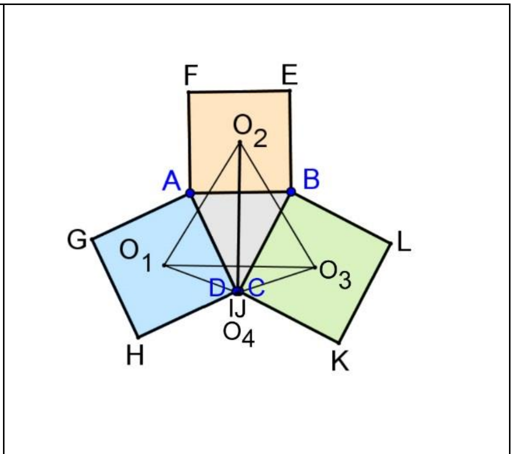
משפט ואן-האובל למקרים של ניוון המרובע

כאשר המרובע ABCD מתנוון למשולש ΔABC כנראה באיור 13, האלכסונים O_1O_3 ו-O_2O_4 נותרים מאונכים, וההוכחה לכך מתקבלת באותה דרך

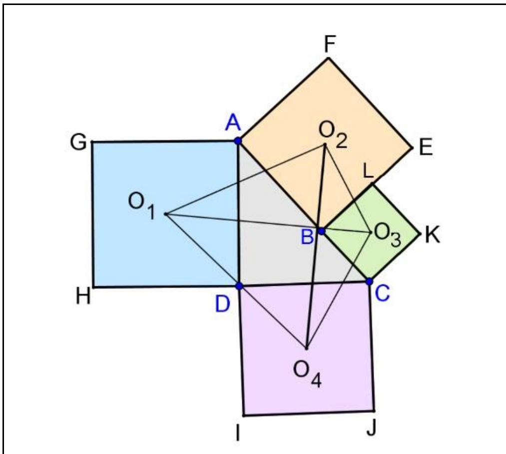
שהובאה ההוכחה למקרה הריבוע. אפשר להמשיך ולנוון את המרובע ממשולש לשני קטעים עם נקודה משותפת ואף לקו אחד שבו שני ריבועים מצד אחד של הקטע ושני ריבועים מצדו האחר. או שלושה ריבועים מצד אחד ושלושה מצדו האחר. גם למקרים אלו מתקיים משפט ואן האובל (Oxman, & Stupel, 2015).

הערה: ההוכחה של תכונות משפט ואן-האובל למקרה שהמרובע מתנוון לקטע, ניתנת להשגה בקלות על ידי מיקום הקטע על ציר ה x- באופן שקצה אחד שלו בראשית הצירים.

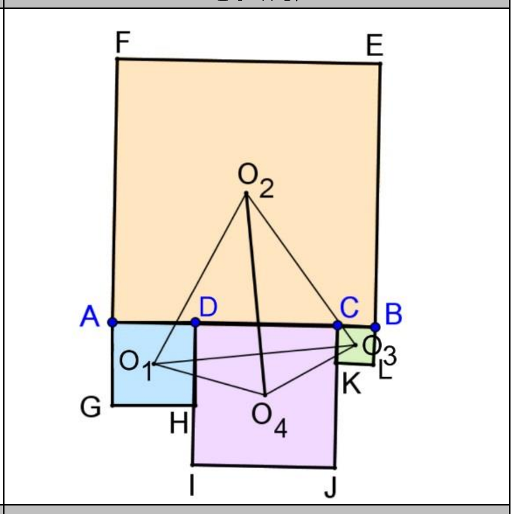
איורים 14-17 מתארים את משפט ואן-האובל למקרים שבהם המרובע התנוון למשולש או לקטע.



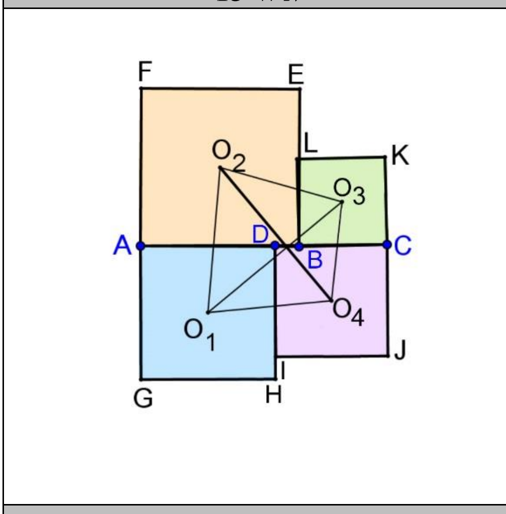
איור 14



איור 15



איור 16



איור 17

סיכום

המאמר מסכם פעילות חקר של שני משפטים בגאומטריה: **משפט נפוליון ומשפט ואן-האובל**, שאינם מוכרים לפרחי ההוראה במתמטיקה ובוודאי שלא לתלמידי החינוך העל-יסודי. המשפטים מרהיבים בתכונות **השימור** שלהם. פעילות זו לוותה בהצגת הוכחות למשפטים ובחקר התכונות על ידי שימוש בסביבה גאומטרית דינמית.

רשימת מקורות

סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון: ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. **כתב עת למחקר ועיון בחינוך מתמטי**, **1**, 80-107.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2nd ed.). New York: Wiley.

Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Eddy, R. H., & Fritsch, R. (1994). The conics of Ludwig Kiepert: A comprehensive lesson in the geometry of the triangle. *Mathematics Magazine*, *67*, 188-205.

Oxman, V., & Stupel, M. (2015). An elegant special cases of Van Aubel's Theorem. *The Mathematical Gazette*, *99*(545), 256-262.

Pappas, T. (1989). *The joy of mathematics.* San Carlos, CA: Wide World Pub./Tetra.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013a). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, *11*(2), 129-161.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013b). Plane geometry and trigonometry - Related fields: Do they work hand in hand? *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(1), 43-74.

de Villiers, M. (1998). Dual Generalizations of Van Aubel's theorem. *The Mathematical Gazette, 82*, 405-412.

Wells, D. (1991). *The penguin dictionary of curious and interesting geometry*. London: Penguin Books.

Yaglom, I. M. (1962). *Geometric transformations* (A. Shields, Trans., Vol. 1). New York: Random House.

ד"ר ויקטור אוקסמן

תחום התמחות - מתמטיקה וחינוך מתמטי (Ph.D.).
פרסם מאמרים רבים בתחום הנ"ל בכתבי עת בארץ ובחו"ל. לאחרונה עוסק במחקר בגאומטריה דינמית ובדרכי שילוב תוכנות דינמיות בהוראת גאומטריה.

פרופ' משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.
מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים.
פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחו"ל.
עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה.

בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.