מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-100,000 פריטים המתפרסמים בכ-1800 כתבי-עת מתמטיים למאגר המידע הבינלאומי המנוהל על-ידי החברה המתמטית האמריקאית: MathSciNet – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים. מדור החדשות בגיליון זה מכיל ארבע חדשות מהשנה הנוכחית (2016), שהן כמובן רק חלק קטנטן של המתרחש במתמטיקה השכם והערב.

ריצוף חדש במחומשים[1]

ב-11.8.2015 התפרסמה במדור המדעי של העיתון הבריטי *The Gardien* ידיעה בשם "Attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile".[2]

זהו משחק מילים מתוחכם (שלא ניתן לתרגמו לעברית) המיועד למשוך את קוראי העיתון הבריטיים לסנסציה הנוגעת, כביכול, למתקפה על הפנטגון בוושינגטון, על מנת שיקראו באותה הזדמנות על חדשה מתמטית הנוגעת לריצוף במחומשים...

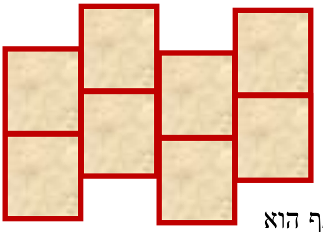
1. תודתי נתונה לגלעד דיאמנט, הייטקיסט, בעל תואר בפיזיקה ומדעי המחשב ומחבר הספר "חשיבה חדה", על תרומתו להכנת חלק זה של המדור במהלך הכנת הבזק חדשות לחטיבה העליונה במסגרת פרויקט ההבזקים של "קשר חם".
2. Bellos, A. (2015, August 11). Attack on the pentagon results in discovery of new mathematical tile. The guardian. Retrieved from https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/aug/10/attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile

מה זה בעצם ריצוף?

איור 1

ריצוף, או הנחת אריחים (שווים או שונים) זה לצד זה ללא רווחים וללא חפיפה כלשהי, הוא נושא מרתק.

הריצוף הפשוט והמוכר ביותר שהיה מקובל בבתי מגורים בישראל עד לתקופה האחרונה הוא ריצוף באריחי מוזאיקה ריבועיים חופפים זה לזה שמידת הצלע שלהם היא 20 ס"מ, כך שהם מונחים קדקוד אל קדקוד וצלע אל צלע (בקיצור ק.ק.צ.צ.).

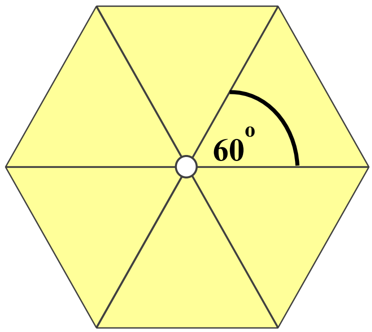


איור 2

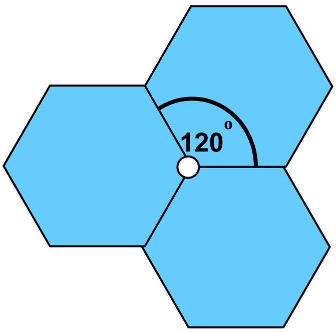
בשנים האחרונות מציעים יצרני האריחים עוד ועוד סוגים של ריצופים ריבועיים, אך הם נבדלים זה מזה רק בגודלו של האריח ובחומר ממנו הוא עשוי. לעתים מניחים אותם לא בשיטת ק.ק.צ.צ. אלא למשל כך:העיקרון המתמטי של ריצוף מונו-הדרלי (כלומר באריח יוצר אחד) בשיטת ק.ק.צ.צ, הוא שבכל קדקוד נפגשים אריחים חופפים אחדים, כך שסכום הזוויות סביב כל קדקוד משותף הוא 360 מעלות.

באילו אריחים ניתן לרצף?

היות והזווית הפנימית של משולש שווה צלעות היא בת 60 מעלות, משולש כזה יכול להיות "אריח יוצר" לריצוף פשוט על-ידי שישה משולשים חופפים כאלה שנפגשים בכל קדקוד (ראו איור 3). גם משושה משוכלל יכול להיות אריח יוצר לריצוף פשוט, שכן הזווית הפנימית של משושה משוכלל היא בת 120 מעלות ושלושה משושים משוכללים חופפים שנפגשים בקדקוד עומדים בתנאי ההכרחי והמספיק לריצוף (ראו איור 4).

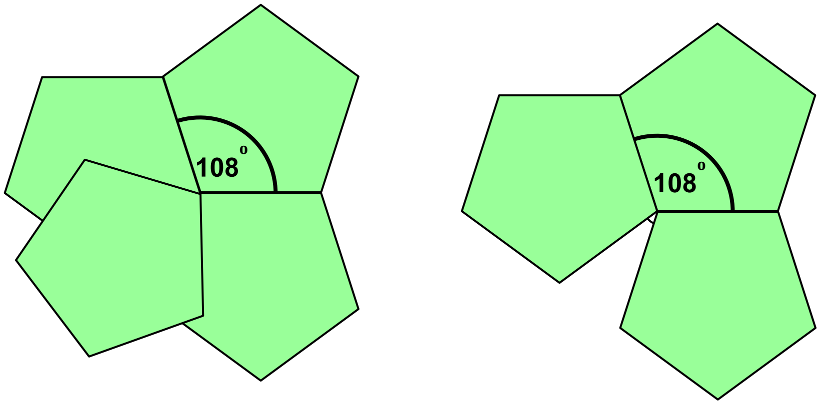


איור 3: שישה משולשים שווי צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף



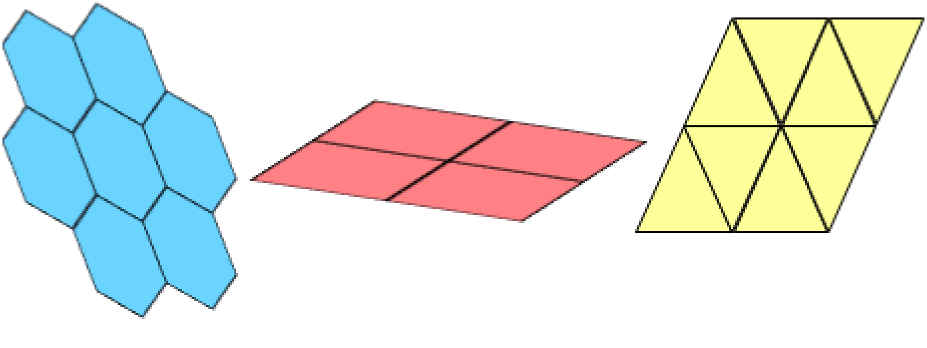
איור 4: שלושה משושים שווי צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף

אבל אי אפשר לרצף את המישור באריח יוצר בצורת מצולע משוכלל בעל 5 צלעות או 7 צלעות ומעלה, כיוון שהמספר המינימלי של מצולעים הנפגשים בקדקוד אחד לצורך ריצוף הוא שלושה, והחשבון מראה ששלושה מחומשים הנפגשים בקדקוד מותירים רווח (כי סכום הזוויות הוא 324 מעלות), ולארבעה אין די מקום סביב קדקוד משותף (סכום הזויות 432 מעלות, ראו איור 5). באשר למשובעים ומעלה גם שלושה הם יותר מדי.



איור 5: שלושה מחומשים משוכללים או ארבעה שנפגשים בקדקוד משותף אינם יוצרים ריצוף

השאלה שעולה באורח טבעידרך טבע היא האם יש אפשרות לרצף את המישור באריח יוצר קמור שאינו משוכלל? אם מבצעים טרנספורמציה של מתיחה-כיווץ או סיבוב על ריצוף מונו-הדרלי במשולשים שווי צלעות, בריבועים, או במשושים משוכללים, קל לראות שהסרת האילוץ של היות האריח היוצר משוכלל משאירה עדיין אפשרויות רבות לריצוף מונו-הדרלי במצולעים כאלה שאינם משוכללים (ראו דוגמה באיור 6).



איור 6: ריצוף במשולשים, מרובעים ומשושים שאינם משוכללים

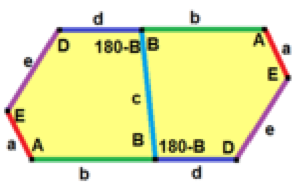
יתרה מזו, כל משולש יכול לשמש לריצוף מונו-הדרלי כי סכום הזוויות במשולש הוא 180°, והנחת משולשים זהים באופן הולם בקדקוד אחד יכולה לתת סכום של 360° סביב כל קדקוד. גם כל מרובע יכול לשמש כאריח יוצר מפני שסכום הזויות במרובע הוא 360° והנחת מרובעים בקדקוד באופן הולם נותנת את הנדרש לריצוף. משושים לא משוכללים הם קצת יותר בעיתיים. מתברר שיש רק שלושה משושים לא משוכללים שונים שבכל אחד מהם ניתן לרצף את המישור (לקבלת מידע מפורט, כדאי להפעיל את ההדגמה בגאוגברה כאן: http://tube.geogebra.org/student/m155779).

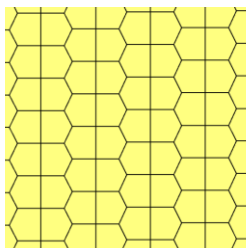
הסרת האילוץ הזה גם ממחומשים פותחת אף היא אפשרויות רבות. אולם במצולעים קמורים בעלי 7 צלעות ומעלה, גם אם אינם משוכללים, לא ניתן לרצף את המישור! (את ההוכחה לכך אפשר למצוא למשל בספרו המרתק של איבן ניבן[3] או בקישור:

(http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons#Tessellations_by_Convex_Polygons

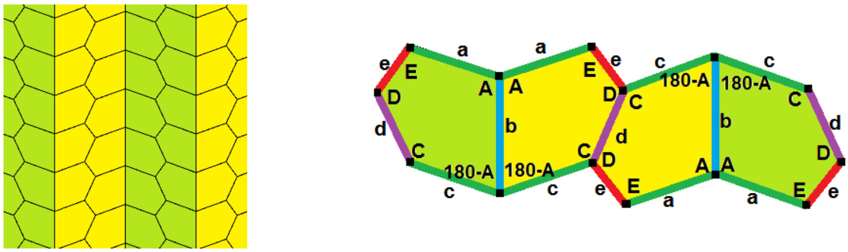
ריצוף מונו-הֶדרלי במחומשים לא משוכללים

בשנת 1918 גילה המתמטיקאי הגרמני קרל ריינהרדט (1895-1941) חמישה טיפוסים של מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור. כל טיפוס מאופיין על-ידי קבוצת תנאים החלים על המידות של הצלעות והזוויות או על הקשרים ביניהן. כל מחומש שעונה על קבוצת תנאים מסויימת שייך לאותו טיפוס. מרבית הטיפוסים מאפשרים מגוון של מחומשים שאינם בהכרח חופפים. לדוגמה, טיפוס מספר 1 (איור 7) דורש כי: B+C=180°; A+D+E=360° (באשר האותיות מציינות את חמש הזוויות הפנימיות כשהן מסומנות בזו אחר זו נגד כיוון השעון). באיור מוצגים שני מחומשים שונים מטיפוס 1. לאחד מהם יש תכונה נוספת של שוויון הצלעות a ו-c הסמוכות לקדקודי הזוויות A ו-C בהתאמה. לצדו של כל מחומש יוצר מופיע ריצוף בו. יצוין עוד כי מוצגים כאן ריצופים ק.ק.צ.צ אולם ניתן ליצור גם ריצופים שאינם שומרים על כך.[4]





3. Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
4. האיורים מתוך Wikipedia (2016). *Pentagonal tiling* [Images]. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling



איור 7: שני מחומשים שונים מאותו טיפוס היוצרים ריצופים שנראים שונים אבל נחשבים לטיפוס אחד

בשנת 1968 פרסם המתמטיקאי האמריקאי ריצ'ארד קרשנר (1982-1913) מאמר שבו הוא הוכיח את קיומם של שלושה טיפוסים נוספים של מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור. מרטין גרדנר כתב במדור הקבוע שלו בעיתון סיינטיפיק אמריקן בשנת 1975 תיאור של כל שמונה הסוגים מתוך הנחה שזוהי הרשימה המלאה, אבל קיבל הודעה מחובב שכינה את עצמו בשם ריצ'רד ג'יימס השלישי, שהוא מצא עוד טיפוס שלא כלול ביניהם. עוד בטרם יבשה הדיו מעל העדכון שפרסם גרדנר לקוראיו, הוא קיבל הודעה ממרג'ורי רייס, עקרת בית בעלת רקע מתמטי של בוגרת תיכון אך חובבת המקצוע, שגילתה עוד ארבעה סוגים. בשנת 1985 מצא רולף סטיין עוד מחומש קמור שיכול לרצף את המישור. 30 שנה עברו ונראה היה שזהו זה יש 14 טיפוסים ולא יותר. ואז למרבית ההפתעה, התגלה בקיץ 2015 טיפוס מספר 15 על-ידי שלושה אנשים: קייסי מן, ג'ניפר מקלאוד ודוד ון-דרו. אפשר למצוא את ההדגמות של כל 15 הסוגים אצל פג.[5] ולגמרי לא ברור שהרשימה כבר מלאה! ואפילו לא ברור שיש רק מספר סופי של ריצופים במחומשים.

האם אתם מזהים את הריצוף בכניסה לבית האיגוד האמריקני למתמטי?

משהו חדש על התנהגותם של המספרים הראשוניים ועוד חדשה פחות מפתיעה

מבין כל התכונות המפתיעות של המספרים הראשוניים, זאת שעושה אותם לשימושיים להצפנה, היא העובדה שאין קושי ליצור מכפלה של שני ראשוניים ולו גם גדולים מאוד ולקבל מספר פריק גדול מאוד, אבל קשה עד מאוד ובעצם בלתי אפשרי בזמן סביר, לפרק לגורמים מספר גדול מאוד שהוא מכפלה של שני ראשוניים גדולים. החיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים (שקיומם לבלי סוף הוכח מזמן, עוד על-ידי אוקלידס), קיבל מאז התגלית על יישומם להצפנה חשיבות מעל ומעבר לסיפוק הסקרנות של מתמטיקאים. המספר הראשוני הגדול ביותר שהתגלה עד מועד כתיבת שורות אלו הוא $2^{74,207,281} - 1$ שהתגלה בינואר 2016 והוא בן 22,338,618 ספרות (להרחבה ראו מדור חדשות מתמטיות בגיליון 1

5. Pegg, E. Jr. (2009, May 13). Pentagon tilings. *Wolfram Demonstrations Project*. Retrieved from http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings

של כתב עת זה).

תדירות הופעתם של מספרים ראשוניים על פני ציר המספרים הממשי מוזרה ומעוררת תמיהה. מצד אחד אפשר לאתר מרווחים גדולים כרצוננו שאין בהם אף לא מספר ראשוני אחד, ומצד שני, תלויה ועומדת השערת המספרים התאומים שמן הסתם תוכח ביום מן הימים, לפיה אין סוף למספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 (עד היום, יש הוכחה להפרש סופי יותר גדול, שצמצומו ל-2 הוא האתגר).[6]

6. Wikipedia (2016). *Twin prime*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime

לא קיימת נוסחה שמפיקה אך ורק מספרים ראשוניים ותדירות הופעתם של המספרים הראשוניים נראית כאילו היא רנדומלית. האומנם?!? שני חוקרים מאוניברסיטת סטנפורד, רוברט אוליבר וקאנאן סאנדראראין, פרסמו בחודש מרץ 2016, כתבה בשם: 'הטיה בלתי צפויה בהתפלגות של מספרים ראשוניים עוקבים'.[7] כידוע, בהיותם אי-זוגיים (למעט 2) ולא מתחלקים ב-5 (למעט 5), המספרים הראשוניים פרט ל-2 ול-5 מסתיימים כולם באחת מארבע הספרות 1, 3, 7, 9. לכן, אילו הם היו מפוזרים באופן אקראי על פני ציר המספרים, אזי מספר ראשוני שמופיע מיד אחרי מספר ראשוני קטן ממנו המסתיים ב-1, היה גם הוא מסתיים ב-1 ב-25% מהמקרים. במילים אחרות, שני מספרים ראשוניים עוקבים היו מסתיימים בספרה 1, באחד ל-4 מקרים. אולם להפתעתם, שני החוקרים שבדקו את ביליון (1000 מיליון) המספרים הראשוניים הראשונים, מצאו שהראשוני הבא אחרי מספר ראשוני שמסתיים ב-1, מסתיים גם הוא ב-1 רק בכ-18% מהמקרים (כלומר בערך באחד מחמישה מקרים) ואילו ב-3 או ב-7 – בכ-30% מהמקרים וב-9 בכ-22% מהמקרים. אותו דבר נכון למספר ראשוני שמסתיים ב-3, 7, או 9, אבל בהטיה מעט קטנה יותר. כאמור, הכתבה פורסמה בבמה שבה מתמטיקאים מפרסמים תוצאות שהם מעמידים לידיעת עמיתיהם לבדיקה לפני שהם שולחים אותן לפרסום בעיתונות המקצועית. אבל מתברר שמתמטיקאים רבים עטו על הרעיון ובודקים עוד ועוד מקרים. לא ברור אם לממצאים האלה עשויים להיות שימושים או השלכות על ההצפנה המודרנית, אבל הסקרנות בוערת במתמטיקאים ויש להניח שלא יעבור זמן רב עד שהדברים יתבהרו.[8]

סוף סוף פרס לאנדרו ויילס על הוכחת השערת פרמה

אנדרו ויילס היה ילד בן עשר כשגילה (בשנת 1963) שמאות בשנים תלויה ועומדת השערה מתמטית פשוטה וקלה להבנה, שאף לא אחד מהמתמטיקאים יכול להוכיח ואף לא להפריך אותה, והבטיח לעצמו – אני אגדל להיות מתמטיקאי ואוכיח אותה. הוא אכן גדל להיות מתמטיקאי ואף הוכיח שלא קיים פתרון שלם למשוואה $x^n + y^n = z^n$ עבור x, y, z ממשיים. הוכחת ההשערה, שנודעה במשך כ-400 שנה בשם "המשפט האחרון של פרמה", אף כי פרמה לא השאיר הוכחה לכך, לא זיכתה את אנדרו ויילס במדליית פילדס היוקרתית, מפני שזו ניתנת למתמטיקאי שהישגיו הוכרו לפני שמלאו לו 40 שנה. אבל אנדרו היה בן 41 כשהצליח לתקן את הטעות האחרונה שהתגלתה בהוכחה שלו, וזה היה בשנת 1994.

יום לאחר יום הפאי של שנת 2016 התבשרנו כי הזוכה בפרס אבל (Abel), הפרס הנחשב לפרס נובל של המתמטיקה לשנת 2016, הוא אנדרו ויילס.[9] אנדרו ויילס התמיד בעבודתו על פתרון הבעיה שנים רבות (חלק ניכר במסתרים!) שלא על מנת לקבל פרס, כמובן, אבל כל הקהילייה המתמטית התרגשה

7. Oliver, R. J. L., & Soundararajan, K. (2016, May 30). *Unexpected biases in the distribution of consecutive primes*. Retrieved from http://web.stanford.edu/~rjlo/papers/16-primebias.pdf
8. Rathi, A. (2016, March 15). *Mathematicians are geeking out about a bizarre discovery in prime numbers*. Retrieved from http://qz.com/639452/mathematicians-are-geeking-out-about-a-bizarre-discovery-in-prime-numbers/
9. Fermat's last theorem mathematician Andrew Wiles wins Abel prize. (2016, March 15). *New Scientist*. Retrieved from https://www.newscientist.com/article/2080689-fermats-last-theorem-mathematician-andrew-wiles-wins-abel-prize/

יחד אתו מהידיעה על זכייתו. על האירוע ב-24.5.2016 באוסלו תוכלו לקרוא כאן:
http://www.abelprize.no/seksjon/vis.html?tid=67109

פרופ׳ (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את ״**קשר חם**״ - מרכז מו״פ **לק**ידום **ש**יפור **ור**יענון **הח**ינוך ה**מ**תמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמתיים ״חשבון פשוט״ שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ׳ מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.