קריאת טקסטים מתמטיים בתיכון

אביטל אלבוים-כהן, מכון ויצמן למדע

תקציר

מאמר זה מציג מחקר שמושאו הוראה ולמידה של קריאת טקסטים מתמטיים.[1] אחד מהקשיים שרובצים לפתחה של מערכת החינוך, ובתוכה החינוך המתמטי, הוא היווצרותה של תלות בין תלמיד למורה, אשר מצמצמת מאוד את מרחב ההזדמנויות שבהן התלמיד יכול לפעול וליזום. לכאורה נראה כי העיסוק של תלמידי תיכון בקריאת טקסטים מתמטיים יכול להרחיב ולהעמיק את הידע והמיומנויות המתמטיים שלהם. כמו כן מתוך התבוננות ראשונית עולה כי בפיתוח של מיומנויות קריאה של טקסטים מתמטיים, ובעצם העיסוק בהם, יש דרך לקדם לומד אוטונומי ופעיל שמשתתף בעשייה מתמטית מגוונת מהמקובל. על סמך האמור לעיל יוצג להלן מחקר מסוג מחקר עיצוב (design experiment) שמטרותיו הן לבחון את היתכנותה של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים בכיתות העליונות בתיכון, הלומדות מתמטיקה ברמות הגבוהות לאפיין את ההוראה והלמידה שנגזרות ממנה.

במחקר אני מאמצת השקפת עולם קומוגניטיבית שרואה במתמטיקה על הקשריה המגוונים סוג של שיח. השקפת עולם זו משמשת אותי, בהיותי חוקרת ומורה, בשני תפקידים מרכזיים: כחוקרת היא משמשת מסגרת-על תאורטית שממנה נגזרים השפה וכללי השיח שבאמצעותם ועל פיהם נערך המחקר. כמורה, ההתייחסות של הפרדיגמה הקומוגניטיבית ללמידה מספקת מוטיבציה לעשייה חינוכית שמטפחת כישורים תקשורתיים בכלל ומיומנויות קריאה בפרט.

מבוא

בבסיסה של כל עשייה חינוכית עומדת הנחת היסוד שהמציאות שתיגזר ממנה תהיה טובה יותר מהמציאות שקדמה לה. אני רואה במחקר בחינוך מתמטי כלי שמצד אחד בוחן את האמירה הזו ומצד אחר מעניק לה משמעות, כאשר העשייה בתחום החינוך המתמטי (Sfard, 2005). במאמר זה אני מבקשת לבחון את ההנחה לעיל, ואולי להעניק לה משמעות בזעיר אנפין, כאשר מדובר בעשייה חינוכית שהיא הוראה של קריאת טקסטים מתמטיים. ההתנסות המתוארת להלן היא חלק ממחקר עיצוב שבו כותבת המאמר היא שמעצבת את תכנית ההוראה, מוציאה אותה אל הפועל וחוקרת אותה.[2]

1. באומרי "טקסטים מתמטיים" אני מתכוונת למאמרי העשרה שתוכנם מתמטי, והם מיועדים לתלמידים מתעניינים ולמורים.
2. במאמר אזכיר את המורה בגוף שלישי כדי להבחין הבחנה חלקית לפחות בין התפקידים השונים.

לא יהיה זה מופרך לטעון כי הוראת מתמטיקה בבית ספר תיכון ישראלי (בחטיבה העליונה) מטפחת בעיקר חשיבה אלגוריתמית ושיטות לפתרון בעיות, וכי יש הסכמה שהשלמה מוצלחת של למידה כזאת חייבת להתבטא ביכולת לפתור בעיות מסוג מסוים. מכאן שהעשייה הכיתתית המקובלת מטפחת תלמיד, שבדרך כלל משתף פעולה עם הפעולות שהמורה יוזמת כדי לשפר את סיכוייו להצליח בבחינות שבהן יידרש לפתור בעיות דומות. הפעלת תלמידים בקריאה של טקסטים מתמטיים היא ניסיון לפרוץ את התבנית שתוארה לעיל. מטרת המאמר היא לתת טעימה ממה שסוג זה של עשייה חינוכית מאפשר.

אילו טקסטים?

הטקסטים שבחרתי ללמד את קריאתם הם בדרך כלל מאמרי העשרה שמיועדים למורים ולתלמידים מתעניינים ומציגים פנינה מתמטית. פנינה מתמטית היא משהו שאנחנו, אנשי הקהילה שעוסקת במתמטיקה ובחינוך מתמטי, רואים בו יופי: הוכחה לא שגרתית של משפט, שילוב ייצוגים מאיר עיניים, פתרון מקורי של בעיה וכדומה. כמו כן נבחרו הטקסטים כך שיתאימו לכישורים ולידע של תלמידי הכיתות העליונות בתיכון במסלול של חמש יחידות במערכת החינוך הממלכתית (אין שלילה עקרונית של הרחבת הבחירה למסלולי לימוד שונים). חשוב לציין כי אלה טקסטים מתמטיים ולא טקסטים על מתמטיקה, כלומר הם מציגים איזושהי עשייה מתמטית. הבחירה בהוראה של קריאת טקסטים מתמטיים היא בחירה אפשרית כאשר עומדות לנגד עינינו המטרות של הרחבת עולמם המתמטי של התלמידים, טיפוח לומד אוטונומי ובו בזמן שכלול המיומנויות התקשורתיות שלהם.[3] כדי לקבוע האם הבחירה בהוראה של קריאת טקסטים מתמטיים אכן נושאת פרי ויוצרת מציאות רצויה, עליי לבחון את המציאות הזו בכלים של מחקר, ולשם כך עליי לבחור מסגרת תאורטית שתקבע את הכללים ותיתן משמעות למילים שבאמצעותן אוכל להאיר ולבחון את מה שהתרחש.

מסגרת תאורטית - למה קומוגניציה?

אם נלך בעקבות תומס קון בספרו "המבנה של מהפכות מדעיות" (Kuhn, 1962) ונצא מתוך הנחה כי למחקר בחינוך מתמטי יש מאפיינים מסוימים של מדע, הרי שפרדיגמה מחקרית תאורטית היא תמונת עולם שמאומצת על-ידי קהילה של חוקרים בתחום דעת מסוים. זאת כדי לקבוע את משמעותם של מושגי יסוד, את סדר היום המחקרי (מהן שאלות מעניינות) ואת כללי השיח המקובלים בקהילה. לכן קשה להסביר את הבחירה במסגרת-על תאורטית למחקר בחינוך. הבחירה לא יכולה להיגזר באופן רציונלי, שכן המסגרת הנבחרת היא שקובעת (במובן מסוים) הן את הנחות היסוד והן את הגדרת הרציונליות. מקובל לחשוב כי קהילת החוקרים בחינוך מתמטי מתנהלת היום ללא פרדיגמה שלטת (Niss, 2007; Sfard, 2005) וכל חוקר או קבוצת חוקרים מאמצים מסגרת תאורטית אד-הוק שמשרתת אותם במחקר מסוים לפי קריטריונים מעורפלים של פרודוקטיביות.

3. חשוב לציין כי הוראה של קריאת הטקסטים לא נועדה ללמד פרקי מתמטיקה חדשים. אין הכוונה לאמן תלמידים בלימוד עצמאי מספרי לימוד, אלא לחשוף אותם לעולם מתמטי רחב ויפה שנגזר מהמתמטיקה שכבר נלמדה בבית הספר.

הבחירה בקומוגניציה (Sfard, 2008) כמסגרת תאורטית נולדה מתוך צורך עמוק לחיות בתוך עולם מושגי מוגדר היטב. בחרתי בקומוגניציה בעקבות האמונה שחשוב כי מושגי יסוד בתחום המחקר שלי כמו "חשיבה" ו"למידה" יהיו מוגדרים היטב בהגדרה אופרציונלית שאינה משתמעת לשתי פנים. וכן האמונה שתקשורת בין לומדים היא דבר חשוב. הצלילה לתוך התאוריה הקומוגניטיבית גילתה לי כי זו תאוריה חובקת עולם שמאירה את המציאות באור חדש ומציעה לחוקרים כלי עבודה שנראים מבטיחים.

הפרדיגמה הקומוגניטיבית נשענת על ההנחה הוויגוצקיאנית שכל מיומנות אנושית היא תוצר של הפנמת פעולות בין-אישיות שנטועות בהתפתחות הכרונולוגית של התרבות האנושית. לדוגמה, ילד משמיע קולות בתוך הקהילה שהוא חלק ממנה. המבוגרים בקהילה מגיבים לקולות הללו וכך לאט-לאט הקולות משתנים והופכים לדיבור משמעותי. לפי הנחה זו ובאותה דרך, גם מה שאנחנו מכנים חשיבה הוא מימוש אישי של עשייה קולקטיבית שהיא תקשורת בין-אישית. לכן המונח "קומוגניציה" מטרתו להזכיר לנו שוב ושוב כי תקשורת (communication) וחשיבה (cognition) הן ייצוגים שונים של אותה מהות עצמה. לחשוב פירושו לשוחח או לקיים שיח עם עצמך.

ההנחה נוגעת לכל התפתחות אנושית ולפיכך היא מזהה למידה כתהליך שממומש על-ידי השתתפות בשיח, כאשר שיח הוא אירוע תקשורת (או אוסף של אירועים כאלה)[4] שמתנהל לפי דפוסים ייחודיים לקהילה מסוימת. לדוגמה שיח של קהילת חוקרים בחינוך מתמטי, או שיח של תלמידים הלומדים לקרוא בכיתה א' וכדומה. כל שיח מתנהל על-פי כללים המקובלים בקהילה שנקבעים קונטינגנטית[5] לאורך התפתחותו ההיסטורית. סוגי שיח שונים ומגוונים מובחנים זה מזה בארבעה מאפיינים: מילות מפתח והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שְׁגרות (רוטינות), נרטיבים מקובלים והקשרים ביניהם. להלן אבאר בקצרה את משמעות מאפייני השיח על-פי ספרד (Sfard, 2008):

מילות מפתח והשימוש בהן: מילים שמשמשות את המשתתפים בשיח בדרך ייחודית. למשל, למילה "שיקוף" בשיח מתמטי יכולים להיות שימושים אחרים בשיח יומיומי.

מתווכים וויזואליים: מימוש ויזואלי של אובייקט בשיח (למשל בשיח מתמטי יש כתיב אלגברי, גרפים, סרטוטים וכיוצא באלה).

שְׁגרות (רוטינות): סדרות של פעולות שחוזרות על עצמן במצבים מסוימים בשיח. שגרה מאופיינת בתנאי התחלה, בתנאי סיום ובפרוצדורה שיוצאת לפועל.

נרטיבים מקובלים: אמירות שהן תיאור של אובייקטים או יחסים בין אובייקטים שרואים אותם בשיח כאמתיים.

על-פי הפרדיגמה הקומוגניטיבית, התבנית הסטנדרטית של למידה באה לידי ביטוי כאשר אדם טירון שעושה את צעדיו הראשונים בתוך קהילת שיח על-ידי חיקוי מושכל של הסובבים אותו, הופך לחבר

4. בשלב זה איני מוצאת לנכון להבחין בין אירוע יחיד לאוסף של אירועים.
5. הכוונה לקביעה שאינה הכרחית, שהרי יש ממד מקרי בתהליך יצירתם של כללי השיח.

בקהילה זו ששותף לשיח ותורם להתפתחותו. אם כך, אנחנו כחוקרים יכולים לזהות למידה על-ידי זיהוי של שינוי בשיח של הלומד שיכול להתבטא בשינויים בכל ארבעת המאפיינים של השיח שצוינו לעיל. כמו כן השינוי בשיח יכול להתרחש בשתי רמות: ברמת האובייקט הדיסקורסיבי וברמת-על שרואה בשיח כולו אובייקט. הלמידה ברמת האובייקט מרחיבה את השיח הקיים באמצעות כללי השיח הקיימים, ואילו למידה ברמת-על רואה בשיח וכלליו אובייקט ועוסקת בשינוי של כללי השיח עצמם. כללי השיח יכולים ללבוש צורות שונות, הם יכולים לעסוק במאפיינים של שיח מתמטי מסוים: למשל בשיח על מספרים טבעיים (או אי-שליליים) מכירים במספר כמשהו שמייצג כמות. כמו כן כללי שיח יכולים להגדיר את הדרך שבה מקובל להציג טענות או להצדיקן (למשל באמצעות המחשה או הוכחה). כללי שיח יכולים להיות גלובליים ולייצג את מה שמאחד לומדי מתמטיקה ומתמטיקאים ברחבי העולם, והם יכולים להיות מקומיים שמאפיינים קבוצת לומדי מתמטיקה במקום ובזמן מסוימים. לפיכך למידה ברמת-על יכולה לכלול סוגים מגוונים החל בהכרת אובייקטים מתמטיים שאינם מוכרים ושלא יכולים להתפתח מתוך השיח המתמטי הקיים, וכלה בהכרת דפוסים חדשים של תקשורת בין משתתפים בשיח. בכל המקרים של למידה ברמת-על, מהלכיה מונעים על-ידי כשל תקשורתי (קונפליקט קומוגניטיבי) שנגזר מחוסר תמימות דעים, שאינו בהכרח מודע, בין המשתתפים בשיח על עצמיו וכלליו. להבדיל מלמידה ברמת האובייקט שיכולה להתקיים קיום חקרני-עצמאי מתוך שימוש בכללי שיח מוכרים ומוסכמים כדי להרחיב ולפתח שיח קיים, הרי למידה ברמת-על יכולה להתממש רק בנוכחות מורה או מומחה, ורק אם מתקיימים תנאים מסוימים שמשמשים הסכם הוראה-למידה בין הטירונים ובין מי שמוביל את השינוי בכללי השיח (Sfard, 2015).

הפרדיגמה הקומוגניטיבית שהיא בעיקרה תאוריה של למידה מספקת גם אמירה נורמטיבית באשר לעקרונות שעלינו ללמד בעזרתם (ליזום שינוי בשיח של תלמידים), זאת בנוסף להיותה מסגרת-על תאורטית שמגדירה את השפה שבה אשתמש במחקר. ראשית, אם חשיבה היא סוג של תקשורת (של החושב עם עצמו), ואם נניח כי אחת המטרות של חינוך מתמטי היא ללמד תלמידים לחשוב כפי שמקובל לחשוב בקהילת העוסקים במתמטיקה, הרי מתבקש שמורים ינהלו קהילות לומדות מתוך טיפוח אינטנסיבי של כישורים תקשורתיים של התלמידים. כמו כן ההבחנה בין סוגים שונים של שינוי שיח (ברמת האובייקט וברמת-על) שתוארה לעיל בקצרה, מכתיבה סוגים שונים של הוראה. הוראה ברמת האובייקט מתאפשרת כאשר כללי השיח מוכרים לתלמידים ואלה יכולים להתנהל על פיהם באופן עצמאי. כאן תרומת המורה לעיצוב השיח של תלמידיה תהיה הקפדה על שימוש נאות בכללי השיח המוכרים. לעומת זאת, הוראה ברמת-על שמקדמת שינוי בכללי השיח, דורשת מהמורה להוביל את תלמידיה צעד אחר צעד, תוך שהיא נשענת על תשתית של אמון בינה ובינם, למצב שבו הם עושים שימוש אוטונומי בכללי השיח החדשים (Ben-Zvi & Sfard, 2007).

חשוב להבחין בין שני סוגים של רוטינות שמשמשות להתפתחותו של שיח בכלל ושל השיח המתמטי הכיתתי בפרט. החקירה היא רוטינה שמטרתה ליצור נרטיבים מקובלים בקהילת השיח. בכיתה המורה יכולה ליצור מצב שבו תלמידים מעורבים בייצור נרטיבים על אובייקטים מתמטיים מתוך בירור תכונותיהם של האובייקטים באמצעות כללי שיח מוכרים. במצב זה אפשר לומר שהתלמידים מעורבים

בשיח בעל מאפיינים אקספלורטיביים. לעומת רוטינה של חקירה, הריטואל הוא רוטינה שמבצע טירון בקהילת שיח רק כדי לקבל חיזוקים מהחברים הוותיקים באותה קהילה. למשל, תלמיד יפעל באופן ריטואלי כדי לרצות את מורתו. השימוש בריטואל כחלק מתהליך של לימוד הוא הכרחי, שכן טירון שאינו בקיא בכלליו של השיח שהוא לומד, יכול לפעול בתוך השיח החדש בשלב הראשון רק באופן ריטואלי (Sfard & Lavie, 2005).

חזרה לטקסטים

לאור האמור לעיל, עליי לבאר למה הכוונה באמירה "ללמד קריאת טקסטים מתמטיים". בעיני רוחי אני רואה הרחבה של סוגי העשייה שמגדירים את השיח המתמטי הכיתתי. בסוף התהליך כאשר התלמידים יהיו מיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים, נראה כי תעמודנה לרשותם עוד אפשרויות לקיום למידה ברמת האובייקט. מכל מקום עד שנוכל להגיד שאכן הושלם התהליך, יש ללמוד פרקטיקה חדשה שמשנה את כללי השיח המקובלים בכיתת המתמטיקה, ומכאן שלמידת הפרקטיקה הזו היא למידה ברמת-על. נזכור כי לפי האמור לעיל, בלמידה כזו למורה יש תפקיד מכריע בהנחלת כללי השיח החדשים. תחילה עליה לרכוש את אמון התלמידים וללמדם לקיים את כללי השיח החדשים באופן ריטואלי כדי לרצות אותה (את המורה), ולאט לאט לחזות בתלמידיה שמאמצים את הכללים כחלק מהשיח של עצמם (למען עצמם).

כדי להבין מהי הפרקטיקה החדשה שאנו מבקשים ללמד, ערכתי מחקר מקדים שבחן את רוטינות הקריאה של קוראים מיומנים (השייכים לקהילות של קוראי טקסטים מתמטיים) כשהם קוראים טקסט מתמטי. חשיפת הפרקטיקות הללו אפשרה הן הצבת מטרות לקורס שמלמד קריאת טקסטים מתמטיים והן הכוונה לסוגי הכלים הפדגוגיים המתאימים להוראתו.

להלן אציין בקצרה את עיקרי הפעולות שקוראים מומחים נוקטים בקוראם טקסט מתמטי (Elbaum-Cohen & Arcavi, 2013):[6]

1. **תרומה עצמאית למהלך הקריאה** – הבעת התייחסות שהקורא "מביא מהבית" והיא משקפת את העדפותיו, תחומי העניין שלו והתרומה שהוא יכול היה לתת אילו כתב את הטקסט. אם נשתמש בשפה הקומוגניטיבית נאמר כי בניתוח קריאת מומחה נמצא ייצוג לשיח המתמטי של הקורא שקדם לשיח שנוצר עם קריאת הטקסט.
2. **פעולות שמשמשות שיח ברמת-על של הקורא עם עצמו מתוך קריאת הטקסט:**
   - ניהול ובקרה של פעולות הקורא – כל מה שהקורא עושה כדי לשלוט בניתוב פעולותיו במהלך העבודה. הניהול והבקרה משפיעים על מצבי ההבנה שהקורא רואה בעצמו, ועם זה גם מושפעים מהם.

6. המחקר נערך בשפה שאינה קומוגניטיבית, והצגת ממצאיו תיעשה בגישה מעורבת.

- מתן ביטוי לחוסר הלימה בין השיח של הטקסט (כפי שהוא ניכר בפרשנות הקורא את הטקסט) ובין השיח של הקורא, או מתן ביטוי לחוסר יכולת ליצור פרשנות קוהרנטית למה שמיוצג בטקסט.
- ביצוע פעולות כדי ליישב את חוסר ההלימה לעיל (למשל, לקרוא מחדש פסקה לא ברורה, או לבדוק דוגמה פרטית שמדגימה טענה שמופיעה בטקסט ועוד).
- הסכמה עם הטקסט, מתן ביטוי לתחושת הבנה וציון בהירות של הטקסט.

3. **מתן ביטוי לממד אַפקטיבי** – הקורא חושף את רגשותיו באשר לטקסט ולתהליך הקריאה. לעתים אלה רגשות של תסכול ואכזבה בשל חוסר יכולת להתגבר על מכשלה, ולעתים אלה רגשות של סיפוק וקורת רוח על התמודדות מוצלחת עם מכשלה ואולי גם התמוגגות מיופי מתמטי.

מתוך האמור לעיל אפשר להתרשם כי מה שמאפיין קריאת מומחים הוא היכולת של הקורא לנהל עם עצמו שיח ברמת-על, ולכן נראה כי בשלב הראשון זו המיומנות העיקרית שעל המורה לטפח בבואה ללמד קריאה של טקסטים מתמטיים.

קיימת ספרות עשירה על אודות שילוב של קריאת מאמרים מדעיים בביולוגיה בתכנית הלימודים. מתוכה עולה כי קריאה של טקסטים מדעיים מסוג APL (Adapted Primary Literature) מטפחת אצל התלמידים מיומנויות של התאמה בין חלקים שונים של הטקסט, ומיומנויות של הענקת משמעות לחלקים מגוונים של הטקסט. כמו כן התלמידים מקבלים הזדמנות לבקר את המאמר וגם להתוודע ממקור ראשון לטבעה של העשייה המדעית (Falk & Yarden, 2009; Yarden, Brill, & Falk, 2001). התבוננות במשקפיים קומוגניטיביים על השיח שנוצר בכיתת לומדי הביולוגיה במהלך קריאה של טקסט מסוג APL תגלה כי התפתחות השיח היא בעיקר ברמת-על.

נשים לב כי בהקשר של קריאת טקסטים מתמטיים שיח ברמת-על יכול לשקף שלושה סוגים שונים של עשייה. ראשית, הקורא מנהל שיח (עם עצמו) ברמת-על על אודות הטקסט, שכן הטקסט מייצג שיח, והתייחסות לשיח כאל אובייקט כמוה כניהול שיח ברמת-על. לכן קיומו של שיח ברמת-על הוא חלק בלתי נפרד מתהליך הקריאה, שבסופו הקורא מייצר פרשנות קוהרנטית של הטקסט הנקרא. שנית, כדי שהקורא יוציא אל הפועל את השיח ברמת-על על אודות הטקסט, או כדי שהוא יוכל לייצר פרשנות קוהרנטית של הטקסט, נהוגים אצל מומחים סוגים שונים של פעולות אשר מסייעות בתהליך הקריאה ומנתבות אותה. הפעולות הללו הן אוסף של רוטינות שאותן מפעילים הקוראים במהלך הקריאה. למשל, עצירה בסוף קטע וניסיון לשחזר אותו; ניסיון לנבא מה יהיה המשך הטקסט; בדיקת דוגמה פרטית כדי ליצור פרשנות קוהרנטית של עיקרון גלובלי או להפך; זיהוי טיעון גלובלי מתוך אוסף של פרטים; קבלת החלטות מתי לעצור ולחזור על קריאה של קטע ומתי להמשיך ולהמתין שהתשובה תגיע בהמשך הטקסט וכן הלאה. עבור המומחים שמיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים הפעולות הללו הן רוטינות שמגדירות את כללי השיח. כדי לאפשר שיח שייצור בסופו של דבר פרשנות קוהרנטית של הטקסט הנקרא, כל מומחה יודע מתי לפעול ואיך. לעומת זאת, הרוטינות הללו אינן מוכרות לתלמידים שהם בבחינת טירונים בקריאת טקסטים. לכן ללמד תלמידים לקרוא טקסטים מתמטיים, פירושו לשנות את השיח שלהם, כך

שאותן רוטינות ששגורות אצל המומחים תהיינה שגורות גם אצלם, ותשמשנה עבורם את כללי השיח בקריאת טקסטים מתמטיים. הדוגמה השלישית והאחרונה שמשקפת שיח ברמת-על בהקשר של קריאת טקסטים מתמטיים נוגעת לשאלה "מהי פרשנות קוהרנטית?". הקביעה מהי פרשנות קוהרנטית של טקסט מתמטי ומהי הגמישות הלגיטימית בקביעה זו, גם הן נשענות על כללי השיח המקובלים בקהילת האנשים שמיומנים בקריאת טקסטים מתמטיים. במחקר זה אתייחס לכללים אלו כאל מובנים מאליהם.

איך מלמדים ניהול של שיח ברמת-על? נקודת המבט הקומוגניטיבית מציעה בניית שיתוף פעולה בהסכמה בין תלמידים ובין מורה שמוליכה אותם צעד אחר צעד. איך פורטים זאת לפרטים? אין זה עיקר המאמר, ולכן אציין כאן בקצרה כי קיבלתי את ההשראה למלאכת ההוראה ולעיצוב הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים מתוך עשייה של עמיתים שלימדו סוגים שונים של פרקטיקות שבתוכן מובנה ניהול של שיח ברמת-על. לדוגמה, הוראת פתרון בעיות מתמטיות (Schoenfeld, 1985; Arcavi, Kessel, Meira, & Smith, 2000) או הוראת מידול מתמטי (Antonius, Haines, Jensen, Niss, & Burkhardt, 2007). כמו כן אפשר להישען על הגות תאורטית שמסכמת את עקרונותיה של הוראה שמטפחת מיומנויות (Collins, Brown, & Newman, 1989). אסכם כי בעיקרון המורה מממשת בהוראתה שלוש פעולות: הדגמה של התנהגות רצויה, בניית סביבה שתאפשר לתלמידים התנסות בסוג זה של התנהגות ונתינת משוב לתלמידים.

מטרת המחקר

המטרה הגלובלית של המחקר הנדון היא בחינת ההיתכנות ואפיון של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים. לשם כך נדרשת הקמת קהילת שיח של מורה ותלמידים שעוסקת בקריאת טקסטים מתמטיים ובחינת מאפייני השיח שנוצר בה. בשל קוצר היריעה אני מבקשת להתמקד במאמר זה בניתוח השיעור הראשון של אחד הקורסים בקריאת טקסטים, ולהדגים מתוך מספר אפיזודות בשיעור זה מהם מאפייני השיח. כמו כן אני מבקשת לבחון את מקומה הייחודי של המורה בתוך קהילת הלומדים. להלן שאלות המחקר שאני מבקשת לענות עליהן במאמר זה:

1. מהם מאפייני השיח בשיעור שבו נלמדת קריאת טקסטים?
2. מה מקומה של המורה בשיח וכיצד פעולותיה תורמות להתפתחותו?

מערך המחקר

תכנון הקורס

ההחלטות לעיצוב הקורס ומאפייניו נגזרו מהספרות המחקרית בתחום (כפי שצוין לעיל). עם זה רוב ההחלטות שהתקבלו בשלב תכנון הקורס להוראת קריאת טקסטים נגזרו משיקולים מקומיים פרגמטיים. הבחירה לעבוד עם תלמידי כיתה י"ב במסלול חמש יחידות לימוד נבעה מכך שאלה התלמידים בעלי המטען המתמטי העשיר ביותר, ולכן יקל למצוא טקסטים שיתאימו ליכולותיהם. כמו כן לכותבת מאמר זה יש היכרות עמוקה עם הוראת מתמטיקה ברמות ובגילים הללו. הצורך לגוון ולהעשיר את התכנים המתמטיים שיוצגו לתלמידים באמצעות טקסטים שונים והזמן המוגבל שעמד לרשות המורה והתלמידים, הביאו לידי חיפוש אחר טקסטים קצרים יחסית, כאלה שאפשר להשלים את קריאתם בשיעור אחד בן 90 דקות (או לכל היותר שני שיעורים). נוסף על ההקפדה על אורכם של הטקסטים ועל תוכנם המתמטי שלא יחרוג מיכולותיהם של תלמידי י"ב במסלול חמש יחידות, הוקפד על בחירת טקסטים "יפים" שפורסמו בספר או בכתב עת. שיקולים אסתטיים לבחירת טקסטים אינם מקריים, הם מייצגים ערכים שאימצה קהילת העוסקים במתמטיקה ובחינוך מתמטי. למשל הוכחת משפט מורכב בדרך פשוטה שדורשת ידע מוקדם מינימלי, או פתרון של בעיה מסקרנת מסוג השונה מהבעיות המקובלות בכיתה וכדומה (Dreyfus & Eisenberg, 1986). אותם ערכים אסתטיים הם חלק ממה שיש להנחיל לתלמידים כדי שיצמחו ויתפתחו כחלק מקהילת העוסקים במתמטיקה.

מחקר עיצוב

כפי שנאמר בהקדמה, המחקר בכללותו מוגדר כמחקר עיצוב ולכן הוא בעל אופי איטרטיבי (Brown, 1992). ההוראה והלמידה נבחנים במספר מחזורים כך שבכל מחזור מיושמים הלקחים מהמחזורים שקדמו לו. משום כך על עיצובו של הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים נעשה מקצה שיפורים אחרי כל התנסות בהפעלתו. מחקר חלוץ מצומצם (קריאת ארבעה טקסטים) בכיתה י"ב של מסלול חמש יחידות יצר את ההתנסות הראשונה. אחריו התקיימו עוד שני קורסים ממושכים יותר בקבוצות קטנות של שלושה-ארבעה תלמידים (שוב תלמידי י"ב במסלול חמש יח"ל), ובסוף כל שלב הוסקו מסקנות לקראת ההפעלה הבאה. במאמר זה אני בוחרת לא להציג את מאפייני המחקר כמחקר עיצוב ולדון בהם, אלא לענות על שאלות המחקר מתוך התעמקות בשיעור יחיד במנותק מתהליך עיצובו.

מורה-מעצבת-חוקרת

כפי שצוין לעיל, כותבת מאמר זה משמשת בשלושה תפקידים מקבילים: מעצבת סביבת הלמידה, מורה וחוקרת. לריבוי התפקידים יש מספר השלכות אפשריות שנובעות בעיקר מהקושי להפריד הפרדה מוחלטת בין התפקידים השונים המצויים אצל אותו אדם. חלק מן ההשלכות הן רצויות, למשל יחסי הגומלין בין המורה ובין המעצבת של סביבת הלמידה יכולים להיות פוריים הן מנקודת המבט של המעצבת והן מנקודת המבט של המורה. המעצבת יכולה להיות נשכרת מניסיונה של המורה בפרקטיקה

של הוראה סטנדרטית ומההיכרות שלה עם תלמידי תיכון ועם המתמטיקה שהם מכירים. המורה יכולה להיות נשכרת מהיכרות עמוקה עם סביבת הלמידה שבתוכה היא צריכה לתפקד. יחסי הגומלין הבעייתיים הם יחסים שבהם מעורבת החוקרת. עיניה של החוקרת צריכות להיות כל הזמן פקוחות לאיתור כל שביב של מידע שיכול להעשיר את ממצאי המחקר. היותה של החוקרת גם מורה מפצל את תשומת הלב שלה בתוך המציאות הנחקרת. כעת עליה מצד אחד לתת מענה לדרישות הסיטואציה החינוכית ולצורכי תלמידיה ומצד שני להתבונן על הסיטואציה החינוכית "מבחוץ" באופן בלתי מוטה, כך ששיקולי המורה אינם מנחים את פעולותיה. תפקידה של המורה הוא תפקיד תובעני (גם בקבוצה של שלושה תלמידים), כי היא צריכה להיות ערנית וקשובה לצורכיהם של התלמידים בכל רגע ורגע. הצורך הנוסף לפקוח בו בזמן גם "עין חוקרת" מקשה על ביצוע מיטבי של שני התפקידים. לכאורה, מימוש תפקיד המורה והחוקרת על-ידי אותו אדם מניב את הגדלת הסיכוי שכל אחד מהתפקידים לא יתבצע היטב. אם כן, נשאלות השאלות מדוע לא להקפיד על הפרדה בין תפקיד המורה ובין תפקיד החוקרת, ומדוע בכל זאת יש חוקרות שבוחרות לחקור את הוראתן הן (Lampert, 1990). אחת התשובות האפשריות על שאלות אלה היא כי דווקא נקודת המבט המיוחדת של המורה החוקרת היא המעניינת שמניבה תובנות שקשה להניב בדרך אחרת. איחוד של הפרסונה הנושאת בתפקידים השונים אמנם מאפשר התנגשות בין התפקידים, אבל גם מאפשר הפריה הדדית ייחודית ביניהם, שאולי לא הייתה מתקיימת אלמלא איחוד התפקידים (Tabach, 2011). מכאן אני מסיקה שאין איסור קטגורי לִהְיוֹת המורה והחוקר אדם אחד. עם זה נראה כי התנאי לאיחוד מוצלח של התפקידים השונים באדם אחד הוא הקפדה על תיעוד מדוקדק מאוד של נקודות המבט השונות כדי שכל תפקיד יישא קול ברור ומובחן. בעבודה שנדונה במאמר זה שלב העיצוב תועד ביומן שמפרט את השיקולים שהביאו לידי קבלת ההחלטות, וכמו כן המורה ניהלה יומן שמתעד את התנסותה בניהול השיעורים. החוקרת קיבלה את היומנים הללו וכן את הקלטות השיעורים והראיונות עם התלמידים כחומר הגלם לעריכת המחקר.

התלמידים

כפי שצוין לעיל, בשני הקורסים המלאים של הוראת קריאת טקסטים מתמטיים נבחנת הוראת קריאה זו בקבוצות קטנות, וזאת כדי לאפשר בחינה לעומק של התהליכים שחווה כל אחד מהמשתתפים. במאמר זה אני מבקשת לעסוק בקבוצה השנייה שבה נלמד הקורס. הקבוצה מנתה שלושה תלמידים (בנים) מאוכלוסייה מבוססת משני בתי ספר תיכון עירוניים בעיר במרכז הארץ, שהגיעו מתוך סקרנות ועניין לקורס שהתקיים במוסד אקדמי באותה עיר. אחד מהתלמידים לומד בכיתה י' והשניים האחרים בכיתה י"ב. אחד מהתלמידים בכיתה י"ב והתלמיד שבכיתה י' השלימו את לימודי המתמטיקה במסלול חמש יחידות ונבחנו בבחינת הבגרות (האחד במסגרת בית-ספרית מואצת והשני למד לבד). השלישי היה תלמיד בכיתה י"ב במסלול רגיל של חמש יח"ל. אפשר לומר מתוך התרשמות של המורה בקורס כי שלושת התלמידים שייכים לחלק העליון של תלמידי מסלול חמש יחידות בארץ.

פדגוגיה

בשיעור הראשון בקורס השתמשה המורה בכלים פדגוגיים מגוונים כדי לתת לתלמידים תמיכה מרבית כשהם פועלים בתוך שיח שכלליו עדיין אינם מוכרים להם. כמו כן התמיכה נועדה להציג לפני התלמידים את כללי השיח שהם יכולים לאמץ.

- הטקסט חולק למספר חלקים כך שכל חלק הוצג לתלמידים רק אחרי שהושלמה קריאתו של החלק הקודם.
- קריאת הטקסט נעשתה בקול רם על-ידי תלמיד שהתנדב לתפקיד.

הכלים הללו נועדו לתת למורה שליטה מרבית על המקום בטקסט שבו נמצאים התלמידים בקריאה (התלמידים לא יכולים להתקדם בחופשיות בקריאת הטקסט). עם זה תלמיד יכול להחליט שחלוקת טקסט לקטעים והשלמת כל קטע לפני שממשיכים בקריאת הקטע הבא, היא אסטרטגיה שהוא בוחר להתמיד בה בשלב שבו הוא הופך לקורא עצמאי.

- הדיון על הטקסט הנקרא התנהל בעל-פה ולא בשימוש בדפי עבודה ובהתבטאות של התלמידים בכתב על הטקסט שקראו. הדיון בעל-פה נועד ליצור חשיפה מרבית של כל תלמיד לשיחים של כל שאר המשתתפים.

בעקבות מאפייני קריאת טקסטים מתמטיים על-ידי מומחים שצוינו בקצרה לעיל, תוכננה ההתערבות המילולית של המורה כך שתקדם ותעודד שיח של התלמידים ברמת-על (על גווניו השונים).

- בראשית הקריאה הנחתה המורה את התלמידים כי מטרת הקריאה היא להפיק מהטקסט את המרב ולהבין אותו ככל שיוכלו, ולכן עליהם לעצור את הקריאה כל אימת שהם מוצאים לנכון.
- המורה השאירה לעצמה את הזכות לעצור את הקריאה משני טעמים, האחד כדי לערוך סיכומי ביניים של הטקסט שנקרא ולעודד את התלמידים לנבא את מה שייקרא בהמשך. השני כדי לשאול שאלות ולוודא שהתלמידים מרגישים כי הם מבינים את מה שהם קוראים.

גם כאן המטרה היא שבאמצעות ההתנסות בדיון במהלך קריאת הטקסט, ייחשפו התלמידים לפרקטיקות שיוכלו לאמץ כשיהיו קוראים עצמאיים.

הטקסט הראשון

הטקסט שנבחר כדי לפתוח את הקורס בקריאת טקסטים מתמטיים הוא מאמר מאת זלמן אוסיסקין מאוניברסיטת מישיגן שפורסם ב-1968 ב-Mathematics Teacher (Usiskin, 1968) (תרגום של המאמר מובא בנספח א). המאמר מגדיר "בעיות שקולות" כבעיות שאפשר לפותרן באמצעות "אותה מתמטיקה".[7] כדי להדגים זאת במאמר מוצגות שש בעיות שהפתרון של כולן כרוך בפתרון המשוואה

7. הביטויים במירכאות הם ניסוחים הלקוחים מתוך הטקסט.

$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ עבור p ו-q שלמים.[8]

נראה כי המטרה העיקרית של המאמר שפורסם בעיתון המיועד למורים, היא להעשיר את עולמם המתמטי של אלה ולקוות שיעשו שימוש בבעיות מסוג זה בכיתתם. שכן כפי שנאמר בו "ניתן להשתמש בקבוצות של שאלות כאלה כדי להדגים את כוחה של פיסת מתמטיקה מופשטת בפתרון של בעיות שבמבט ראשון קשה לראות את הקשר ביניהן". על פניו נראה כי אף שאין על כך הצהרה מפורשת, לפתרון של בעיות מגוונות על-ידי אותו פורמליזם מתמטי יש ערך אסתטי בכל קהילות העוסקים במתמטיקה, ואוסיסקין מבקש לשתף את קוראיו בהתרשמות מהיופי שמוצג במאמר.

המאמר נבחר להיות הטקסט הראשון שנקרא בקורס משלוש סיבות עיקריות: 1. המסר האסתטי שהמאמר מקדם; 2. הפשטות של המתמטיקה שנדרשת כדי להבין את המאמר; 3. כיוון שהמאמר קצר, אפשר למצות את הקריאה בפרק זמן סביר (עד תשעים דקות – שיעור כפול).

כפי שצוין לעיל, האסטרטגיה של הקורס הייתה להתחיל עם תמיכה רבה מהמורה ובהדרגה לצמצם אותה, מתוך בחינה של התנהלות התלמידים ותחושה שהכלים שפורטו לעיל מתחילים להיות מופנמים. חלוקת הקריאה לקטעים שימשה מכשיר פדגוגי שמאפשר ומזמין את עצירת הקריאה למטרות של רפלקציה והתבוננות מסכמת על החלק שנקרא (חלוקת הטקסט מסומנת בנספח א).

כלי ניתוח נתונים

אפיון השיח הקולקטיבי שהתפתח בשיעור יתבצע בניתוח מספר אפיזודות נבחרות על סמך ההבחנות שהמסגרת הקומוגניטיבית מציעה. כלומר זיהוי שיח ברמת האובייקט לעומת זיהוי שיח ברמת-על, וכמו כן אפיון השיח באמצעות ארבעת מאפייני השיח שמציעה הפרדיגמה הקומוגניטיבית: מילות מפתח והשימוש בהן, מתווכים וויזואליים, רוטינות ונרטיבים מקובלים. כמו כן תתמקד ההתבוננות במורה ובדרך שבה היא תורמת להתפתחות השיח.

בתוך ההקשר של השיח המסוים שנבחן כאן, ארבעת מאפייני השיח יכולים להאיר צדדים שונים של מה שהתרחש בשיעור.

מילות מפתח והשימוש בהן: אפשר למיין את מילות המפתח הנוכחות בשיח שנסב על קריאת טקסטים מתמטיים לפי דובריהן: התלמידים, המורה או הטקסט. כל אחד מהמשתתפים תורם לשיח הנוצר מילים שנשאבות מתוך עולמו הפרטי שמשקף את קהילות השיח המגוונות שבהן הוא משתתף. כמו כן אפשר לבחון את מידת העיצום (objectification)[9] שמשקפות המילים שבהן משתמש כל אחד מהמשתתפים בשיח, ואם הן משקפות פעולה או שם עצם.

8. מעניין לשים לב כי המתמטיקה של פתרון המשוואה נמצאת בהחלט בהישג ידם של התלמידים, אך עם זה אפשר לומר במידה רבה של וודאות כי התלמידים לא פגשו משוואה דיופנטית אחת במהלך לימודיהם.
9. אפשר לראות בלימוד מתמטיקה מעבר משיח של פעולות לשיח של עצמים.

מתווכים ויזואליים: אפשר לבחון באיזו מידה נעשה שימוש במתווכים ויזואליים, מי יוזם את השימוש בהם, מה הם מלמדים על העצמים שהם מייצגים ועד כמה המתווכים הוויזואליים שמופיעים בטקסט הופכים להיות חלק מן השיח השגור אצל התלמידים.

רוטינות (שגרות): תבניות שיח שחוזרות על עצמן כאשר בסוף התהליך יהיה מוסכם על המשתתפים בשיח מתי מפעילים את השגרה ומתי יוצאים ממנה. שגרות יכולות לפעול על אובייקטים מתמטיים אך גם יכולות לשמש כנורמות שמארגנות שיח. במחקר המתואר כאן, זיהוי שגרות יכול לתרום לאפיון כללי השיח. בהקשר של קריאת טקסטים, אימוץ של שגרה יכול ללמד אותנו על כללי השיח בתהליך הקריאה. למשל שגרה היא שקובעת מתי לגיטימי להפסיק את הקריאה, או תפקידו של מי לשאול שאלות שעולות במהלך הקריאה ותפקידו של מי לענות עליהן. ייתכן שכאשר השיח נמצא בשלב של היווצרות, השגרות תהיינה בעיקר בולטות בהיעדרן או חסרות כללים ברורים של מתי מפעילים את השגרה ומתי יוצאים ממנה.

נרטיבים מקובלים: נרטיב מקובל בשיח מתמטי הוא אמירה על אובייקט או על יחסים בין אובייקטים שהקהילה מתייחסת אליה כנכונה. בשיח הנוצר כשלומדים לקרוא טקסטים מתמטיים, נרטיבים יכולים להופיע למשל בטקסט עצמו, אבל אז לא ברור האם התלמידים יכולים לקשר בין התואר "מקובל" לנרטיב שמופיע בטקסט. מעניין לבחון מה צריך להתקיים בהקשר הנדון כדי שנרטיב יוכרז כמקובל.

לצד מאפייני השיח שפורטו לעיל, יש לנתח את התכתובים כך שנוכל להבחין בין שיח ברמת אובייקט ובין שיח ברמת-על. כפי שצוין לעיל, שיח ברמת-על יכול להופיע בדרכים מגוונות. אעסוק בשני סוגים עיקריים: ראשית, כל תגובה תקשורתית על אלמנט של שיח היא "שיח על שיח" ולכן שיח ברמת-על. אפשר לשער מלכתחילה כי קריאת טקסט מתמטי היא פעולה שמזמינה שיח ברמת-על, שכן מן הראוי שהקורא יגיב על טקסט (שיח מתמטי) שהוא קורא. שנית, שיח ברמת-על יכול להיות כל תגובה על כללי השיח שמתנהל, ומכיוון שהשתתפות פעילה בשיעורים שמושאם הוא קריאת טקסט היא פרקטיקה שאינה שגורה אצל התלמידים, הרי שצפוי כי כללי השיח והדיון בהם יעלו אל פני השטח.

חשוב לציין כי ארבעת מאפייני השיח וההבחנה בין שיח ברמת אובייקט ושיח ברמת-על הם בבחינת כלים מתודולוגיים שמטרתם לשרת את המחקר בתוך הקשרו הייחודי. אין הכוונה לערוך סקירה שיטתית של מילות מפתח, שגרות וכדומה ובכך לראות את אפיון השיח הנוצר. הציפייה היא שבמהלך התבוננות בתכתובים יהיה אפשר לבחור את הכלים המתאימים ביותר כדי להוציא לאור את עיקרי הדברים.

ניתוח וממצאים

להלן אציג את ניתוחם של כמה קטעים מתוך התכתוב של השיעור הראשון בקורס השני שבאמצעותו הוסקו מאפייני השיח שמתפתח בתוך קבוצה שלומדת לקרוא טקסטים מתמטיים. הקטעים מוצגים לפי סדר התרחשותם:

קטע ראשון

הקטע להלן נלקח מתחילת הקריאה בשיעור הראשון. התלמידים הונחו לקרוא בתורם בקול רם, ולעצור את הקריאה ולשאול שאלות כל אימת שימצאו לנכון. כל שמות התלמידים המופיעים בקטעים הבאים הם שמות בדויים. אורן בחר להיות הראשון שיקרא את הטקסט בקול רם לפני הקבוצה.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
47	אורן	"במאמר זה שתי בעיות נקראות שקולות אם אפשר לפתור אותן בעזרת אותה מתמטיקה. בעיות שקולות מדגימות את אחת התכונות החשובות ביותר של המתמטיקה היכולת להשתמש במושג תאורטי אחד כמודל עבור רעיונות שונים." להמשיך?
48	מורה	מישהו רוצה לשאול משהו? יש כאן משהו ש...
49	יוני	א...יש לי שאלה.
50	מורה	אהמ
51	יוני	אהמ... כשמתכוונים "בעזרת אותה מתמטיקה" למה בעצם מתכוונים? כאילו, באותם כלים מתמטיים?
52	מורה	בשלב הזה אני לא יודעת אם זה כתוב כאן. אולי זה דבר ש...יובהר בהמשך.
53	יוני	אוקיי
54	מורה	אהמ... כי, כי הוא לא אמר את זה, הוא אמר... מין פסקת פתיחה כזאתי ש...ש...הוא לא הבהיר. אם יהיו לנו שאלות בהמשך אולי ננסה להבין לפי מה שנאמר כאן.
55	אורן	אפשר ל... "אפשר בקלות לייצר דוגמאות לכך. אם המושג התאורטי הוא לדוגמה צירופים, כמו בהסתברות, ניתן להשתמש במושג זה כדי לקבוע את חוקי מנדל בביולוגיה, לחשב מקדמים בינומיים, לחשב הסתברויות של משחקי קלפים, למצוא את ה.. את מספר המצולעים מסוגים שונים עם נקודות אקראיות כקודקודים, וכן הלאה, כמעט ללא הגבלה. אבל..."
56	מורה	שנייה שנייה... אהמ... יוני... זה ענה במשהו על "למה הכוונה?"
57	יוני	אהמ... נראה לי... שכאילו ש...אני חושב שכן שבגלל שכאילו... אהמ... מושגים מסוימים שכאילו הגדרות מסוימות בכל מיני דברים יכולים להשתמש לכל מיני...
58	דן	לפי דעתי זה לא ענה על כך.

נשים לב שבפתיחת המאמר כמעט שאין אזכור של מושגים מתמטיים, אלא בעיקר הנחת המסגרת לסיפור שיסופר בהמשך. אורן התחיל בקריאה ואף שהמורה נתנה הנחיה לעצור את הקריאה כל אימת שהתלמידים מוצאים לנכון לעשות זאת, אורן לא היה בטוח אם הוא רשאי לעצור, והוא שאל את המורה האם להמשיך בקריאה. המורה בירורה אם יש למישהו שאלה (48), וזאת כדי להזכיר שזהו הסימן שיהיה מקובל על קבוצת הקוראים להפסקת קריאה מצד אחד, ומצד שני להשאיר סימן שאלה בסוף האמירה שלה, כלומר בסופו של דבר זו תהיה אחריות של התלמידים לקבוע מתי עוצרים ומדוע. בהקשרים אחרים שאלה כזאת של מורה יכולה להיות רמז "עבה" לכך, שיש כאן מקום להבהרות והסברים. לעומת

זאת, במקרה זה שיקפה המורה את העצירה של אורן והדגימה לתלמידים מה המשמעות של עצירה שכזאת. אפשר לראות בפעולה זו של המורה ניסיון לקדם את התהליך של יצירת כללי שיח מקובלים (רוטינות) אצל קהילת הקוראים.

הפסקת הקריאה שיזם אורן יצרה דיון קצר בפסקה שפותחת את הטקסט. יוני שאל (51) למה מתכוונים כשאומרים "בעזרת אותה מתמטיקה". בשלב זה של הלימוד (יש להזכיר כי אנחנו נמצאים בראשיתו של השיעור הראשון) שאלות התלמידים, של אורן בהתחלה וכעת של יוני, הופנו אל המורה. המורה בחרה לענות על שתי השאלות שהופנו אליה בשאלות משלה, בעיקר כדי להדגיש שבסיטואציה הנוכחית יש עוד אפשרויות לקבלת תשובה. למשל תשובתה על השאלה של יוני היא בעצם הפניה לחפש את התשובה בטקסט עצמו. שוב כמו קודם, אפשר לראות בפעולת המורה משהו שנועד לקדם התפתחות של כללי שיח. כשקוראים טקסט ומתעוררת שאלה, אפשר לחפש את התשובה עליה בטקסט עצמו. יתרה מזו, אם לא מוצאים את התשובה בטקסט בשלב הזה, אפשר לחפשה במה שנאמר בו בהמשך, והחיפוש הזה צריך להיות אקטיבי. אחרי קריאת הפִּסקה הבאה המורה עוצרת את הקריאה ומעודדת את יוני לברר האם שאלתו שלא קיבלה מענה בפסקה הראשונה, מקבלת מענה כעת. המורה שוב מעודדת את התלמידים לקיים קריאה אקטיבית שמחפשת בטקסט תשובות על שאלותיהם. אפשר להגיד שהמורה מבקשת להנחיל לתלמידים את כללי השיח בדרך "רכה", שכן אין כאן הנחתת כללים נוקשים, אלא הצעה לאימוץ הליכים. התלמידים בשלב זה רשאים לאמץ את הכללים או לדחותם, אך הם חייבים לחוות אותם.

קטע שני

הקטע להלן לקוח מתוך קריאת שש הבעיות שכותב המאמר מתכוון לפתור בעזרת "אותה מתמטיקה" (כפי שצוין לעיל).

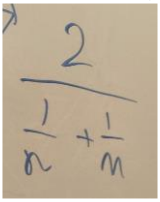
תור דיבור	דובר	מה נאמר
76	אורן	"בעיות. להלן שש בעיות שקרובות לקיום שלוש הדרישות. הביעו את חצי כסכום של שני שברי יחידה. שבר יחידה הוא מהצורה אחד חלקי n כאשר n הוא שלם חיובי. א... שתיים. מצאו את כל המלבנים בעלי אורכי הצלעות שהם מספרים שלמים אשר שטחם שווה מספרית להיקפם."
77	מורה	למה הם אומרים מספרית?
78	יוני	א... כי... זה יחידות שונות.
79	מורה	אוקיי. יש לנו פה שטח לעומת היקף. אז... השוויון יכול להיות רק שוויון מספרי.
80	אורן	אהמ
81	מורה	אוקיי

הקטע לעיל מדגים כי מעורבות המורה בדיון אינה לובשת גוון אחיד. היא לא מעבירה את ניהול השיח (קביעה מתי עוצרים ועל אילו שאלות עונים) לתלמידים. היא שומרת לעצמה את הרשות לעצור ולשאול לפי ראות עיניה. בקטע המוצג לעיל הפנתה המורה את תשומת לבם של התלמידים לצירוף מילים אחד בטקסט (שווה מספרית) שמעניין לגלות מה משמעותו. התשובה על שאלת המורה לא נמצאת בטקסט שנקרא, ולכן אפשר לראות בשאלה זו הדגמה לסוג אחר של רגישות בקריאה שכדאי שהתלמידים יפתחו

כשהם לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים. במובן מסוים התלמיד נדרש לנהל שיח עם הפרשנות שלו עצמו לטקסט שהוא קורא, ועליו לבחון בכל שלב ושלב האם זו יוצרת תמונה קוהרנטית של הטקסט. לכאורה נראה כי העצירה של המורה בתור 77 יכולה לעודד סוג זה של רגישות שחיונית לעיצובה של פרשנות קוהרנטית לטקסט.

קטע שלישי

הקטע להלן עוסק באובייקט מתמטי שמופיע בטקסט.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
82	אורן	לאילו זוגות של שלמים חיוביים יש ממוצע הרמוני שגודלו ארבע? א... מה זה ממוצע הרמוני?
83	דן	שתיים חלקי אחד חלקי n ועוד אחד חלקי m.
84	אורן	לא יודע
85	יוני	שנייה
86	דן	שתיים חלקי... את רוצה להתכבד ולרשום?
87	מורה	לא לא מה פתאום?
88	דן	(קולות של כתיבה על הלוח) 

בקריאת הבעיה השלישית אורן לא הכיר את המושג "ממוצע הרמוני" ולכן עצר את הקריאה ושאל. מעניין לשים לב כי העצירה של אורן שונה מהעצירה של המורה בקטע הקודם. כאן המושג "ממוצע הרמוני" לא מוכר לאורן ולכן הוא שואל מה פשרו. לעומת זאת העצירה הקודמת שיזמה המורה כוונה לביטוי שלכאורה אינו זר לתלמידים, ולכן עצירתה הדגימה להם שגם כשנדמה לנו שאין מקום לתהיות, ייתכן שאפשר להעניק לטקסט משמעות שלא בלטה בקריאה ראשונה. נראה ששאלתו של אורן לא לוותה במבוכה מסוג כלשהו, ושמתן הלגיטימציה לשאול שאלות מתממש. המושג "ממוצע הרמוני" לא נלמד בתכנית הלימודים (זו מילת מפתח שנעדרת מהשיח הבית-ספרי), לכן המורה צפתה מראש את הקושי שיתעורר ותכננה לנהוג לפי אחת משתי אפשרויות: לתת לתלמידים את הנוסחה שמגדירה ממוצע הרמוני, או להמליץ לפניהם להתאזר בסבלנות עד שההגדרה תופיע בטקסט עצמו. המורה לא ציפתה שאחד התלמידים יכיר מראש את הגדרת המושג,[10] וזו הייתה הפתעה משמחת לגלות שדן השתתף בעברו בשיח מתמטי עשיר והוא הרגיש בטוח בעצמו לתרום לשיח הנוכחי ולהעשירו. הוא מצא לנכון להבהיר את המושג "ממוצע הרמוני" במתן ייצוג ויזואלי וכתיבת הנוסחה על הלוח.

10. התלמיד לא היה יכול לקרוא את ההגדרה מהטקסט, שכן הקריאה נעשתה בחלקים והחלק הרלוונטי עדיין לא חולק לתלמידים.

מעניין להתבונן במקומה של המורה בתוך האינטראקציה הסובבת על השאלה של אורן והתשובה של דן. לכאורה המורה מיותרת כאן, היא לא יזמה את השאלה והיא לא ענתה עליה. למרות זאת, אולי כהומאז' לתפקיד המסורתי של מורה בכיתתה (או אולי בציניות), ביקש דן להעניק למורה את הכבוד לרשום את הנוסחה על הלוח. המורה סירבה, אולי כדי להדגיש שמקומה בשיח הנוכחי שונה במובן מסוים ממקומה המסורתי בכיתה שלומדת מתמטיקה. אפשר לומר שתפקידה של המורה כאן הוא לדעת מתי להיעלם ולהזמין את התלמידים שימלאו את החלל.

נתמקד כעת במילים "ממוצע הרמוני" שמייצגות אובייקט מתמטי שהטקסט נשען עליו. התשובה של דן על שאלתו של אורן כללה את ההגדרה הפורמלית של ממוצע הרמוני או במילים אחרות, בהינתן שני מספרים טבעיים, איך אנחנו מחשבים את הממוצע ההרמוני. במקרה זה המילים ותיווכן הוויזואלי מייצגים את פעולת החישוב. בהמשך, כפי שנראה בקטע הרביעי שלהלן, יוני מבקש לקבל מאפיינים נוספים של האובייקט המתמטי "ממוצע הרמוני".

קטע רביעי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
89	יוני	כן, אבל מה זה אומר?
90	דן	זה הממוצע ההרמוני של m ו-n
91	מורה	אה, זה m ו-n ?
92	דן	כן
93	מורה	אוקיי
94	יוני	זה ההגדרה של ממוצע הרמוני? אבל מה זה... מה זה בעקרון אומר? כאילו בסדר נוסחה, אבל מה זה אומר?
95	דן	אה, אתה שואל אותי שאלה קשה.
96		(צחקוקים ברקע)
97	דן	כן... ממוצע כמו שיש לך ממוצע חשבוני, כמו שאני אגיד לך m ועוד n חלקי שתיים, למה אני קורא דווקא לזה ממוצע. כי במקומות מסוימים זה תוצאה מאוד מעניינת.
98	יוני	אז...
99	דן	וגם זה במקומות מסוימים אחרים תוצאה מאוד מעניינת. לכן קבעו את זה כממוצע הרמוני לראות שיש אי שוויוניים נורא יפים שבהם זה... נכנס. אז זה למה נתנו לזה שם מיוחד, זה הכול.

יוני לא הרגיש מסופק מהגדרת המושג "ממוצע הרמוני" שנתן דן. הוא רצה לדעת "מה זה אומר?" אפשר לפרש את האמירה של יוני כמיהה להיכרות עמוקה יותר עם המושג המתמטי "ממוצע הרמוני" מתוך אמונה שיש למושגים מתמטיים משמעות שחורגת מהגדרתם הפורמלית.[11] גם כאן, כמו במקרה של דן, אפשר לראות שהשיח המתמטי של יוני הוא עשיר ובין כלליו יש רוטינות של העמקה במימוש (ריאליזציה) של מושגים מתמטיים חדשים. נראה שיוני רצה להכיר היטב את המושגים המתמטיים שהטקסט מציג לפניו. אפשר לחשוב על מספר כיווני העמקה, למשל מהו מקור השם "ממוצע הרמוני"?

11. אפשר לראות בכך ניסיון להרחיב ולהעמיק את עץ המימושים של המושג "ממוצע הרמוני" (Sfard, 2008).

איזה ייצוג גאומטרי עשוי להיות לממוצע ההרמוני של שני קטעים שאורכיהם m ו-n, וכיוצא באלה. דן ש"הרגיש טוב" עם העובדה שהוא הכיר את ההגדרה של המושג, לא ידע לענות על שאלתו של יוני וזה העמיד אותו, ואולי גם את הסובבים אותו, במבוכה מסוימת (ראו תורות 95-96). דן מיד התעשת ונקט גישה מינימליסטית יותר. מבחינתו, אם קיימת הגדרה של מושג מתמטי, כנראה שיש דברים מעניינים להגיד עליו. בשלב זה תפקידה של המורה היה להחליט באיזו דרך להמשיך את הדיון. האם להמשיך את הקו שהתווה יוני ולחפש במקורות חיצוניים את המשמעות הנסתרת של הממוצע ההרמוני או להסתפק בהגדרה האלגברית. ההחלטה של המורה נבעה ממגוון של שיקולים והנחות מוקדמות. בקורס הזה המטרה העיקרית היא קריאת הטקסט היטב, ובו בזמן טיפוח מיומנויות של קריאת טקסט אצל התלמידים. בהקשר רחב יותר הכמיהה של יוני להעמקה היא כמיהה לגיטימית ורצויה והמסר החינוכי בדרך כלל צריך לעודד התנהגות כזאת. ייתכן שבקורס אחר אפשר להעלות על הדעת מצב שבו מורה תשתמש בקריאת טקסט גם כדי להעמיק בהכרת מושגים מתמטיים שקשורים בדרך כלשהי לאותו טקסט. אבל זה לא היה המצב בקורס שמתואר במאמר זה. כאן מכיוון שהמטרה העיקרית היא ללמד את התלמידים לקרוא היטב את הטקסט, הוחלט כי הכרת המושגים שמופיעים בטקסט תיעשה במידה שהיא משרתת את קריאת הטקסט.[12] המורה שמכירה את הטקסט של אוסיסקין, יודעת שקריאה מיטבית של הטקסט יכולה להתקיים גם בלי להעמיק במשמעות המושג ממוצע הרמוני, ולכן היא מאפשרת התדיינות קצרה של התלמידים (בהמשך הקטע שלא מצוטט כאן) ומורה על המשך הקריאה. אפשר להסיק מכאן, שבשיח שנסב על קריאת טקסט מתמטי, ההעמקה בפרשנות של המילים והמושגים שמוצגים בטקסט נעשית מתוך דיאלוג עם הטקסט, ונגזרת מהשימוש שנעשה בהם בטקסט.[13] אילו בתוך השיח שמיוצג בטקסט הייתה נדרשת משמעות מעמיקה של המושג, הצורך הזה היה גורר היערכות מתאימה מצד המורה. בקורס המתואר במאמר זה נבחרו הטקסטים כך שלא תידרש התעמקות נוספת על השיח המקובל בלימודי מתמטיקה בכיתות י"ב של מסלול חמש יחידות לימוד. ההתנסות שמודגמת בקטע לעיל מלמדת שיש תלמידים שהשיח המתמטי שלהם עשיר ואִתם אפשר לשקול, בהינתן הזמן המתאים, את הרחבת השיח שנרקם סביב קריאת הטקסט גם למקומות רחוקים יותר.

קטע חמישי

הקטע שמצוטט להלן התרחש אחרי סיום קריאת החלק הראשון של הטקסט (חלוקת הטקסט לקטעים מצוינת בתוך הטקסט שבנספח).

12. ההחלטה לא להעמיק במשמעויותיהם של מושגים מסוימים אין בה כדי לרפות את ידיהם של התלמידים להמשיך ולשאול שאלות העמקה. ההחלטה אם לענות עליהן נשארת בשלב זה בידיה של המורה.
13. ייתכן שיש כאן מקום לגישה ביקורתית כלפי ההחלטה של המורה ובירור האם היה אפשר להעביר לתלמידים את ההחלטה האם להעמיק או לא להעמיק במשמעות של "ממוצע הרמוני", אך דיון זה חורג מגבולות המאמר.

תור דיבור	דובר	מה נאמר
199	מורה	אוקיי. אהמ... אז אז... קראנו את החלק הראשון. יש לכם איזושהי סברה. לאן אנחנו הולכים מכאן?
200	דן	תכלס... מממ
201	מורה	מה? איך ימשיך המאמר הזה?
202	דן	סליחה. איך הוא ימשיך? למה הכוונה?
203	מורה	כן כן. כאילו קראנו את החלק הראשון. יש לנו עוד.. א.. ארבעה חלקים. ואני, כאילו לפני שאני פורשת לכם את כל ה... ה... מאמר הזה אני סקרנית לדעת... א... מה נראה לכם? מה הולך להיות השלב הבא?
204	דן	אהמ... יסביר אולי למה הבעיות הן שקולות?
205	מורה	אוקיי, בשביל להסביר שהבעיות הן שקולות, מה הוא צריך לעשות?
206	דן	לפתור אותם?
207	יוני	אולי להראות כאילו שיש קשר בין כל מיני תחומים שהם לא בהכרח קשורים למתמטיקה, שהם... שהקשר ביניהם נעשה דרך המתמטיקה.
208	דן	אוו... להראות מקרה כללי.
209	יוני	זה גם
210	דן	לפתור אותם?
211	מורה	אוקיי... אוקיי אהמ. אז יש לנו כאן השערות. אפשרות אחת אמרנו... א... לפתור את הבעיות. אחר כך להראות א... שזו אותה מתמטיקה. פספסתי משהו?

בקטע זה אנו רואים כי המורה ניסתה לגרום לתלמידים להתבונן התבוננות רפלקטיבית על מה שהם קראו כדי לצפות מראש את מה שיופיע בהמשך הטקסט, ובכך לתת הזדמנות לקיום שיח ברמת-על על אודות מה שנאמר בטקסט ומה שייאמר בו בהמשך. אפשר לראות בכך ניסיון לטעת שגרה שתלווה את התלמידים בכל פעם שיקראו טקסט מתמטי. השגרה תהיה מורכבת מהתחלה שמסומנת ברגע שמסיימים לקרוא קטע מובחן בטקסט, מניסיון לנבא מה יהיה בחלק הבא של הטקסט ולאחר מכן בדיקה האם הניבויים מתאימים למה שכתוב בטקסט. הרוטינה הזו אינה חלק מהמיומנויות שהתלמידים מכירים, ולראייה דן שואל בתור 202: "למה הכוונה?". לכן בשלב זה המורה היא שמעוררת את הדיון וגם מרכזת את מסקנותיו. השערות התלמידים נרשמו על הלוח ואחרי קריאת החלקים השני והשלישי של הטקסט (החלקים שבהם מתבצעת הרדוקציה של הבעיות לְמה שנקרא במאמר "אותה מתמטיקה"), יזמה המורה דיון על אותן השערות. להלן ראשיתו של הדיון:

קטע שישי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
460	מורה	אוקיי... אז... מישהו מוכן בבקשה להגיד לי... אם... הוא ענה על ההשערות שלנו.
461	יוני	א... על הלפתור הוא ענה.
462	מורה	באמת?
463	יוני	כאילו הוא ענה... הוא ענה את ה...
464	אורן	הוא לא פתר
465	יוני	הוא לא פתר, הוא פתר את זה בכלליות... הוא נתן את זה... הוא נתן א... פתרון כללי

תור דיבור	דובר	מה נאמר
466	דן	הוא הראה שהבעיות שקולות
467	יוני	כן
468	אורן	אהמ
469	מורה	הוא הראה שהבעיות שקולות זאת אומרת שהוא עשה את שתיים. נכון?
470		(דיבור בערבוביה)
471	יוני	אז לפתור לא
472	מורה	אבל הוא לא פתר. נכון?
473	יוני	לא

בקטע לעיל נראה שיוני לא הבחין בין העמדת הבעיות על "אותה מתמטיקה" ובין פתרונן. המורה לא מכריעה הכרעה חד-משמעית האם, כפי שטען יוני, פתר הטקסט את הבעיות. תחת זאת היא שאלה "באמת?" כדי לטעת ספק בקביעה של יוני. לאחר מכן אורן שלל את קביעתו של יוני, ודן ניסח את דעתו כי הטקסט הראה שהבעיות שקולות. תיעוד השערות התלמידים והדיון בהן אחרי קריאת הקטעים הרלוונטיים נתנו לתלמידים הזדמנות לנסח במילותיהם שלהם את מה שקראו ולעמת את הפרשנות שלהם עם ההשערות המתועדות. ניהול שיח על אודות השיח שמיוצג בטקסט מאפשר לתלמידים לקיים בקרה על הפרשנות שלהם לגבי הטקסט. בשלבים הראשונים של הקורס המורה היא שניהלה את הדיון והשתתפה בתהליכי הבקרה בקוותה שככל שיתקדם הקורס ותתפתח מיומנות התלמידים בקריאה, הם יוכלו לממש בעצמם שגרות של בקרה על הפרשנות שלהם לגבי הטקסט. אפשר לראות בהליך שתואר לעיל דוגמה להוראת כללי שיח בקריאת טקסטים מתמטיים.

סיכום

ההתבוננות במשקפיים קומוגניטיביים בשיעור ראשון בקורס של קריאת טקסטים מתמטיים מלמדת על מאפייני השיח הנוצר של קהילת הלומדים ועל הפעולות שהמורה נוקטת כדי לקדם את התפתחותו הרצויה. להלן אענה על שאלות המחקר על סמך הממצאים.

שאלה ראשונה: מהם מאפייני השיח בשיעור שבו נלמדת קריאת טקסטים?

חשיפת רמות השיח השונות שיוצאות אל הפועל אצל קהילת הלומדים מלמדת על נוכחות בולטת של שיח ברמת-על לסוגיו השונים. נוכחותו של שיח ברמת-על, שבו מתייחסת קהילת הלומדים לטקסט, היא מובנת מאליה כאשר לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים (ראו את הקטע השישי כולו). עם זה סוג מסוים של עיסוק במה שנאמר בטקסט כרוך בהחצנה של הקורא את תחושת ההבנה שלו, למשל שאלתו של יוני בקטע הראשון (תור 51). כיוון שזהו השיעור הראשון, השאלה הזאת צומחת מתוך יוזמה של המורה ומכוונת אל המורה, אבל יש לראות בה ניצן לתופעה שתלך ותתעצם בהמשך הקורס. בסופו של דבר, על התלמידים לגלות רגישות לתחושת ההבנה שלהם את הטקסט ולתת לה ביטוי פומבי. כמו כן אפשר

לראות בשיעור זה את ראשיתו של תהליך שבו התלמידים מגלים שהרוטינות שהם רגילים אליהן מבית הספר (המורה היא השואלת את התלמידים, שאלות התלמידים מופנות אל המורה) מוחלפות אט-אט ברוטינות (או בכללי שיח) שמגדילות את אחריותו של התלמיד ליצור פרשנות קוהרנטית לטקסט שהוא קורא.

שאלה שנייה: מה מקומה של המורה בשיח וכיצד פעולותיה תורמות להיווצרותו?

מקומה של המורה בשיח שנוצר שונה ממקומה המסורתי בכיתה בית-ספרית. אם בכיתה בית-ספרית רגילה המורה היא היוזמת של כל אחד מרכיבי השיעור והאחראית על הוצאתם אל הפועל, הרי שבשיעור שבו לומדים לקרוא טקסטים מתמטיים, כוחה של המורה הוא לעתים ביכולת שלה לתת לדברים להתנהל ללא התערבותה. המורה יכולה לצעוד "צעד אחורנית" גם (ואולי בעיקר) כאשר הדברים לא התנהלו כמתוכנן ולתת לתלמידים להתנסות לבד בניהול השיח. דוגמה לכך אפשר לראות בקטעים השלישי והרביעי שבהם המורה מאפשרת לתלמידים ללבן בינם ובין עצמם מהו ממוצע הרמוני והאם ההגדרה שנתן דן היא הגדרה מספקת.

ההתמקדות בפעולותיה של המורה (להבדיל מהמקומות שבהם היא בולטת בהיעדרה) חושפת שתי גישות שבאמצעותן היא מבקשת להפוך את התלמידים לשותפים בקהילת קוראי הטקסטים המתמטיים. גישה אחת כרוכה בהפעלת התלמידים לפי כללי השיח המקובלים בקהילה. למשל, בקטע החמישי המורה מבקשת מהתלמידים לשער מה יופיע בהמשך הטקסט, ובקטע השישי היא מבקשת מהם לבדוק האם השערותיהם אכן מתאימות לטקסט שקריאתו הושלמה. ההנחיה המפורשת של המורה היא שמביאה את התלמידים לידי התנסות פעילה בהתבוננות רפלקטיבית, שהיא אחת מעמודי התווך של קריאת טקסטים. גישה נוספת מכוונת את התלמידים לאימוץ כללי השיח המקובלים בקריאת טקסטים מתמטיים מתוך התבוננות במורה שמדגימה את השימוש בהם כחלק שוטף מהשתתפותה בשיח. במילים אחרות, התנהלות המורה כקוראת של טקסט מתמטי יכולה לשמש מודל עבור התלמידים. המורה מדגימה לתלמידים כלים שיסייעו בידם לבנות פרשנות קוהרנטית של הטקסט שהם קוראים (למשל עצירת הקריאה בראשית הקטע השני או המשך הקריאה בתור 52 בקטע הראשון כדי למצוא את התשובה על הקושי בהמשך הטקסט). הדגמת השימוש בכלים הללו מעודדת את התלמידים לעצור ולקיים רפלקציה בעצמם על הפרשנות המתהווה של הטקסט. נוסף על כך, בכל שלב המורה מציבה מראה לפני התלמידים ומשקפת את הדרך שבה הם פועלים ומפרשים את הטקסט (למשל השאלה בתור 56 בקטע הראשון או תור 462 בקטע השישי), ובכך היא מקדמת את המיומנויות הרפלקטיביות שלהם. ההנחה הסמויה היא שכל תלמיד בסופו של דבר יאמץ לעצמו את ההתנהגויות והשגרות שמצד אחד מתאימות לו עצמו, ומצד שני תאפשרנה לו השתתפות פעילה ותורמת בשיח של העוסקים במתמטיקה דרך קריאת טקסטים.

רשימת מקורות

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M., & Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the teacher. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Ed.), *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 295-305). New York: Springer.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., & Smith, J. P. (2000). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 1-70). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Éducation et Didactique, 1*(3), 123-142.

Brown, A. L. (1992). Design experiment: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986, February). On the aestheticsof mathematical thought. *For the Learning of Mathematics, 6*(1), 2-10.

Elbaum-Cohen, A., & Arcavi, A. (2013). *Characterization of reading mathematical texts by experts*. Unpublished manuscript, Weizmann Institute of Science.

Falk, H., & Yarden, A. (2009). "Here the scientists explain what I said." Coordination practices elicited during the enactment of the results and discussion sections of adapted primary literature. *Journal in Science Education, 39*(3), 349-383.

Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions.* Chicago: University of Chicago press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not a question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to utopia. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Charlotte, NC: Information Age.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando , Florida: Academic Press.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 393-413.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating.* Cambridge: Cambrige University Press.

Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. In D. Scott, & E. Hargreaves (Eds.), *The sage handbook of learning* (pp. 129-138). London: Sage.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? – Early numerical thinking revisited. *Cognition and Insrtuction, 23*(2), 237-309.

Tabach, M. (2011). The dual role of researcher and teacher: A case study. *For the Learning of mathematics, 31*(2), 32-34.

Usiskin, Z. (1968, April). Six non trivial equivalent problems. *The Mathematics Teacher, 61*(4), 388-390.

Yarden, A., Brill, G., & Falk, H. (2001). Primary literature as a basis for a high-school biology curriculum. *Journal of Biological Education, 35*(4), 190-19

אביטל אלבוים-כהן

מורה למתמטיקה בתיכון על שם אהרון קציר ברחובות. בוגרת המחזור הראשון של תכנית רוטשילד-ויצמן למורים. משלימה בימים אלה את כתיבת עבודת הדוקטורט שלה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע. העבודה עוסקת בנושא "הוראה ולמידה של קריאת טקסטים מתמטיים בתיכון" בהנחיית פרופסור אברהם הרכבי.

נספח א

שש בעיות לא טריוויאליות שקולות[1]

מאת זלמן אוסיסקין[2]

במאמר זה שתי בעיות נקראות *שקולות* אם אפשר לפתור אותן בעזרת *אותה* מתמטיקה. בעיות שקולות מדגימות את אחת התכונות החשובות ביותר של המתמטיקה, היכולת להשתמש במושג תיאורטי אחד כמודל עבור רעיונות שונים.

אפשר בקלות לייצר דוגמאות לכך. אם המושג התיאורטי הוא לדוגמא "צירופים" כמו בהסתברות, ניתן להשתמש במושג זה כדי לקבוע את חוקי מנדל בביולוגיה, לחשב מקדמים בינומיים, לחשב הסתברויות של משחקי קלפים, למצוא את מספר המצולעים מסוגים שונים עם נקודות אקראיות כקדקודים, וכן הלאה, כמעט ללא הגבלה.

אבל קשה ליצור דוגמאות טובות כאשר נדרשות בעיות שקולות בטווח מצומצם יותר, או כאשר ב"אותה מתמטיקה" אין הכוונה למתמטיקה מאותו תחום או נושא שעושָה שימוש באותם רעיונות. כדי לדייק, אני מנסה למצוא בעיות שמקיימות את התנאים הבאים:

1. הבעיות צריכות להיות *זהות* מבחינה מתמטית, עד רמת המספרים בהם משתמשים כדי לפתור את הבעיות.
2. עד שלב הפתרון אי אפשר למצוא בבעיות עצמן רמזים להֱיוֹת הפתרון זהה. הבעיות צריכות להיות, עד כמה שניתן, מנושאים זרים בַּמתמטיקה או ביישומיה
3. הבעיות צריכות להיות בתוך גבולות המתמטיקה של בית הספר התיכון. ככל שהבעיות פשוטות יותר כן ייטב.

בעיות

להלן שש בעיות שקרובות לקיום שלוש הדרישות.

1. הביעו את $\frac{1}{2}$ כסכום של שני שברי יחידה. (שבר יחידה הוא מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר n הוא שלם חיובי.)
2. מצאו את כל המלבנים בעלי אורכי צלעות שהם מספרים שלמים אשר שטחם שווה מספרית להיקפם.
3. לאילו זוגות של שלמים חיוביים יש ממוצע הרמוני שגודלו 4?
4. מכפלתם של שני מספרים שלמים חיובית ושווה לפעמיים סכומם. מצאו את כל זוגות השלמים האפשריים.
5. בהינתן נקודה P, מצאו את כל המספרים הטבעיים n כך ששטח שמסביב ל-P יתמלא במצולעים משוכללים חופפים בעלי n צלעות כך שהמצולעים לא יכסו אחד את השני.
6. עבור אילו שלמים חיוביים $n>2$ הביטוי $n-2$ מחלק את $2n$?

יתכן וכבר הצלחתם להבין כי פתרון חלק מהבעיות הללו דורש מתמטיקה זהה. אם כך, תנאי מספר 2 לא מתקיים עבורכם. אני מקווה כי רוב הקוראים יגלו בהפתעה את השקילות המתמטית של הבעיות. **סוף חלק ראשון**

כדי להראות את השקילות, נראה כי פתרון כל אחת מהבעיות עומד על פתרון המשוואה שמאפיינת את הבעיה הראשונה.

רדוקציה של הבעיות

בעיה 1

אם $\frac{1}{2}$ הוא הסכום של שני שברי יחידה, אז $\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$, כאשר p ו-q הם שלמים חיוביים. (את המשוואה נפתור בשלב מאוחר יותר.)

בעיה 2

נסמן ב-l וב-w את האורך והרוחב של המלבן המבוקש. מכיוון שהשטח וההיקף שווים מספרית, מתקיים

$$2l + 2w = l \cdot w$$

$$\Rightarrow 2(l + w) = l \cdot w$$

$$\Rightarrow \frac{l+w}{l \cdot w} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{w} = \frac{1}{2}$$

מכיוון ש l ו- w הם שלמים חיוביים, המשוואה שקיבלנו היא מאותה צורה כמו המשוואה של בעיה 1.

בעיה 3

הממוצע ההרמוני של שני מספרים x ו- y הוא

$$\frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y}$$

יהיו x ו- y שלמים חיוביים, מתוך התנאי הנתון בבעיה נסיק,

$$\frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot y}{x+y} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{2}$$

למשוואה האחרונה אותה צורה כמו למשוואה אליה הגענו בבעיה 2 ששקולה למשוואה בבעיה 1.

בעיה 4

יהיו x ו- y שני שלמים, נסמן ב-z את מכפלתם, $z>0$. x ו- y בהכרח חיוביים, כי סכומם ומכפלתם חיוביים. מתוך התנאי הנתון בבעיה נרשום, $x \cdot y = z$, ו- $x + y = \frac{z}{2}$. ומכאן נסיק כי

$$x + y = \frac{x \cdot y}{2}$$

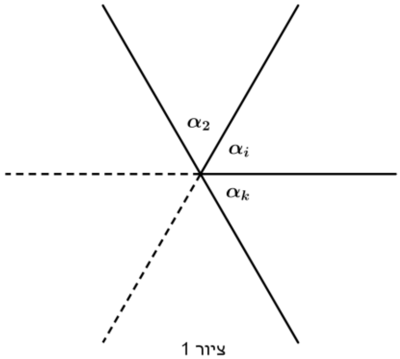
$$\Rightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{2}$$

המשוואה האחרונה זהה למשוואה אליה הגענו בבעיה 3 ולכן היא שקולה למשוואה של בעיה 1. **סוף חלק שני**

בעיה 5

זוהי הבעיה הקשה ביותר לאפיון. נסמן ב-k את מספר המצולעים עם קדקוד ב-P. אם המצולעים הם משוכללים כך שאינם "עולים אחד על השני" וחופפים זה לזה, אז, לפי הסימון בציור 1, נקבל:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots \alpha_k = \frac{360°}{k}$$



ציור 1

אבל אם α_i הוא מידתה של זווית של מצולע משוכלל במעלות, אז מתקיים

$$\alpha_i = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}, 1 \le i \le k$$

ואז

$$\frac{360}{k} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{n-2}{n}$$

$$\Rightarrow 2n = (n-2)k$$

$$\Rightarrow 2n + 2k = nk.$$

לפי תנאי הבעיה, n ו- k בהכרח שלמים חיוביים, לכן משוואה זו שקולה למשוואה הראשונה בבעיה 2.

בעיה 6

אם n-2 מחלק את $2n$, אז $2n = (n-2)k$, כאשר k שלם. משוואה זו זהה לאחת המשוואות בבעיה 5, ולכן בעיה 6 ניתנת לרדוקציה לבעיה 1. **סוף חלק שלישי**

משוואה דִיוֹפָנְטִית

ראינו כי את כל שש הבעיות אפשר לפתור על-ידי המשוואה שהוצגה בבעיה 1. בגלל תנאי הבעיות, זוהי משוואה דיופנטית ופתרונה מעניין.

1. נתבונן ב- $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, כאשר p ו-q הם שלמים חיוביים.
2. לא יתכן כי יתקיימו $\frac{1}{4} > \frac{1}{q}$ וגם $\frac{1}{4} > \frac{1}{p}$ (שהרי אז הם לא יסתכמו ל- $\frac{1}{2}$), לכן לפחות אחד מ- $\frac{1}{p}$ ו- $\frac{1}{q}$ חייב להיות גדול או שווה ל- $\frac{1}{4}$. נניח כי $\frac{1}{4} \ge \frac{1}{p}$.
3. אז p=1, 2, 3 או 4.
4. p=1 $\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{q} \Leftarrow \Leftarrow$ q=-2, מה שלא יתכן, כי q חיובי.
   - p=2 $\Leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \Leftarrow \frac{1}{q} = 0$ מה שאין לו פתרון. p=3 $\Leftarrow$ q=6.
   - p=4 $\Leftarrow$ q=4.
5. מכיוון שהמשוואה המקורית סימטרית ביחס ל-p ו-q אנחנו מקבלים תוצאות תואמות כאשר $\frac{1}{4} \ge \frac{1}{q}$.
6. קבלנו שלושה פתרונות: (p,q)=(3,6) , (p,q)=(4,4) או (p,q)=(6,3). **סוף חלק רביעי**

פתרונות

כעת כל הבעיות פתורות.

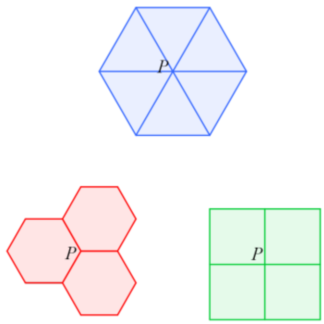
בעיה 1 - התשובה היא $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

בעיה 2 - יש שני מלבנים שמקיימים את התנאים: האחד הוא 4×4 והשני 3×6.

בעיה 3 - יש שני זוגות של מספרים שלמים שהממוצע ההרמוני שלהם הוא 4. 4 ו-4 או 3 ו-6.

בעיה 4 - הזוגות זהים לאלה שבבעיה 3.

בעיה 5 - המצולעים המשוכללים הזהים היחידים שממלאים את המישור סביב נקודה *P* בלי חפיפה ובלי רווחים הם שישה משולשים שווי צלעות, ארבעה ריבועים ושלושה משושים משוכללים, כפי שמוצג בציור 2.



ציור 2

שישה משולשים, ארבעה ריבועים, שלושה משושים

בעיה 6 - התשובה היא שהביטוי n-2 מחלק את $2n$ כאשר n=3, n=4, או n=6. (בבעיה המקורית התנאי n>2 מבטיח ש n-2 יהיה חיובי, אחרת גם n=1, n=0 או n=-2 הם פתרונות).

סיכום

אפשר להשתמש ב- 6 השאלות השקולות והלא טריוויאליות הללו בלימודי האלגברה. ניתן למצוא בקלות קבוצת שאלות שקולות בגיאומטריה. ניתן להשתמש בקבוצות של שאלות כאלה כדי להדגים את כוחה של פיסת מתמטיקה מופשטת בפתרון של בעיות שבמבט ראשון קשה לראות את הקשר ביניהן. **סוף חלק חמישי ואחרון**

---

1) אביטל אלבוים-כהן תרגמה מאמר זה לעברית. ראו: Z. Usiskin (1968). Six nontrivial equivalent problems. The Mathematics Teacher, 61(4), 388-390.

2) זלמן אוסיסקין (Zalman Usiskin) הוא חוקר בחינוך מתמטי מאוניברסיטת מישיגן בארצות הברית.