

לקט תכונות גאומטריות מעניינות בליווי הוכחות המאפשרות ביצוע

חקר תוך הצגת שימור

רות סגל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה;

אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון

אבי סיגלר, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה

משה סטופל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, חיפה; האקדמית גורדון, חיפה

הקדמה

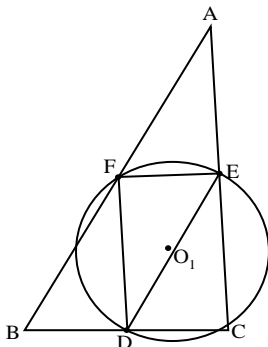
החל מהגיליון השלישי של כתב העת למחקר ועיון בחינוך מתמטי (ינואר 2016), נעשה מאמץ שבכל גיליון יופיע מדור שעוסק במשפטים ובעיות גאומטריות מעניינות המציגות תכונות מיוחדות, ורובן לא מוכרות לעוסקים בחינוך מתמטי ובעיקר לפרחי ההוראה. מאחר שהמשפטים, הבעיות והתכונות מבליטים את יופייה ואת עושרה של המתמטיקה, תובאנה ההוכחות המתמטיות הנדרשות וכן תינתן התייחסות לחקר התכונות בעזרת תכנה גאומטרית ממוחשבת.

במאמר הנוכחי מוצגות תשע משימות שונות, ולמשימה האחרונה שבהן מובאות ארבע הוכחות שונות כדי להדגיש שהמתמטיקה בנויה מענפים שונים המשתלבים זה בזה. חשוב להדגיש כי משפט או תכונה גאומטרית מייצגים תכונת שימור. כל אחת מהמשימות מייצגת לפחות תכונת שימור אחת (סטופל וחריר, 2005; Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2017).

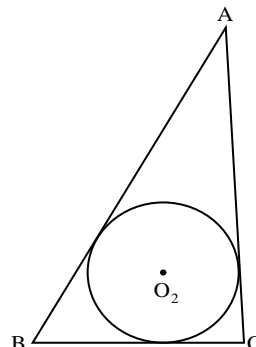
חשימה א'

האם מעגל אוילר והמעגל החסום במשולש נחתכים, משיקים, או זרים זה לזה?

במאמרם של סיגלר וסטופל (2016) הופיעה הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים" לאי-השוויון של אוילר: $R \geq 2r$ – הקשר שבין הרדיוס R של המעגל החסום משולש לרדיוס r של המעגל החסום בו.



איור 1



איור 2

באיור שהופיע במאמרם של סיגלר וסטופל (2016, עמ' 151), נראה מעגל O_2 משיק מבפנים למעגל O_1 והקורא מתלבט בשאלה האם זה מקרי, או שתכונה זו קיימת תמיד. שאלה זו נבדקה בעזרת יישומון ג'אוג'ברה עם גרירת קדקודי המשולש ΔABC , ונראה שאכן המעגלים תמיד משיקים זה לזה, ומיקום נקודת ההשקה משתנה עם גרירת קדקודי המשולש.

עובדה זו סקרנה אותנו מאוד, בייחוד כשידוע ששימוש בתכנה דינמית הוא לכל היותר "הוכחה למחצה" (סטופל ובן-חיים, 2014; Stupel & Ben-Chaim, 2013), ועל כן נעשה מאמץ להוכיח אותה באופן פורמלי כמקובל בהוכחה מתמטית.

כהקדמה להוכחה, יוצג **מעגל תשע הנקודות** (Coxeter & Greitzer, 1967, pp. 20-21), הן כהעשרה והן כבסיס המסייע להוכחה.

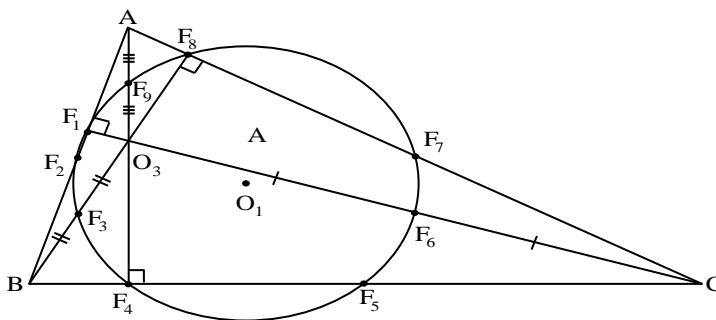
מעגל **תשע הנקודות** נקרא בשם "**מעגל אוילר**" או "**מעגל פיירבך**", העובר במשולש כלשהו דרך תשע הנקודות האלה:
שלושת אמצעי הצלעות.

שלושת עקבי הגבהים, כלומר הנקודות שבהן הגבהים נפגשים עם הצלעות.

שלושת אמצעי הקטעים המחברים בין קדקודי המשולש לנקודת מפגש הגבהים.

מעגל תשע הנקודות עבור משולש כלשהו ΔABC נראה באיור 3. תשע הנקודות הן:

$$F_2, F_5, F_7, F_1, F_4, F_8, F_3, F_6, F_9$$



איור 3

חשוב לציין שמרכז מעגל תשע הנקודות נמצא על "ישר אוילר", שעובר דרך נקודת מפגש התיכונים, מפגש הגבהים ומפגש האנכים האמצעיים. אורכו של רדיוס מעגל תשע הנקודות

שווה למחצית אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔABC , היות שהמשולש ΔFED שקדקודיו הם אמצעי הצלעות של המשולש ΔABC (ראה איור 1) דומה למשולש ΔABC עם יחס דמיון של 1:2.

הוכחה

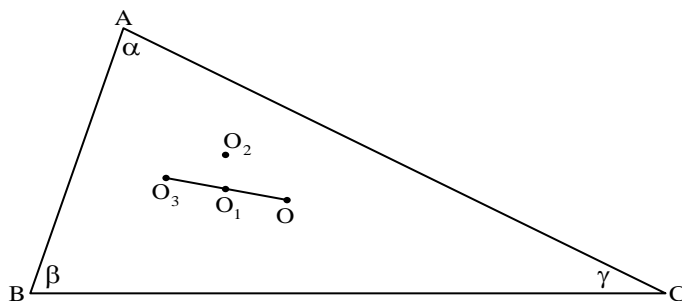
מסמנים את זוויות המשולש ΔABC ב- α, β, γ (כנראה באיור 4).
מסמנים את מרכזי המעגלים:

O_1 – מרכז המעגל החוסם את משולש ΔDEF (מרכז מעגל תשע הנקודות של אוילר).

O_2 – מרכז המעגל החוסם במשולש ΔABC ורדיוסו r .

O_3 – נקודת מפגש הגבהים במשולש ΔABC .

O – מרכז המעגל החוסם את משולש ΔABC ורדיוסו R .



איור 4

כפי שנראה באיור 4.

לפי גראס (Gras, 2014) ידוע כי: $(OO_3)^2 = R^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$ (1)

ידועה נוסחת אוילר (שם): $(OO_2)^2 = R(R - 2r)$ (2)

ידועה נוסחת המרחק בין נקודת מפגש הגבהים למרכז המעגל החוסם (שם):

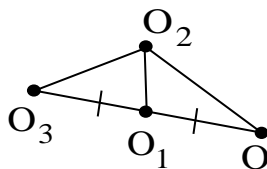
$(O_2O_3)^2 = 2r^2 - 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (3)

כמו כן ידוע, שמרכז מעגל אוילר הוא נקודת אמצע הקטע המחבר את מרכז המעגל החוסם ונקודת פגישת הגבהים (Coxeter & Greitzer, 1967, pp. 20-21), כנראה באיור 5.

על כן, המרחק בין מרכז מעגל אוילר למרכז המעגל החוסם במשולש ΔABC הוא O_1O_2 , או במילים אחרות, אורך התיכון

במשולש ΔO_2O_3O .

שימוש בנוסחה המבוססת על כך שסכום ריבועי אורכי אלכסוני



איור 5

מקבילית שווה לסכום ריבועי אורכי צלעותיה, מאפשר פיתוח נוסחה לחישוב אורך תיכון במשולש על-פי אורכי צלעותיו:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

על פי נוסחה זו: $(O_1O_2)^2 = \frac{2(OO_2)^2 - 2(O_2O_3)^2 - (OO_3)^2}{4}$

עם הצבת הערכים של $(OO_2)^2$, $(OO_3)^2$, $(O_2O_3)^2$ כפי שמופיעים ב-(1), (2), (3) מקבלים:

$$(O_1O_2)^2 = \frac{R^2 - 4Rr + 4r^2}{4} = \left(\frac{R - 2r}{2}\right)^2$$

מכאן ש- $O_1O_2 = \frac{R}{2} - r$.

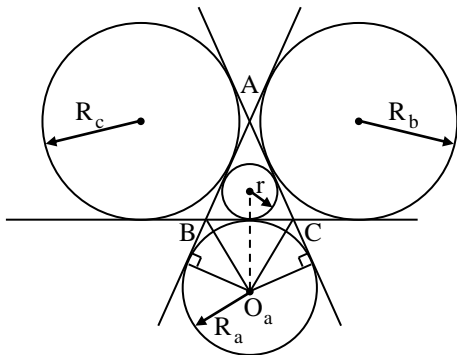
המסקנה מתוצאה זו היא, שהמרחק בין מרכז מעגל אוילר למרכז המעגל החסום שווה להפרש הרדיוסים שלהם, ולכן הם משיקים מבפנים.

שימוש ביישומון דינמי 1: מצורף קישור ליישומון ג'אוג'ברה המאפשר לראות את השקת המעגלים עבור משולש $\triangle ABC$ תוך שינוי ערכי צלעותיו. עבור כל מצב של קדקודי המשולש מופיעים על צג המחשב ערכי r ו- R , היחס ביניהם וערכי רדיוס המעגל העובר דרך אמצע הצלעות.

Link 1: <https://www.geogebra.org/m/z9fvJ6T6>

חשימה ב'

הוכחת קשרים בין הרדיוסים של המעגלים החסומים מבחוץ למשולש והמעגל החסום במשולש



איור 6

נתון משולש $\triangle ABC$ כלשהו בעל צלעות a , b , c ו- c שבו חסום מעגל בעל רדיוס r .

יהיו R_a , R_b , R_c הרדיוסים של המעגלים המשיקים מבחוץ לצלעות a , b , c בהתאמה, וכן משיקים להמשכי הצלעות, כנראה באיור 6.

יש להוכיח:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \quad (1)$$

$$R_a + R_b + R_c \geq 9r \quad (2)$$

בשלב הראשון נמצא קשר בין כל אחד מהרדיוסים המשיקים למעגל מבחוץ למשולש $\triangle ABC$.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO_a} + S_{\Delta ACO_a} - S_{\Delta BO_aC} = \frac{c R_a}{2} + \frac{b R_a}{2} - \frac{a R_a}{2} =$$

$$= \frac{R_a}{2}(c + b - a) = \frac{R_a}{2}(a + b + c - 2a) = R_a(P - a)$$

$$R_a = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - a} \quad \text{כלומר:}$$

$$R_b = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - b}, \quad R_c = \frac{S_{\Delta ABC}}{P - c} \quad \text{גם כאן מקבלים:}$$

מכאן:

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{(P - a) + (P - b) + (P - c)}{S_{\Delta ABC}} = \frac{P}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{r} \quad (1)$$

(2) ידוע הקשר בין הממוצע החשבוני לממוצע ההרמוני של שלושה מספרים חיוביים

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \text{: (Mogilevsky & Stupel, 2016)}$$

מכאן:

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{9}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}} = 9r$$

עוד תוצאה שאפשר להוכיח:

$$\frac{P}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (3)$$

כאשר P הוא חצי היקף משולש ΔABC , ו- h_a, h_b, h_c הגבהים שלו.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2}$$

מקשר זה נובע:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S_{\Delta ABC}}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S_{\Delta ABC}}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$$

מכאן:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{P}{S_{\Delta ABC}}$$

שימוש ביישומון דינמי 2: הוכן לינק ליישומון דינמי המאפשר לראות את קשר (1) – הקשר בין רדיוס המעגל החסום בתוך המשולש לרדיוסים של המעגלים החסומים מחוץ למשולש ולהמשכי

צלעותיו. ביישומון אפשר לגרור את קדקודי המשולש ובכך לשנות את אורכי צלעותיו ולראות שהקשר בין הגדלים של הרדיוסים נשמר.

Link 2: <https://www.geogebra.org/m/TueeM84U>

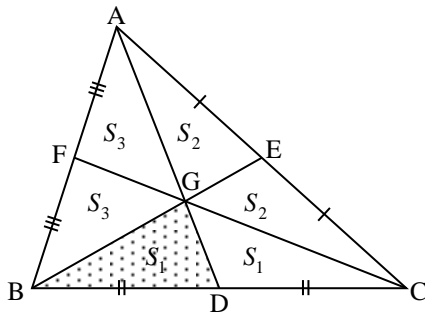
חשיבה ג'

תיכונים במשולש - שימור שטח יחסי

התיכונים במשולש מחלקים את שטחו לשישה משולשים שווים-שטח (ראה איור 7).

הוכחה

בהסתמך על המשפט: תיכון במשולש מחלק את שטחו לשני משולשים שווים-שטח, ניתן לסמן שטחים שווים, כנראה באיור 7. מכאן שמתוך הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים", מוכיחים את הנדרש.



איור 7

$$\left. \begin{aligned} S_1 + 2S_3 &= S_1 + 2S_2 \Rightarrow S_2 = S_3 \\ S_3 + 2S_1 &= S_3 + 2S_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S$$

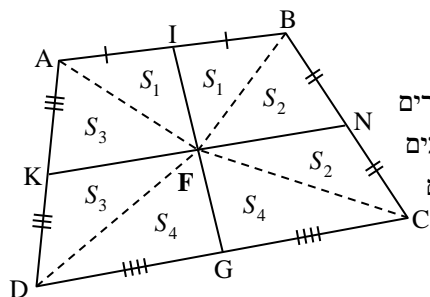
$$\frac{S_{\Delta BGD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S}{6S} = \frac{1}{6} \quad \text{משוויון שטחים זה נובע:}$$

שימוש ביישומון דינמי 3: הדגמת שימור השטח היחסי בין שטח משולש ΔBGD לשטח המשולש ΔABC , כאשר גוררים את קדקודיו של המשולש המקורי ומשנים בכך את אורכי צלעותיו. **הערה:** אפשר להשתמש בתכונה שהתיכונים במשולש מחלקים את שטחו לשישה משולשים שווים שטח, כדי להוכיח את המשפט: התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס של 2:1.

Link 3: <https://www.geogebra.org/m/hR7AZu6Y>

חשימה ד'

שימור שוויון סכום שטחים



איור 8

במרובע קמור כלשהו ABCD, שבו העבירו ישרים המחברים אמצעי צלעות נגדיות, אזי סכום השטחים של זוג מרובעים נגדיים, שווה לסכום השטחים של הזוג השני של המרובעים הנגדיים. גם כאן מובאת הוכחה בסגנון של "הוכחה ללא מילים", כנראה באיור 8.

הוכחה

$$S_{KAIF} + S_{GCNF} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

$$S_{KDGF} + S_{IBNF} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

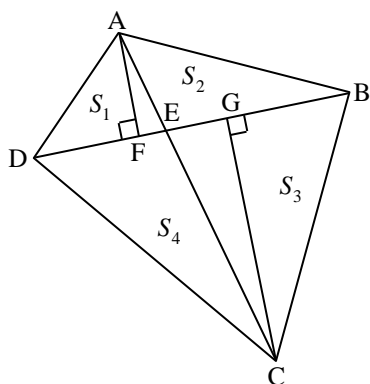
הערה: התכונה נשמרת גם במרובע קעור שבו הישרים המחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות (GI ו-KN) נחתכים בתוך המרובע הנתון.

שימוש ביישומון דינמי 4: הוכן יישומון המדגים את שימור הקשר שבין סכום שטחי המרובעים עם גרירת קדקודי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וצורתו.

Link 4: <https://www.geogebra.org/m/ynqufSqf>

חשימה ה'

שימור שוויון מכפלת שטחים של משולשים



איור 9

במרובע קמור כלשהו העבירו את האלכסונים, הנחתכים בנקודה E.

התקבלו 4 משולשים ששטחיהם מסומנים ב- S_1, S_2, S_3, S_4 ,

S_4 , כנראה באיור 9.

יש להוכיח: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

הוכחה

הורדת גבהים לאלכסון DB: $AF \perp BD, CG \perp BD$

סימון: $EB = y, DE = x, AF = h_1, CG = h_2$

$$S_1 = \frac{x \cdot h_1}{2}, S_2 = \frac{y \cdot h_1}{2}, S_3 = \frac{y \cdot h_2}{2}, S_4 = \frac{x \cdot h_2}{2}$$

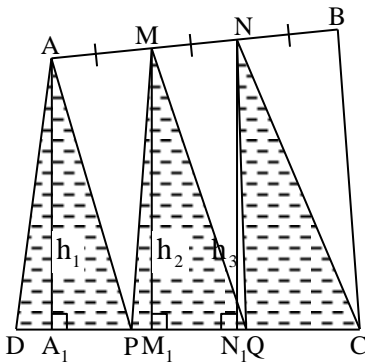
$$\left. \begin{array}{l} S_1 \cdot S_3 = \frac{x \cdot y \cdot h_1 \cdot h_2}{4} \\ S_2 \cdot S_4 = \frac{x \cdot y \cdot h_1 \cdot h_2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

שימוש ביישומון דינמי 5: הוכן יישומון המדגים את שימור הקשר שבין מכפלת שטחי משולשים הנוצרים מאלכסוני המרובע, עם גרירת קדקודי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וצורתו.

Link 5: <https://www.geogebra.org/m/HrmeXvmF>

חשימה ו'

שטחים שיש בהם סדרה חשבונית



איור 10

במרובע כלשהו ABCD חילקו זוג צלעות נגדיות לשלושה חלקים שווים וחיברו אותם בקווים ישרים, כנראה באיור 10. ($AM=MN=NB, DP=PQ=QC$).

התקבלו שלושה מרובעים ששטחיהם:

$$S_1 = S_{\square AMPD}, S_2 = S_{\square MNQP}, S_3 = S_{\square NBCQ}$$

יש להוכיח שהשטחים הללו משמשים סדרה חשבונית, כלומר: $S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2$.

הוכחה

מהנקודות A, M ו-N מורידים אנכים לישר DC.

מכאן מקבלים שהמרובע ANN_1A_1 הוא טרפז ישר

זווית שבסיסיו $h_1 = AA_1$ ו- $h_3 = NN_1$ ובו $h_2 = MM_1$ הוא קטע אמצעים, ולכן:

$$h_1 + h_3 = 2h_2$$

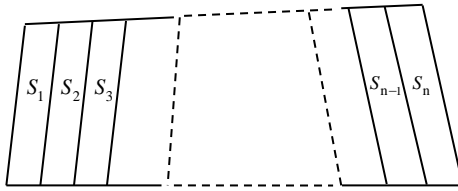
היות שבסיסי המשולשים שווים באורכיהם: $DP=PQ=QC$, הרי ששטחי המשולשים המקווקווים

באיור 10 מקיימים: $2S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle NCQ}$, כלומר שטחי המשולשים משמשים סדרה

חשבונית. באותה דרך מוכיחים ש- $2S_{\triangle MNQ} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle NBC}$.

משני הקשרים נובע ש- $S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2$.

מסקנה מהתכונה



איור 11

אם מחלקים שתי צלעות נגדיות של מרובע כל אחת ל- N קטעים שווי אורך, מקבלים "סורג" מסדר $N \times 1$ כמתואר באיור 11. השטחים של מרובע זה S_1, S_2, \dots, S_n משמשים סדרה חשבונית, בהסתמך על התכונה שהוכחה.

כאשר N מספר אי-זוגי, השטח של המרובע האמצעי ביחס לשטח המרובע המקורי הוא $\frac{1}{N}$.

כאשר N מספר זוגי, ישנם שני מרובעים במרכז המרובע המקורי. סכום השטחים שלהם ביחס לשטח המרובע המקורי הוא $\frac{2}{N}$.

להדגמת תכונה זו הוכנו שני יישומונים עבור N אי-זוגי ועבור N זוגי שבהם אפשר לשנות בסרגל את ערכו של N ולקבל את השטח היחסי של המרובע האמצעי (או שני המרובעים האמצעיים). כמובן שממבט ראשון התוצאה מפתיעה, אך חשיבה עמוקה מראה שזוהי תכונה של סדרה חשבונית.

שימוש ביישומון דינמי 6: הוכן יישומון המדגים את שימור השטח היחסי של שטח המרובע המרכזי (או השטח היחסי של שני המרובעים המרכזיים) ביחס לשטח של המרובע החיצוני. השטח היחסי נשמר גם כאשר גוררים את קדוקדי המרובע ובכך לשנות את אורכי צלעותיו.

Link 6: <https://www.geogebra.org/m/wAJNM38F>

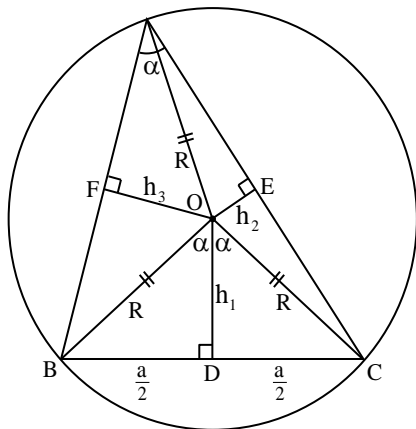
מידע נוסף על שטחים ושימור תכונות כאשר מרובע מתפתח לסריג אפשר למצוא במאמרם של סגל, טופל וסיגלר (Segal, Stupel, & Sigler, 2016).

חשימה ז'

שימור סכום גבהים במשולש חסום במעגל

משולש ABC שאינו קהה-זווית חסום במעגל (O, R) . ממרכז המעגל O מורידים אנכים h_1, h_2, h_3 לצלעות המשולש, כנראה באיור 12.

עבור משולש כזה מתקיים: $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש.



איור 12

תכונה זאת ידועה בשם משפט קרנוט – Carnot's theorem (Eves, 1972, pp. 256, 262;) (Honsberger, 1985, p. 25).

הוכחה

ממשולש $\triangle OBD$ מקבלים: $h_1 = R \cos \alpha$ ובאותו אופן: $h_2 = R \cos \beta$ ו- $h_3 = R \cos \gamma$.
מכאן: $h_1 + h_2 + h_3 = R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$ שימוש בזהויות טריגונומטריות נקבל
עבור הביטוי $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

מכאן:

$$R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = R + 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

ידוע שאחד מהביטויים השונים עבור הרדיוס החסום r הוא: $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ (גורן, 1989, עמ' 192).

$$h_1 + h_2 + h_3 = R + r \quad \text{מכאן:}$$

שימוש ביישומון דינמי 7: [Link 7: https://www.geogebra.org/m/N6zFTUVT](https://www.geogebra.org/m/N6zFTUVT)

היישומון מאפשר לגרור באופן דינמי את כל אחד מקדוקדי המשולש ובכך לשנות את אורכי צלעותיו וזוויותיו. כמו כן אפשר לשנות את רדיוס המעגל החוסם R . בכל שלב, מופיעים על המסך הערכים האלה:

α, β, γ זוויות המשולש

h_1, h_2, h_3 אורכי הגבהים

R, r רדיוס המעגל החוסם ורדיוס המעגל החסום

סכום אורכי הגבהים $h_1 + h_2 + h_3$

סכום אורכי הרדיוסים $R + r$

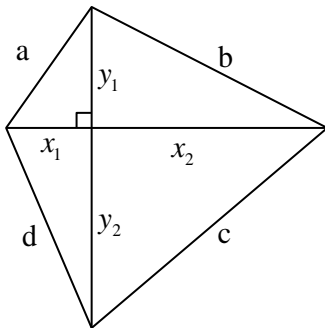
שאלה: האם הקשר $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$ מתקיים גם עבור משולש קהה-זווית?

התשובה: שימוש ביישומון מראה שעבור משולש קהה-זווית, הקשר אינו נשמר.

נשאלת השאלה: מה שונה ממשולש חד-זווית למשולש קהה-זווית? איזה שימור ניתן לקבל במקרה זה? ההסבר לכך הוא שבמשולש קהה-זווית, מרכז המעגל החוסם נמצא מחוץ למשולש, ולכן גובה אחד לצלעות (זה שיורד ממרכז המעגל אל הצלע שמול הזווית הקהה) נמצא כולו מחוץ למשולש. עבור זווית $\alpha > 90^\circ$, הגודל $h_1 = R \cos \alpha$, מקבל ערך שלילי, ועל-כן השוויון אינו מתקיים.

במקרה זה, מתקיים הקשר הבא:

$$-h_1 + h_2 + h_3 = R + r$$



איור 13

משימה ח'

שימור סכום ריבועי צלעות נגדיות במרובע

במרובע שאלכסונו מאונכים זה לזה, אזי צלעות המרובע מקיימות את הקשר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

ראה איור 13.

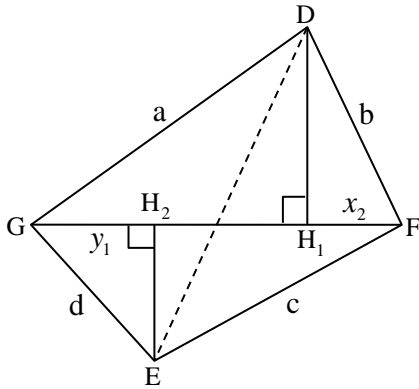
הוכחה

ההוכחה מסתמכת על שימוש במשפט פיתגורס בארבעת המשולשים ישרי הזווית שיצרו האלכסונים.

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = a^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = a^2 - c^2 \left. \begin{array}{l} x_2^2 + y_1^2 = b^2 \\ x_1^2 + y_2^2 = d^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = b^2 - d^2 \left. \begin{array}{l} \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \end{array} \right\}$$

במרובע שבו אלכסונו מאונכים, מתקיים: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

האם קיום של תנאי זה מבטיח שאלכסונו מרובע יהיו מאונכים?



איור 14

כן. קיימת הוכחה שאכן זה תנאי הכרחי ומספיק. כלומר, גם המשפט ההפוך נכון.

הוכחת המשפט ההפוך

נתון שצלעות המשולש מקיימות את הקשר הבא:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

יש להוכיח כי $DE \perp GF$ (כלומר הנקודות H_1 ו- H_2 מתלכדות).

מורידים אנכים DH_1 ו- EH_2 ומסמנים את הקטעים שנוצרו על GF באופן הבא (ראה איור 14):

$$GH_1 = x_1, H_1F = x_2, GH_2 = y_1, H_2F = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

אפשר לרשום בצורה: $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$.

לפי משפט פיתגורס במשולשים $\triangle GDH_1$ ו- $\triangle DH_1F$, באמצעות הצלע המשותפת DH_1 מקבלים:

$$a^2 - b^2 = x_1^2 - x_2^2 = d^2 - c^2$$

לפי משפט פיתגורס במשולשים $\triangle GEH_2$ ו- $\triangle EH_2F$, באמצעות הצלע המשותפת EH_2 מקבלים:

$$d^2 - c^2 = y_1^2 - y_2^2 = a^2 - b^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2 \text{ מכאן:}$$

מתוך שימוש בנוסחת הכפל המקוצר, מקבלים: $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

נחבר את שני השוויוניים:

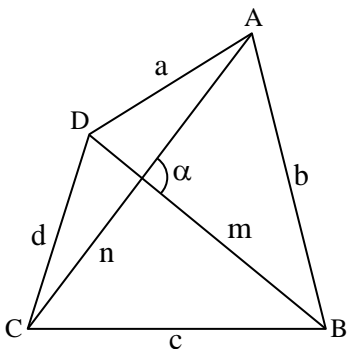
$$(x_1 - x_2 = y_1 - y_2) \text{ (השוויון האחרון שהתקבל)}$$

$$(x_1 + x_2 = y_1 + y_2) \text{ (סימון הקטעים על GF)}$$

מקבלים: $x_1 = y_1$ ולכן הנקודות H_1 ו- H_2 מקיימות את הקשר $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, כלומר אלכסוני המרובע ניצבים זה לזה.

הוכחת המשפט ההפוך בדרך נוספת

לפי משפט הקוסינוסים למרובע כלשהו שצלעותיו הן a, b, c , ואלכסוניו m ו- n נחתכים בזווית α (איור 15), קיים:



איור 15

$$(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2) = 2mn \cos \alpha$$

במקרה שקיים: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, מקבלים: $\cos \alpha = 0$, כלומר $\alpha = 90^\circ$ והאלכסונים מאונכים זה לזה.

הערה: אפשר לפתח את משפט הקוסינוסים למרובע מתוך שימוש במשפטי הקוסינוסים לכל אחד מארבעת המשולשים המרכיבים את המרובע ולחבר ביניהם.

משפט הקוסינוסים למרובע הוא:

$a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) = 2AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$ ועל ידי הצבת $\alpha = 90^\circ$ מקבלים את הקשר בין צלעות המרובע.

חשימה ט'

קיום מרחק קבוע השווה להפרש צלעות משולש המקיימות סדרה חשבונית

בכל משולש שאורכי צלעותיו מהווים סדרה חשבונית שהפרשה d המרחק בין נקודת חיתוך התיכונים לנקודת חיתוך חוצי-הזוויות הוא $\frac{d}{3}$.

היישומון לחקר דינמי של התכונה

בשלב הראשון נעשה שימוש ביישומון שאפשר להגיע אליו באמצעות לינק 8.

שימוש ביישומון דינמי 8:

Link 8: <https://www.geogebra.org/m/vNYfHaKY>

ביישומון ישנם שני סרגלים:

הסרגל הראשון מאפשר לשנות את האורך a של הצלע BC ובהתאמה קובע את אורכי הצלעות AB ו-AC. הסרגל השני מאפשר לשנות את הגודל d – הפרש הסדרה החשבונית ובכך לשנות את אורכי צלעות המשולש.

בכל שלב מופיעים על המסך ערכי a ו-d וכן האורך של הקטע HG – המרחק בין הנקודה H – נקודת החיתוך של חוצי-הזוויות לנקודה G – נקודת החיתוך של התיכונים. מיקום הנקודות H ו-G עבור כל משולש מופיע בתוך המשולש. כאשר d=0, המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות והנקודות H ו-G מתלכדות.

גרירת נקודת הקדקוד C מזיזה את מיקום המשולש על-גבי המסך. גרירת נקודת הקדקוד B מסובבת את המשולש סביב הקדקוד C.

הפתעה

התכונה של $GH = d/3$ מפתיעה מאוד, כי לדוגמה בשלושת המשולשים בעלי אורכי הצלעות הבאות בס"מ: (10, 13, 16), (132, 135, 138), (2269, 2272, 2275), אורכי הצלעות משמשים סדרה

חשבונית עם הפרש $d=3$. המשולשים שונים בזוויותיהם – ככל שאורכי צלעות המשולש גדולים יותר, הזווית הקטנה בכל אחד מהם גדולה יותר, ולמרות זאת המרחק בין נקודת חיתוך חוצי-הזוויות לנקודת חיתוך התיכונים נותר 1 ס"מ!!!

הוכחה סטנדרטית

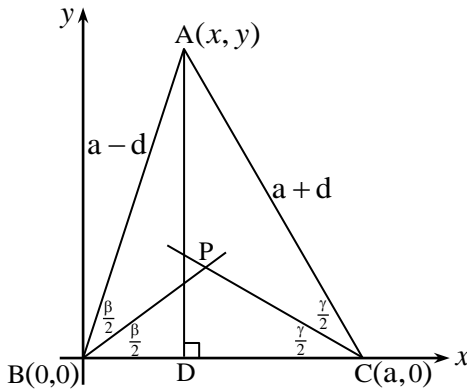
דרך א': מתוך שימוש בהנדסה אנליטית ובטריגונומטריה על סמך נוסחה למרחק בין שתי נקודות מסמנים:

את שיעורי קדקודי המשולש. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .

$AB = a - d$, $AC = a + d$, $BC = a$ את צלעות המשולש.

יהא AD אנך לבסיס, ומסמנים: $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABC = \beta$.

כנראה באיור 16 שבו המשולש ממוקם במערכת צירים.



איור 16

מתוך שימוש במשפט פיתגורס במשולשים $\triangle ABD$

ו- $\triangle ADC$ מוצאים את שיעורי הנקודה A:

$$x_A = \frac{a}{2} - 2d, \quad y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}$$

תהא הנקודה M נקודת חיתוך התיכונים ולפי נוסחה

ידועה מקבלים את שיעוריה:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3a - 4d}{6}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}$$

בונים את חוצי-הזווית $\angle B$ ו- $\angle C$ הנחתכים

בנקודה P (ראה איור 16).

בעזרת הנוסחה הטריגונומטרית למחצית זווית:

$$\tan \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{a + 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}$$

לפי משולש $\triangle ABD$ מוצאים:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a - 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}$$

לפי משולש $\triangle ACD$ מוצאים:

$$y_{BP} = \frac{a + 2d}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}} \cdot x$$

מכאן משוואת הישר BP:

$$y_{CP} = \frac{2d - a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}} \cdot (x - a)$$

משוואת הישר CP:

$$x_P = \frac{a-2d}{2}, \quad y_P = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - 4d^2}}{6} \quad \text{מכאן מוצאים את שיעורי הנקודה P:}$$

$$MP = \frac{d}{3} \quad \text{לפי שיעורי הנקודות P ו-M ולפי נקודת המרחק בין שתי נקודות, מוצאים:}$$

דרך ב': על ידי שימוש בגאומטריה אוקלידית ובטריגונומטריה.

תהא הנקודה P נקודת פגישת חוצי-הזווית ונקודה M נקודת פגישת התיכונים, כנראה באיור 17. יהא BD גובה לצלע AC.

$$BD = a \sin \gamma$$

יהא $MN \perp AC$, ועל כן,

$$MN = \frac{1}{3} BD = \frac{a \sin \gamma}{3}$$

החסום במשולש ΔABC , ולכן לפי נוסחה ידועה:

$$r = \frac{S_{\Delta}}{P} = \frac{(a+d) \sin \gamma}{3}$$

$$CK = \frac{r}{\tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{2(a+d) \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{3}$$

לפי החלוקה של התיכונים של $DL = \frac{1}{3} NL$,

$$DN = \frac{2}{3} DL = \frac{2}{3} (CD - CL) = \frac{2}{3} \left(a \cos \gamma - \frac{a+d}{2} \right)$$

$$CN = CD - DN = a \cos \gamma - \frac{2}{3} \left(a \cos \gamma - \frac{a+d}{2} \right) = \frac{a \cos \gamma + (a+d)}{3}$$

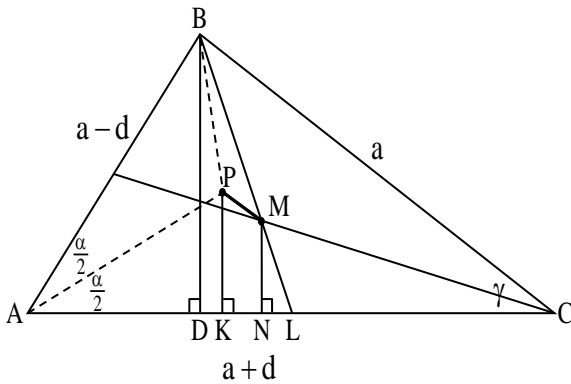
$$NK = CK - CN = \frac{d \cos \gamma}{3}$$

מתבוננים בטרפז $KMNP$, כנראה באיור 18.

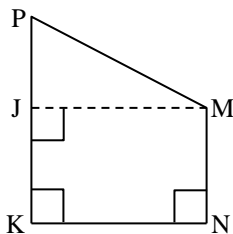
$$MJ = NK = \frac{d \cos \gamma}{3}$$

$$PJ = PK - MN$$

$$MP^2 = PJ^2 + MJ^2 = \frac{d^2}{9} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

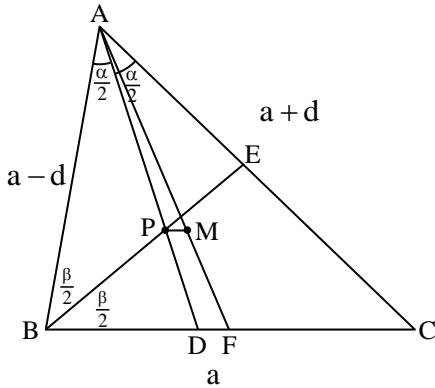


איור 17



איור 18

ומקבלים $MP = \frac{d}{3}$.



איור 19

הוכחה האלגנטית

תוצג הוכחה בעזרת גאומטריה אוקלידית יהי AD ו- BE חוצי-זוויות הנחתכים בנקודה P. יהא AF תיכון ($BF = FC$) ועליו הנקודה M, נקודת מפגש התיכונים, כנראה באיור 19.

לפי משפט חוצה-הזווית במשולש $\triangle ABC$,

$$\frac{BD}{a - BD} = \frac{a - d}{a + d} \Rightarrow BD = \frac{a - d}{2}$$

לפי משפט חוצה-הזווית במשולש $\triangle ABD$,

$$(*) \frac{AP}{PD} = \frac{a - d}{BD} = 2$$

לפי תכונת חיתוך תיכונים במשולש, $(**) \frac{AM}{MF} = 2$

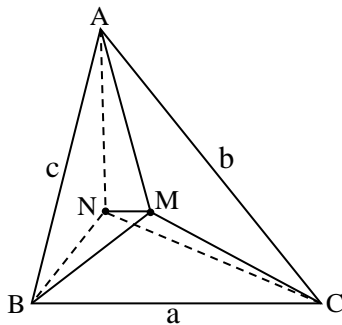
על פי $(*)$ ו- $(**)$ מקבלים: $\frac{AP}{PD} = \frac{AM}{AF} = 2 \Rightarrow PM \parallel DF$

$$DF = BC - (BD + CF) = \frac{d}{2}$$

לפי יחס הדמיון בין המשולשים $\triangle APM$ ו- $\triangle ADF$ מקבלים:

$$\frac{PM}{DF} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{d}{3}$$

הוכחה בעזרת נוסחאות של קטרים בין מרחקי נקודות מיוחדות במשולש



איור 20

הוכחה המבוססת על נוסחת אוילר ונוסחאות נוספות. לפי אוילר קיימת נוסחה כללית המקשרת בין מרחקי נקודת מפגש התיכונים M לקדקודי המשולש ובין מרחקי נקודה כלשהי N בתוך המשולש לקדקודי המשולש עם המרחק MN שבין שתי הנקודות (סימון המרחקים נראה באיור 20).

לפי סיגלר, סגל וסטופל (Sigler, Segal, & Stupel, 2016)

הנוסחה היא:

$$(*) AN^2 + BN^2 + CN^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MN^2$$

ידועות הנוסחאות למרחקים לקדקודים על פי אורכי הצלעות (שם).

$$(**) AN^2 + BN^2 + CN^2 = \frac{bc(b+c-a) + ac(a+c-b) + ab(a+b-c)}{a+b+c}$$

$$(***) AN^2 + BN^2 + CN^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

לפי הסימון (כנראה באיור 20), $BC = a$, $AC = a + d$, $AB = a - d$, הצבת אורכי הצלעות בקשרים (***) ו- (***) ולאחר קבלת ערכיהם ב- (*), מצטמצם הערך של a ומקבלים $d^2 = 9MN^2$, או $MN = \frac{d}{3}$.

סיכום

על אף שחלפו מאות שנים מאז שהגאומטריקנים הקדמוניים החלו לגלות תכונות גאומטריות מיוחדות, ואחריהם המשוכו באותה דרך דורות רבים של מתמטיקאים שגילו עוד תכונות, גם היום עדיין אפשר להמשיך ולמצוא בשדה העשיר של הגאומטריה, תכונות חדשות שמאתגרות את העוסקים בתחום ובכך מעצימים את יופייה של הגאומטריה, שמשמשת ענף מרכזי של המתמטיקה.

למעשה, כל תכונה מאפיינת פעולה של שימור מתוך שינוי ולמעשה מייצגת משפט בגאומטריה.

פעילות החקר מתאימה לסטודנטים להוראת מתמטיקה בקורס מתקדם בגאומטריה במישור. כמו כן אפשר לשאול שאלות בסגנון: "מה יקרה אם נתון אחד יופחת או יתווסף?", "מה יקרה אם ישנו את...?", "האם גם המשפט ההפוך נכון?" ועוד.

כמקובל בעולם הנוכחי המשופע בכלים טכנולוגיים, אפשר ללוות את הפעילות בשימוש בתכנה גאומטרית ממוחשבת המאפשרת להעלות השערות מסוימות ובדיקה דינמית מידית כדי לאשר את נכונותן. במידה שהחקר הדינמי אישר את נכונות ההשערה, אז נדרשת הוכחה פורמלית כמקובל במתמטיקה.

הבעת תודה:

כותבי המאמר מביעים תודה והערכה למר עידן טל על הכנת היישומונים בג'יאוג'ברה התורמים להשבחתו של המאמר.

רשימת מקורות

- גורן, ב' (1989). טריגונומטריה (4 ו-5 יחידות לימוד). תל אביב: מישלב.
- סטופל, מ' וחריר, ש' (2005). התנהגות מתמטית בעלת גוון של שימור. *על"ה*, 35, 79-72.
- סטופל, מ' ובן-חיים, ד' (2014). בעיה אחת, הרבה דרכי פתרון ריבוי הוכחות כגשר בין תחומי המתמטיקה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 1, 106-80.
- סיגלר, א' וסטופל, מ' (2016). הוכחות מעניינות המציגות את יופייה של המתמטיקה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 3, 154-145.

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2017). Variance-and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *Far East Journal of Mathematical Education*, 16(4), 371-418. doi: 10.17654/ME016040371

- Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Eves, H. W. (1972). *A survey of geometry* (Rev. ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Gras, M. N. (2014). Distances between the circumcenter of the extouch triangle and the classical Centers of a triangle. *Forum Geometricorum*, 14, 51-61.
- Honsberger, R. (1985). *Mathematical gems* (Vol. III). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Mogilevsky, R., & Stupel, M. (2016). Using the wonder of inequalities between averages for mathematics problems solving. *The Educational Research and Reviews*, 11(9), 932-944.
- Segal, R., Stupel, M., & Sigler, A. (2017). Surprising geometrical properties that are obtained by transforming any quadrilateral into a lattice. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 11(1). Retrieved from <https://php.radford.edu/~ejmt/>
- Sigler, A., Segal, R., & Stupel, M. (2016). The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1226-1243. doi: 10.1080/0020739X.2016.1164347
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education*, 11(2), 129-161.



ד"ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד"ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה. מרצה במכללת אפרתה. פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.



פרופ' משה טטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים. מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים. פרסם מאמרים רבים בכתבי-עת שונים בארץ ובחול. עוסק בחקר יופייה של הגאומטריה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי"ס שש-שנתי.



ד"ר רותי סגל

בוגרת תואר ראשון במתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת חיפה, תואר שני בחינוך מתמטי באוניברסיטת ירושלים ותואר שלישי בפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה בטכניון. לימדה מתמטיקה בבתי ספר תיכוניים כ-26 שנים, כיהנה כמדריכה ארצית למתמטיקה בחטיבה העליונה במשך 14 שנים. כיום מרצה במכללת שאנן ובמכללת אורנים. חוקרת בנושאים: התפתחות של קהילות למידה של מורים למתמטיקה, שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה, התפתחות