דיון כיתתי/עצמי בשגיאות כמנוף לשיפור הישגיהם וצמצום שגיאותיהם של תלמידים - המקרה של פונקציות טריגונומטריות

אמאל שריף-רסלאן, המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה
רג'א אבו שאהין,[1] בית-ספר ניסויי תיכון מסעדה, המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה

תקציר

במחקר זה נחקרה השפעתה של שיטת לימוד, אשר מתבססת על דיון בבעיות מלוות בשגיאות בנושא פונקציות טריגונומטריות, על הישגיהם וצמצום שגיאותיהם האופייניות של התלמידים. במחקר השתתפו 50 תלמידים מכיתה י"א, בעלי רקע סוציו-אקונומי דומה, הלומדים 4 יח"ל במתמטיקה. הם חולקו לשתי קבוצות: 25 תלמידים בקבוצת הביקורת למדו בשיטה מסורתית, ו-25 תלמידים בקבוצת הניסוי למדו בשיטת דיון כיתתי וגם דיון עצמי בפתרונות שגויים. לפני תחילת הניסוי נעשתה חזרה על חומר הטריגונומטריה שנלמד בכיתה י' – התלמידים למדו שני שיעורים בשיטה המסורתית וביצעו מבחן מקדים. בשלב הבא, קבוצת הביקורת המשיכה ללמוד את נושא הפונקציות הטריגונומטריות בשיטה המסורתית, ולעומתה קבוצת הניסוי למדה נושא זה בשיטה שהתבססה על פעילות של דיון כיתתי ודיון עצמי בבעיות המלוות בשגיאות. בסוף התהליך ניגשו שתי הקבוצות לבחינת הפוסט בנושא פונקציות טריגונומטריות.

הממצאים העיקריים במחקר זה התבטאו בעובדה שהישגי התלמידים בקבוצת הניסוי היו גבוהים מהישגי התלמידים בקבוצת הביקורת. יתרה מזו, חל צמצום בשגיאותיהם של התלמידים מקבוצת הניסוי. יש לציין, כי ההשפעה של שיטת הוראה זו על הבנים ועל הבנות הייתה דומה.

המסקנה העיקרית של מחקר זה היא ששיטת הדיון הכיתתי/עצמי בבעיות המלוות בשגיאות בנושא טריגונומטריה משפרת את הישגי התלמידים בנושא, וגם מצמצמת את השגיאות באותו נושא. כיוון שכך, אנו ממליצים לשלב שיטה זו בהוראת הטריגונומטריה בפרט ובהוראת המתמטיקה בכלל.

מילות מפתח: *דיון כיתתי; דיון עצמי; שגיאות; טריגונומטריה; בית-ספר תיכון.*

1. מאמר זה מתבסס על עבודת גמר לתואר שני של רג'א אבו שאהין (2014). **השפעת שילוב פעילות של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות תלמידים על הישגיהם וצמצום שגיאותיהם בנושא פונקציות טריגונומטריות** (עבודת מוסמך). המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה – בהנחיית ד"ר אמאל שריף-רסלאן.

רקע תאורטי

בתחום הוראת המתמטיקה רווחת הדעה, שהוראה מתוך התייחסות לשגיאות, טעויות ותפיסות מוטעות, הופכת את הלמידה למשמעותית ועשויה לשפוך אור על הבנת הלומדים ועל קשייהם (תמיר, זיו ופטקין, 1995).

דוד (2007) ציינה כי חשיפת התלמידים לשגיאות אופייניות עשויה לשמש כלי חשוב, אשר יתרום להבנת הנושא הנלמד וגם עשוי להעמיק את התובנות המתמטיות של הלומדים.

לאחרונה נשמעות קריאות רבות להיעזר בשגיאות התלמידים ככלי לימודי במהלך ההוראה, כאשר הטענה העומדת מאחורי קריאות אלו היא, שניצול הידע לגבי שגיאות אפשריות של תלמידים כבר במהלך הוראת הנושא המתמטי הנלמד, עשוי לסייע במניעתן של שגיאות אלו (רייז, 2007).

נדון תחילה בהגדרת שני מונחים עיקריים במחקר זה: שגיאה וטעות.

הפנר (2004) הגדיר שגיאה כבחירה בפתרון שאינו נכון או בדרך שאינה נכונה, בזמן שקיים פתרון נכון. לעומת זאת הפנר (שם) הגדיר **טעות** כבחירה בדרך שאינה נכונה, כאשר בזמן הבחירה לא ידועה הדרך הנכונה. כלומר שגיאה היא בעצם ההבדל בין תבנית מקובלת כנכונה להשגת המטרה לבין תבנית נבדקת, שנכתבה להשגת מטרה דומה. במילים אחרות, שגיאה מתוארת במונחים של 'מה עשה התלמיד לא נכון?', ואילו טעות מתוארת במונחים של 'מדוע עשה התלמיד שגיאה מסוימת?'

ראוי לציין כי טעויות של התלמידים אינן תוצאה של חוסר תשומת לב רגעית, אלא בעיקר מונעות ממודלים אינטואיטיביים ראשוניים, אשר יוצרים את החוקים השגויים (Fischbein, 1990).

יש הטוענים, כי שיפור הלמידה והעמקת הידע המתמטי נובעים מתוך שימוש בשגיאות ו/או בטעויות של תלמידים, וביצועם נבון ותכליתי. לכן חשוב שהמורה ישלב שיטה זו בשלבים הראשונים של הוראת הנושא כדי למנוע שגיאות בעתיד (אביטל, 1981; פרקש וצמיר, 2008).

ישנם חוקרים בחינוך המתמטי (דוד, 2007; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987 Weber, 2005), אשר עסקו בניתוח הבנת צורכי התלמידים ותהליכי למידה, בחקר סוגי שגיאות של תלמידים ובסיבות לשגיאות אלה. בשנים האחרונות מורים עשו שימוש ישיר בשגיאות תלמידים במהלך ההוראה בכיתה.

מחקרים אחרים בחינוך עסקו בשימוש בשגיאות בהוראה (McMillan & Turner, 2014; Tugend, 2011). מחקרים אלה ציינו עמדות מורים מסוימות כלפי שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה, אשר ניכרו בשלוש גישות: הגישה המסורתית – עמדה זו גורסת כי יש להימנע מדיון בשגיאות במהלך ההוראה; השגיאות ככלי לימודי – עמדה זו מציינת כי שיפור הידע בנושא הנלמד ניכר בזיהוי הקשיים ודרכי החשיבה האחרים של הלומדים; השגיאות כמטרה – עמדה זו מבקשת לדון בשגיאות כדי להרחיב את הידע המדעי ולהעמיק בו.

חוקרים בחינוך המתמטי (Polya, 1973 ;Schoenfeld, 1985; Watson, 1990) תיארו את השלבים בפתרון בעיות במתמטיקה, שאפשר לסכמם לפי פוליה ושונפילד (שם) בארבעה שלבים: הבנת הבעיה, עריכת תכנית, ביצוע התכנית וביקורת (סקירה לאחור). לעומתם, ווטסון (Watson, 1990) נשען על

חמישה שלבים בפתרון בעיות מתמטיות: קריאה, הבנה, העברה, מיומנויות עבודה וקידוד. יתרה מזו, ווטסון (שם) הציע מיון שגיאות, אשר התבסס על זיהוי השלב שבו התרחשה השגיאה: שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת הקריאה; שגיאות הנובעות ממגבלות בהבנת הנקרא; שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת העברה; שגיאות הנובעות מחסכים במיומנויות עבודה; שגיאות הנובעות מחסכים בתרגום או בקידוד; שגיאות שמקורן בחוסר מוטיבציה; שגיאות שמקורן ברשלנות; שגיאות שמקורן בייצוג גרוע של הבעיה. במחקר הנוכחי נישען על השלבים שהציע ווטסון (שם) ובפרט נעסוק בשגיאות לפי שלבים אלה.

דיון כיתתי / עצמי בשגיאות

דיון בשגיאות נחשב למיומנות הדורשת רמה גבוהה של חשיבה, כיוון שהוא מורכב מתחומי חשיבה רבים: חשיבה סימבולית, חשיבה ביקורתית, חשיבה יצירתית, חיפוש סיבות לתופעה, נימוק טענות, בחירה נכונה לשיטה המתאימה לבעיה ושימוש בידע קודם (Greenfield, 1987). גרינפילד (שם) טוען ששיטת לימוד, המתבססת על דיון כיתתי בשגיאות, מורכבת משלושה שלבים: שלב ראשון – היכולת של הלומד לאבחן את הטעות בשאלה; שלב שני – היכולת של הלומד להסביר את הטעות; שלב שלישי – היכולת של התלמיד לבחור אסטרטגיה מתאימה לפתרון נכון.

אלרו וסקובסמוס (Alro & Skovsmose, 1996) התמקדו בשלוש שאלות שיש לענות עליהן, כדי להביא את התלמידים לידי תיקון שגיאותיהם: מי מעורב בתיקון? איך יתבצע התיקון? מהי מהות התיקון? כמובן שהמורה מקבל עליו את האחריות להביא את התלמידים לידי פתרון הנכון.

מי מעורב בתיקון השגיאה?

תיקון במליאה לעומת תיקון אישי – תיקון במליאה הוא תיקון פומבי שנעשה מול מליאת הכיתה. המטרה היא להעלות את מודעות כלל התלמידים לשגיאה, לסוגיה ולסיבות אפשריות. לעומת זאת תיקון אישי מערב רק את התלמיד עצמו, כדי לגבש נקודת מוצא, אשר תשמש בהמשך להפנמה נכונה של הידע, וזה מומלץ כאשר הסוגיה היא אישית ואינה חלה על תלמידים אחרים, כלומר השגיאה לא רלוונטית כלפיהם. תיקון מסוג זה מומלץ כאשר תלמיד ששגה לא בטוח בעצמו כדי לדון בשגיאתו בפומבי, כיוון שזה עלול לפגוע בדימוי העצמי שלו.

איך יתבצע תיקון השגיאה?

תיקון ישיר ומפורש לעומת תיקון עקיף – התיקון מפורש כאשר המורה מביא שגיאה ודן בה דיון מפורש וברור, למשל כאשר תלמיד טועה: המורה רושם את הפתרון שלו על הלוח, אומר לתלמידים שיש בפתרון שגיאה ושואל אותם היכן לדעתם מופיעה השגיאה. או כאשר מספר תלמידים מציגים פתרונות על הלוח: דנים בכל הפתרונות הנכונים והשגויים, מציינים את הפתרונות הנכונים ומאפיינים את הפתרונות השגויים. המורה יכול לעשות גם תיקון עקיף – זהו תיקון לא ישיר, שאפשר להבינו כאשר מפרשים את ההקשר הסוציו-תקשורתי בכיתה.

מהי מהות תיקון השגיאה?

אלרו וסקובסמוס (Alro & Skovsmose, 1996) טוענים כי בסמכותם של המורה ו/או ספר הלימוד לקבוע כי מצב מתמטי הוא שגיאה. למורה יש את היכולת וגם את הסמכות לסווג את השגיאה וגם לדון דיונים מתאימים בשגיאות מגוונות, לדוגמה הדיון בשגיאה מסוג הצבה שגויה של ערכים אמור להיות שונה מהוכחת טיעון שלא מתאים לבעיה.

באהר והראל (Behr & Harel, 1990) טוענים כי קונפליקט קוגניטיבי הוא לא תמיד היבט שלילי של הלמידה. בהקשר זה, פרקש וצמיר (2008) טוענים כי התלמיד, שנחשף לקטגוריות שונות של שגיאות בדרכו לרמת חשיבה גבוהה כמתוכנן, חייב לעבור שלב בשלות קוגניטיבית, כי הטעות גורמת לקונפליקט קוגניטיבי שיש לו תפקיד חשוב בתהליך הלמידה ובעיקר למידה עצמית. כמו כן ליגטון ועמיתיו (Leighton, Chu, & Seitz, 2012) טוענים כי פעילות הנשענת על שגיאות עשויה לספק יתרונות חשובים: השתתפות בפתרון מאתגר של בעיות; עיסוק בחקר; פיתוח תחושת ההכרח להצדיק ולנמק כל צעד בפתרון; פיתוח כושר הביטוי.

אפשר לראות בשגיאות שני צדדים: מצד אחד דיון כיתתי ומצד אחר למידה עצמית. גירון (2007) עוסקת בדיון כיתתי, היא הדגישה שהדיון בכיתה תורם רבות להבנת מושגים במתמטיקה אצל התלמיד ונותן לו לפרש את השגיאות ואת הטעויות בעזרת ידע קודם. לעומתה, צימרמן (Zimmerman, 2001) עוסק בלמידה עצמית וטוען כי למידה נכונה נעשית אצל תלמידים מתוך למידה עצמית הנשענת על מאפיינים קוגניטיביים מוטיבציוניים והתנהגותיים של הלומד הפעיל בלמידה. לדעתו, המורה הוא המדריך שמכוון את התלמיד לפתח בעצמו הבנה בעזרת חשיבה עצמית.

טריגונומטריה והוראתה

חלק מהמחקרים בחינוך המתמטי, הקשורים לטריגונומטריה, עסקו בהבנה רלציונית של הטריגונומטריה ובשיטות הוראה המובילות להבנה מושגית (Sokolowski & Rackley, 2011; Wongapiwatkul & Laosinchai, 2011), וחלק אחר עסק בשגיאות התלמידים בנושא (קלונובר, 1997; Gür, 2009).

המושג פונקציה בכלל, והפונקציה הטריגונומטרית בפרט, הם שני מושגים קשים לתפיסה בעבור תלמידים בלימודי המתמטיקה בחטיבה העליונה (קלונובר, 1997). בלאקט וטאל (Blackett & Tall, 1991) סבורים שהשלבים הראשונים של למידת פונקציות טריגונומטריות הם רצופי קשיים. פונקציות אלו הן פעולות שאי אפשר להגדיר אותן בנוסחאות אלגבריות על-ידי פעולות אריתמטיות. למרות הקשיים שתועדו עם למידת הפונקציות הטריגונומטריות, נמצא כי ספרות המחקר החינוכי העוסקת בתחום דלילה מאוד. בדרך כלל המחקרים האמפיריים שעוסקים בנושא זה השוו בין שתי קבוצות של תלמידים שלמדו בדרכים אחרות, כמו בלאקט וטאל (שם), אשר בחנו שתי קבוצות של סטודנטים באותו בית-ספר: הקבוצה הראשונה השתתפה בקורס ניסיוני עם מחשבים שאפשרו לתלמידים לחקור קשרים מספריים וטריגונומטריים בחקירה אינטראקטיבית, ואילו הקבוצה השנייה למדה טריגונומטריה בלימוד פרונטלי מסורתי. המסקנות של החוקרים מראות על הבנה טריגונומטרית רבה יותר של הקבוצה הראשונה. קנדל וסטייסי (Kendal & Stacey, 1997), הסיקו כי לתלמידים אשר למדו פונקציות

טריגונומטריות בהקשר של משולש ישר זווית יש ביצועים טובים יותר מאשר תלמידים שלמדו את הנושא על-ידי מעגל היחידה. אף על פי כן הם ציינו שגישות רבות בהוראת הטריגונומטריה כמו גישת 'המשולש הישר זווית' מדגישות ומטפחות כישורים של הפרוצדורה ולא תורמות להבנת פונקציות טריגונומטריות. שאר הספרות של טריגונומטריה עוסקת בעיקר בטכניקות הוראה שיכולות להשלים או להחליף את שיטת ההוראה הסטנדרטית (Miller, 2001).

שגיאות אופייניות בטריגונומטריה

כפי שהזכרנו לעיל גור ווטסון (Gür, 2009; Watson, 1990) עסקו במיון שגיאות בכלל. גור (שם) עסק במיון השגיאות האופייניות בטריגונומטריה בפרט, המיון שלו כלל את השגיאות להלן: שימוש לא נכון במשוואות; סדר פעולות לא נכון; הערך והמקום של sin ו-cosine; שימוש לא נכון בנתונים; שפה לא תקינה; הסקה לוגית לא תקפה; הגדרה מעוותת; שגיאות טכניות.

ראוי לציין, כי העקרונות המנחים לבדיקת בעיות בטריגונומטריה בבחינות הבגרות במתמטיקה נשענים על מיון השגיאות, כפי שמופיע בחוזר המפמ"ר, כי יש להפסיק לבדוק תשובה של הנבחן שבה הפתרון מבוסס על הנחת יסוד שגויה, למשל הכללת יתר וגישה אינטואיטיבית לפונקציות טריגונומטריות ולא לפעול לפי ההגדרה (פעולות אינטואיטיביות על הארגומנט); פתרון מוטעה של משוואות טריגונומטריות; בלבול בין רדיאנים למעלות; חוסר יכולת לקשר בין ערכים מספריים ובין התיאור הגרפי של הפונקציה (עלייה וירידה, ציור סקיצה של הגרף) (משרד החינוך התרבות והספורט, 2011).

בהתבסס על כל האמור לעיל, במחקר הנוכחי נדון בקטגוריות להלן: *הבנה לקויה בטריגונומטריה* (הכוללת שפה לא תקינה, הסקה לוגית לא תקפה והגדרה מעוותת); *שימוש שגוי בנוסחאות*; *שגיאות טכניות*; *אי ריכוז ורשלנות*; *אי הבנת הנקרא* (שימוש שגוי בנתונים).

שאלות המחקר

1. האם השילוב של שיטת לימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות ישפיע על הישגי התלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות?

1.1. האם קיים הבדל בין הישגי הבנים להישגי הבנות בנושא טריגונומטריה לפני שיטת הלימוד המוצעת?

1.2. האם הישגי בנים והישגי בנות מושפעים באותה מידה משילוב של שיטת הלימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות בנושא פונקציות טריגונומטריות?

2. כיצד תשפיע שיטת ההוראה המוצעת על צמצום השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב התלמידים?

השערות המחקר

1. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, ישפר את ההישגים של התלמידים בטריגונומטריה.

1.1. אין הבדל בין הישגי בנים לבנות בנושא פונקציות טריגונומטריות לפני שיטת הלימוד המוצעת.

1.2. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, ישפר את ההישגי התלמידים ללא תלות במגדר.

2. שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בבעיות מלוות בשגיאות יצמצם את השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב תלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות.

מתודולוגיה

המשתתפים

אוכלוסיית המחקר היא תלמידים מכיתה י"א, אשר לומדים בבית-ספר תיכון בצפון הארץ. בבית-ספר זה לומדים 523 תלמידים ותלמידות: 45% בנים, 55% בנות. בכיתה י"א יש שתי קבוצות של 50 תלמידים: 30 בנות (60%), 20 בנים (40%). בשל נהלים בית-ספריים, חולקו התלמידים לשתי קבוצות הומוגניות מבחינה סוציו-אקונומית ולימודית – הם לומדים ברמה של 4 יח"ל במתמטיקה ובעלי רקע סוציו-אקונומי בינוני.

כלי המחקר

כדי לבדוק את ההשפעה של שיטת הלימוד על הישגיהם ועל שגיאותיהם של התלמידים פותחו שני מבחנים ששימשו אותנו ככלי המחקר. כמו כן נבנו בעיות בטריגונומטריה עם פתרונות שגויים, שגם הם שימשו אותנו ככלי מחקר.

מבחן מקדים (pre): מטרת המבחן הייתה לבדוק את ההבדל בהישגי התלמידים בנושא הטריגונומטריה בין שתי הקבוצות (ניסוי וביקורת). המבחן נמשך 60 דקות וכלל שבע שאלות שעסקו בנושאים של הפונקציות הטריגונומטריות שלמדו בכיתה י' (ראה נספח א: לפני המחקר). נושאים אלה הם הקדמה לנושא של פונקציות טריגונומטריות, וכללו הגדרות, זהויות, נוסחאות, שימוש במחשבון ומשוואות פשוטות. המבחן נמסר לשתי הקבוצות (הניסוי והביקורת) באותה שעה ובאותו יום.

פתרונות שגויים בטריגונומטריה: אלה הם פתרונות מלאים של תרגילים בטריגונומטריה כאשר התלמידים יודעים מראש שהם כוללים שגיאות, ועליהם לאתר אותן ולתקנן. התלמידים בקבוצת הניסוי קיבלו שמונה פתרונות שגויים (ראה נספח ב: דוגמה לפתרון שגוי ודיון כיתתי מצומצם בפתרון זה).

מבחן סופי (post): מטרת המבחן הייתה לבדוק את הישגי התלמידים אחרי התערבות מצד אחד (הוראת קבוצת הניסוי לפי שיטת הדיון הכיתתי/ עצמי בשגיאות), ומצד אחר למיין את השגיאות של התלמידים לפי קטגוריות שעלו בספרות המקצועית (ראה רקע תאורטי). המבחן הכיל שבע שאלות שעוסקות בפונקציות טריגונומטריות, נמסר לשתי הקבוצות (קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי) באותו יום ובאותו זמן ונמשך 135 דקות. המבחן בנוי משבע שאלות, הניקוד לכל סעיף נגזר מהנחיות שמופיעות בחוזר מפמ"ר המתמטיקה לשנת 2012 בהתאם לרמת המורכבות והקושי של הסעיף יחסית לסעיפים אחרים. המבחן נותח לפי חלקים (ראה נספח ג).

תוקף ומהימנות: כדי לשמור על סטנדרטים של תוקף ומהימנות, עברו השאלונים תוקף אצל מומחים בהוראת המקצוע: המפקח המקצועי במתמטיקה ורכז המקצוע בבית הספר – היו להם הערות ממוקדות

שתרמו במידה ניכרת לתיקוף שני השאלונים. לבדיקת המהימנות, הועברו שני המבחנים ל-20 תלמידים הלומדים ברמת 4-5 יח"ל בכיתה י"א בבית-ספר תיכון אחר, מתוך תיאום והתייעצות עם רכז המקצוע בבית-ספר השני (הרכז בעל ניסיון רב בהוראה של 25 שנים, אף הוא מלמד קבוצה של 4 יח"ל); המהימנות והעקיבות הפנימית של המבחן המקדים והמבחן הסופי לפי מקדם אלפא של קרונבך היו α, 0.81=α=0.85 בהתאמה.

הליך המחקר

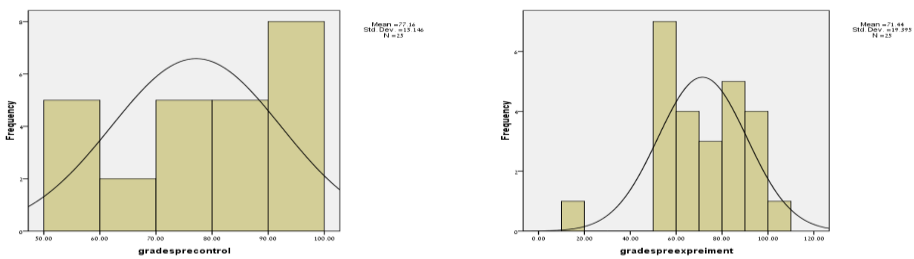
שתי הקבוצות (ביקורת וניסוי) עשו חזרה בשני שיעורים על התכנים בטריגונומטריה שנלמדו בכיתה י' (שנה לפני המחקר). לאחר מכן הועבר המבחן המקדים. אחר כך לימד המורה את שתי הקבוצות בשמונה שיעורים את הנושא של פונקציות טריגונומטריות בגישה המסורתית (לימוד תכנים ופתרון תרגילים ובעיות בנושא בגישה הפרונטלית. לא היה דיון בשגיאות שהתלמידים עלולים לעשות, אך היו דיונים כיתתיים בדרכי פתרון בעיות). בתום ההליך הועבר המבחן הסופי. המורה, שהיה גם המשגיח בזמן הבחינה, דיווח שהזמן המוקצה לכל בחינה התאים מאוד והניסוח של השאלות היה די ברור.

ממצאים

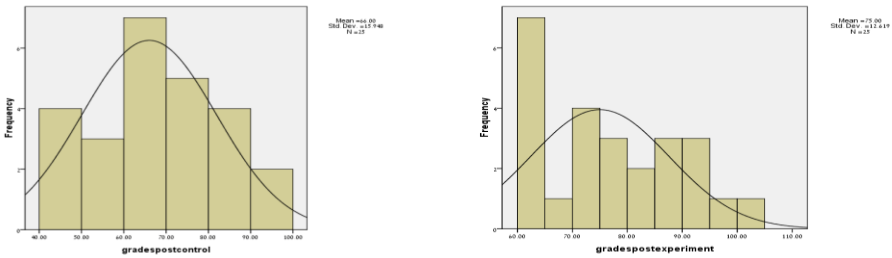
1. בדיקת השערת המחקר הראשונה

בדיקת ההשפעה של שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, על שיפור הישגיהם של התלמידים.

איורים 1 ו-2 מראים את התפלגויות ציוני שתי הקבוצות, קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי, במבחן המקדים (pre) ומבחן הבתר (post) בהתאמה.



איור 1: התפלגות ציוני התלמידים במבחן הקדם: קבוצת הביקורת (ימין) וקבוצת הניסוי (שמאל)



איור 2: התפלגות ציוני התלמידים במבחן הבתר: קבוצת הביקורת (ימין) וקבוצת הניסוי (שמאל)

כדי להבטיח את חסינות השימוש במבחן t, נבדקה הנחת שיווין שוניות, ונמצא כי ($F = 1.667$, $p = 0.203>0.05$), כלומר נמצא כי במדגם שלנו ($N = 25$), מבחן t עדיין חסין בפני הפרת הנורמליות.

ומכאן, ממצאים המתייחסים לכל התלמידים של קבוצת הביקורת וקבוצת הניסוי שלמדו בהוראה מסורתית ולפי שיטת דיון כיתתי/עצמי בהתאמה התבססו על מבחן t; הממצאים מופיעים בטבלאות 1 ו-2.

מתוך הממצאים בטבלה 1, במבחן הבתר (post) חלה ירידה ניכרת בממוצע של קבוצת הביקורת, מ-72.16 ± 15.15 ל-66 ± 15.95, ובלי שינוי רב בסטיית התקן, ואכן, נמצא הבדל סטטיסטי מובהק אצל תלמידי קבוצת הביקורת בשני המבחנים ($p<0.001$).

בקבוצת הניסוי לא רואים ירידה כזאת בממוצע בין תוצאות המבחן המקדים לבין תוצאות המבחן הסופי $p=0.336>0.05$. במילים אחרות, לא חל שינוי רב בהישגי התלמידים. במבחן הסופי נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין הישגי התלמידים בשתי הקבוצות ($p=0.032$, $p<0.05$). במבחן הסופי, ממוצע קבוצת הביקורת הוא 66 ± 15.95, וממוצע קבוצת הניסוי הוא 75 ± 12.62. הממוצע גדל ב-9 נקודות, וזהו הפרש ניכר, גם סטיית התקן של קבוצת הניסוי היא פחות מזו של קבוצת הביקורת.

טבלה 1: ממוצעי ציונים גולמיים, סטיות התקן ומבחן t של מדגמים תלויים בשני המבחנים לקבוצות המחקר (N=25)

הקבוצה המחקרית	**המבחן**	**ממוצע**	**סטיית תקן**	**ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים p(pre:post)**
הביקורת	pre	77.16	15.146	$<0.001(3.8\times10^{-9})$
הוראה מסורתית	post	66	15.945	
הניסוי	pre	71.92	15.443	0.336
דיון כיתתי/עצמי	post	75	12.619	

$P<0.05$

מתוך טבלה 2 אפשר לראות שאין הבדל בין שתי הקבוצות במבחן המקדים. כלומר שתי הקבוצות באותה רמת ידע, ממוצעי הציונים הגולמיים במבחן המקדים של שתי הקבוצות היו די קרובים יחסית וסטיות התקן כמעט זהות. מכל מקום, לא נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין הישגי התלמידים במבחן המקדים (pre) בין שתי הקבוצות ($p=0.34$, $p>0.05$).

טבלה 2: ממוצעי ציונים גולמיים, סטיות התקן ומבחן t של מדגמים תלויים בשני המבחנים לקבוצות המחקר (N=25)

הקבוצה המחקרית	המבחן	ממוצע M	סטיית תקן SD	ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים p(ביקורת:ניסוי)
הביקורת	pre	77.16	15.146	0.23
הניסוי	pre	71.92	15.443	
הביקורת	post	66	15.948	0.032
הניסוי	post	75	12.619	

$P<0.05$

1.1. הממצאים הראו כי אין הבדל מגדרי לפני הניסוי בשתי הקבוצות, קבוצת הביקורת: 80.2±14.7 לעומת 72.6±15.6 (בנים בנות בהתאמה), p=ns; קבוצת הניסוי: 68.6±11.2 לעומת 74.13±17.76 (בנים בנות בהתאמה), p=ns.

יתרה מזו, הממצאים הראו שגם אחרי הניסוי אין הבדל מגדרי; קבוצת הביקורת: 68.67±15.6 לעומת 62±16.4 (בנים בנות בהתאמה), p=ns; קבוצת הניסוי: 72.4±7.88 לעומת 76.7±15 (בנים בנות בהתאמה), p=ns.

1.2. כיוון שמספר הבנים ומספר הבנות בקבוצת הניסוי ובקבוצת הביקורת קטן (<30), בוצע מבחן Kolmogorov Smirnov Normal test עם רמת מובהקות 0.05 כדי לבדוק נורמליות של מדגם הבנים והבנות. התוצאות הראו כי ערכי מבחן Kolmogorov Smirnov, אשר התקבלו עבור מדגם הבנים הם 0.174 ($C_{K-S}^{0.05,10}$=0.41>0.174) ו-0.180 ($C_{K-S}^{0.05,10}$=0.41>0.180), עבור ה-pre-test וה-post-test בהתאמה, כאשר $C_{K-S}^{0.05,-}$ מסמן את הערך הקריטי של Kolmogorov Smirnov Normal test ברמת מובהקות 0.05, לכן ברמת מובהקות 0.05 מתקיים שמדגם הבנים התקבל מהתפלגות נורמלית הן עבור מבחן ה-pre והן עבור מבחן ה-post. ובאותו אופן עבור מדגם הבנות ערכי מבחן Kolmogorov Smirnov שהתקבלו היו 0.249 ($C_{K-S}^{0.05,15}$=0.338>0.249) ו-0.201 ($C_{K-S}^{0.05,15}$=0.338>0.201) עבור ה-pre-test וה-post-test בהתאמה; לכן ברמת מובהקות 0.05 מתקיים שמדגם הבנות התקבל מהתפלגות נורמלית הן עבור מבחן ה-pre והן עבור מבחן ה-post.

טבלה 3 מסכמת את ההבדלים לפני הניסוי ואחריו בין הקבוצות ובתוך הקבוצות. מתוך הטבלה אפשר ללמוד שבקבוצת הביקורת קיים הבדל לפני הניסוי ואחריו בקרב הבנים וגם בקרב הבנות, $p<0.001$; ואילו בקבוצת הניסוי לא נמצא הבדל לפני ואחרי ההתערבות בקרב בנים וגם בקרב בנות, p=ns. ממצא זה עולה בקנה אחד עם הממצאים לקבוצות ביקורת וניסוי בשלמותן (טבלה 2).

טבלה 3: השוואה בין בנים לבנות (קבוצת ביקורת – $N_{\text{בנים}}=15$; קבוצת הניסוי – $N_{\text{בנים}}=10$)

	בנים		**p בנים**	**בנות**		**p בנות**
	pre	**post**	**(pre:post)**	**pre**	**post**	**(pre:post)**
ביקורת	80.2	67.68	2.54×10^{-5}	72.6	62	3.74×10^{-5}
	(14.7)	(15.6)		(15.4)	(16.4)	
ניסוי	68.6	72.4	ns	74.13	76.7	ns
	(11.2)	(7.88)		(17.76)	(15)	
p(ביקורת:ניסוי)	0.0358	ns		ns	0.0353	

(סטיית תקן בסוגריים)

ועוד זאת, מתוך הנתונים בטבלה 3 אפשר ללמוד שבקבוצת **הבנים** היה הבדל לפני הניסוי ואחריו רק **לפני** ההתערבות, p=0.0358, ואילו בקבוצת **הבנות** ההבדל היה **אחרי** הניסוי, p=0.0353.

בשל הממצאים בטבלה 3, ובשל המספר הקטן של בנים ובנות בשתי הקבוצות, נסתפק בהמשך הניתוח לכל אחת מקבוצות ביקורת וניסוי בשלמותן, כלומר לא ייבדקו הבדלים מגדריים.

2. בדיקת השערת המחקר השנייה

בדיקת ההשפעה של שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות על צמצום השגיאות האופייניות הנפוצות בקרב תלמידים בנושא פונקציות טריגונומטריות.

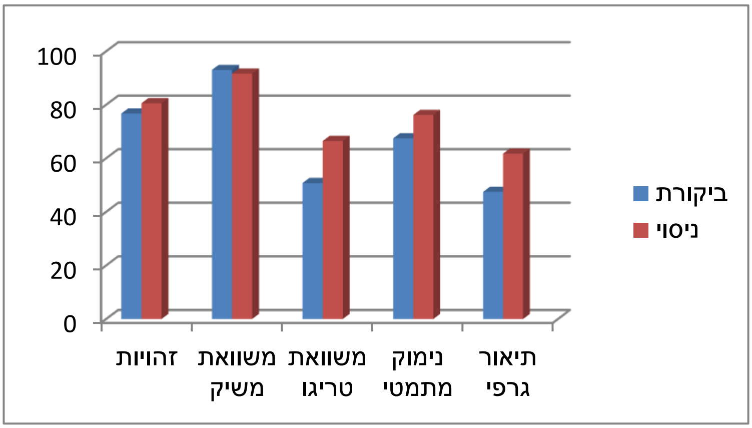
ממצאים המתייחסים להישגי כל 50 התלמידים לפי קטגוריות המתייחסות לתוכן של נושא הטריגונומטריה, כאשר 25 מהם (קבוצת הביקורת) למדו בשיטה פרונטלית ו-25 אחרים (קבוצת הניסוי) למדו לפי שיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות.

בעזרת הניתוח של תכני הטריגונומטריה, כפי שפורטו ברקע התאורטי, נעשתה חלוקת מבחן הפוסט (post) לחמש קטגוריות שונות, בהתאם למיומנות הנדרשת: מעגל טריגונומטרי, זהויות (שאלה 1); משוואת משיק (שאלה 2); מחזוריות, משוואות טריגונומטריות, נקודות קיצון, עלייה וירידה (שאלות 3 עד 5); יכולת הנימוק המתמטי (שאלה 6); תיאור גרפי של פונקציה (שאלה 7).

טבלה 4: סיכום ממצאים (ממוצעי הציונים, סטיות התקן ומובהקות) לפי קטגוריות

הקטגוריה לפי תוכן	הביקורת		הניסוי		ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים
	ממוצע	סטיית תקן SD	ממוצע M	סטיית תקן SD	
מעגל טריגונומטרי, זהויות	76.52	17.4	80.56	15.8	0.19
משוואת משיק	93	7.88	91.64	8.99	0.31
מחזוריות, משוואות טריגונומטריות	50.72	16.38	66.44	14.40	<0.01
יכולת הנימוק המתמטי	67.44	15.34	76.2	11.23	0.01
תיאור גרפי של פונקציה	47.44	16.36	61.72	21.97	0.01

P<0.05



איור 3: ממוצע הציונים במבחן הפוסט (post) לשתי הקבוצות לפי הקטגוריות

לבדיקת ההשערה השנייה נערך מבחן t למדגמים תלויים, בטבלה 4 ובאיור 3 אפשר לראות שהממוצעים של הקטגוריה – משוואת המשיק – של שתי הקבוצות, הם גבוהים וגם קרובים אחד לשני, ונמצא שאין הבדל סטטיסטי מובהק בין קבוצת הביקורת לבין קבוצת הניסוי ($p=0.31>0.05$). התמונה דומה בקטגוריה של מעגל טריגונומטרי וזהויות, הממוצעים גם טובים וגם קרובים אחד לשני ואין הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.19$).

בקטגוריה הרביעית – יכולת הנימוק המתמטי – הממוצע של קבוצת הניסוי הוא 76.2±11.23 לעומת 67.44±15.34 של קבוצת הביקורת, נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p<0.01$). בשתי הקטגוריות של מחזוריות ומשוואות ושל תיאור גרפי, הממוצעים של קבוצת הביקורת הם נמוכים מאוד מהממוצעים של קבוצת הניסוי. מעניין לראות שסטיות התקן אינן באותה מגמה, בקטגוריה השלישית

הן די קרובות, אבל בקטגוריה החמישית סטיית התקן של קבוצת הניסוי היא גדולה יותר. בשתי הקטגוריות האלו נמצא הבדל סטטיסטי מובהק ($p<0.01$).

להשלמת התמונה להסקת מסקנות נבדקו תשובות התלמידים בשתי הקבוצות ביקורת וניסוי, כאשר מתייחסים לנכונות התשובות לכל שאלה במבחן הפוסט ובטבלאות 5 ו-7.

טבלה 5: התפלגות תשובות קבוצת הביקורת במספרים ובאחוזים במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	מס' תשובות נכונות	מס' תשובות חלקיות	מס' התשובות הלא נכונות	תשובות נכונות באחוזים	תשובות חלקיות באחוזים	תשובות לא נכונות באחוזים
1	8	13	4	32%	52%	16%
2	15	10	0	60%	40%	0%
3	5	11	9	20%	44%	36%
4	6	12	7	24%	48%	28%
5	6	11	8	24%	44%	32%
6	7	11	7	28%	44%	28%
7	4	10	11	16%	40%	44%

השגיאות של התלמידים במבחן (post) חולקו לחמש קטגוריות כפי שמופיע בטבלאות 6, 8 ו-9. החלוקה התבססה על העקרונות המנחים בבדיקת בחינות הבגרות במתמטיקה (משרד החינוך התרבות והספורט, 2012), וגם בהסתמך על התאוריה של ווסטון (Watson, 1990).

טבלה 6: התפלגות לפי שגיאות התלמידים בקבוצת הביקורת במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	הבנה לקויה	שימוש שגוי בנוסחאות	שגיאות טכניות	אי ריכוז ורשלנות	שימוש מוטעה בנתונים
1	60.2%	30.5%	6.1%	0%	3.2%
2	20%	58.7%	21.3%	0%	0%
3	49.7%	14.1%	15.8%	20.4%	0%
4	39.7%	29.4%	16.2%	0%	14.7%
5	50.1%	25%	15%	5.21%	4.7%
6	48.2%	42.78%	9.02%	0%	0%
7	65.26%	0%	16.5%	11.1%	7.14%
ממוצע	47.6%	28.64%	14.28%	5.24%	4.24%

בטבלאות 5 ו-6 מוצגות ההתפלגויות של שגיאות התלמידים בקבוצת הביקורת, במבחן הסופי, הן לפי שאלות והן לפי קטגוריות (שיפורטו בהמשך).

לעומת זאת בטבלאות 7 ו-8 מוצגות ההתפלגויות של שגיאות התלמידים בקבוצת הניסוי, במבחן הסופי, הן לפי שאלות והן לפי קטגוריות.

טבלה 7: התפלגות תשובות קבוצת הניסוי במספרים ובאחוזים במבחן המסכם (post)

מס' שאלה	מס' תשובות נכונות	מס' תשובות חלקיות	מס' התשובות הלא נכונות	תשובות נכונות באחוזים	תשובות חלקיות באחוזים	תשובות לא נכונות באחוזים
1	9	13	3	36%	52%	12%
2	11	14	0	44%	56%	0%
3	9	10	6	36%	40%	24%
4	10	9	6	40%	36%	24%
5	10	10	5	40%	40%	20%
6	9	12	4	36%	48%	16%
7	9	8	8	36%	32%	32%

טבלה 8: התפלגות לפי שגיאות התלמידים בקבוצת הניסוי במבחן המסכם (post)

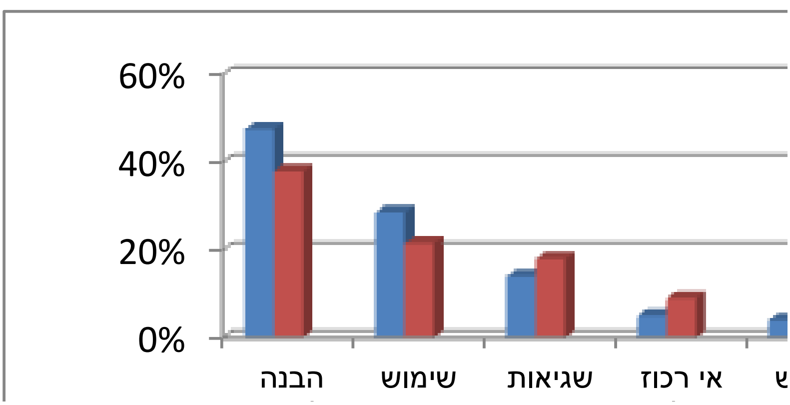
מס' שאלה	הבנה לקויה	שימוש שגוי בנוסחאות	שגיאות טכניות	אי ריכוז ורשלנות	שימוש מוטעה בנתונים
1	52.3%	22.5%	9.4%	12.4%	3.4%
2	21%	41.5%	32.5%	0%	5%
3	40.8%	17%	21.3%	16.9%	4%
4	32.5%	15%	22%	12%	18.5%
5	43%	16.2%	19%	11.8%	10%
6	44%	35.6%	14.38%	0%	6.02%
7	42.4%	12.84%	19.5%	13.26%	12%
ממוצע	38%	21.52%	18.44%	9.48%	8.36%

לבדיקת ההבדלים בין קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת, כאשר מתייחסים לסוגי השגיאות במבחן הפוסט, נעשה מבחן הסטודנט (t-test) למדגמים תלויים, התוצאות מתוארות בטבלה 9.

טבלה 9: ממוצעי אחוזי השגיאות, סטיות התקן ומבחן t למבחן (post) לפי קטגוריות

מס'	הקטגוריה לפי סוג השגיאה	הביקורת		הניסוי		ערך p עבור מבחן t למדגמים תלויים
		ממוצע M	סטיית תקן SD	ממוצע M	סטיית תקן SD	
1	**הבנה לקויה בטריגונומטריה**	47.6%	16.92	38%	20.13	0.02
2	**שימוש שגוי בנוסחאות**	28.64%	10.48	21.52%	12.54	<0.01
3	**שגיאות טכניות**	14.28%	20.33	18.44%	20.68	0.23
4	**אי ריכוז ורשלנות**	5.24%	4.14	9.48%	6.5	0.01
5	**שימוש מוטעה בנתונים**	4.24%	4.54	8.36%	7.04	0.01

בטבלה 9 ובאיור 4 מתוארים ממוצעי אחוזי השגיאות של כל קטגוריה ביחס למכלול השגיאות של כל אחת משתי הקבוצות. הקטגוריה הראשונה (הבנה לקויה בטריגונומטריה) היא הדומיננטית ביותר מבין שאר הקטגוריות: 47.6±16.92% מהשגיאות של קבוצת הביקורת מיוחסות להבנה לקויה במתמטיקה ואילו 38±20.13% מהשגיאות בקבוצת הניסוי הן שגיאות של הבנה. כמו כן נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.02, p<0.05$). בקטגוריה השנייה (שימוש שגוי בנוסחאות) ממוצעי אחוזי השגיאות של קבוצת הביקורת היא 28.64±10.48% ושל קבוצת הניסוי 21.52±12.54%. כמו כן נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p<0.01$). בקטגוריה השלישית (שגיאות טכניות) לא נמצא הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות. בשתי הקטגוריות האחרונות של אי ריכוז ורשלנות ושל שימוש מוטעה בנתונים, האחוזים הם קטנים יחסית אבל יש הבדל סטטיסטי מובהק בין שתי הקבוצות ($p=0.01$); מעניין שבשתי קטגוריות אלו המגמה היא הפוכה, כלומר אחוזי השגיאות בקבוצת הניסוי גדולים יותר.



איור 4: התפלגות השגיאות במבחן הפוסט לשתי הקבוצות

בבדיקה תשובות התלמידים במבחן הפוסט, התגלו השגיאות האופייניות של התלמידים אשר השתתפו במחקר כפי שהוזכר לעיל.

כדי להשלים את הממצאים הסטטיסטיים לעיל, מן הראוי להמחיש את השגיאות האופייניות. בטבלה 10 להלן מופיעות דוגמאות של שגיאות אופייניות בהתאם לקטגוריות השונות מקבוצות הניסוי והביקורת וההבדל ביניהן.

טבלה 10: דוגמאות לשגיאות אופייניות של קבוצת הניסוי וקבוצת הביקורת

קטגוריה	דוגמאות	**P** (להבדלים בין קבוצת הניסוי והביקורת)
הבנה לקויה בטריגונומטריה	בלבול בין הפונקציות.	ns
	מציאת פתרון אחד והתעלמות משאר הפתרונות.	$p<0.05$, לטובת הניסוי.
		$p<0.05$, לטובת הניסוי.
	התעלמות מהמחזוריות.	ns
	בלבול בין מעלות ורדיאנים.	ns
	שימוש בלתי ראוי בנתונים.	
שימוש שגוי בנוסחאות	בלבול בפתרונות הכלליים של המקרים הפרטיים.	$p<0.05$, לטובת הניסוי.
	זהויות טריגונומטריות נכונות בצורה חלקית.	ns
שגיאות טכניות	שגיאות חישוב.	ns
שימוש שגוי בנתונים	בלבול בין הנתונים.	ns
אי ריכוז ורשלנות	אי התייחסות לאחד הנתונים של השאלה.	ns
	מציאת משתנים מיותרים.	$p<0.05$, לטובת הניסוי.

דיון

מחקרים רבים בחינוך המתמטי עסקו בשימוש בשגיאות, אך לא הייתה התמקדות בנושא מתמטי ספיציפי. מקצת אותם מחקרים הציגו שגיאות אופייניות באחד מנושאי הטריגונומטריה (קלונובר, 1997; Gür, 2009), אך לא נערכו מחקרים אשר התייחסו להשפעת הדיון הכיתתי והעצמי בשגיאות התלמידים על הישגיהם בנושא פונקציות טריגונומטריות. לכן מצד אחד מחקר זה עשוי להוסיף עוד ידע לתחום, ומצד אחר לימוד יחידת טריגונומטריה במהלך שימוש בפתרונות שגויים, עשוי לתת לתלמיד להעמיק את החשיבה ואולי גם לשפר את ההישגים שיפור רב בנושא.

במחקר זה למדה קבוצת תלמידים את נושא פונקציות טריגונומטריות בשיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, לעומת קבוצה אחרת שלמדה אותו נושא בשיטת הוראה פרונטלית. הממצאים הראו על כך כי קיים הבדל מובהק בין הישגי התלמידים בשתי הקבוצות לאחר הניסוי, כלומר הישגי קבוצת הניסוי, שלמדה בשיטת

הדיון הכיתתי, נמצאו גבוהים יותר מאשר הישגי קבוצת הביקורת, שלמדה אותו נושא אך בשיטה הפרונטלית. מעניין לראות, כי בכל זאת לא נמצא הבדל מובהק בהישגי התלמידים בקבוצת הניסוי בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, וזה אולי נובע מכך שמדובר בחומרים די שונים מבחינת המורכבות והקושי. החומר במבחן המקדים הוא מעין הקדמה פשוטה לנושא פונקציות טריגונומטריות ואילו החומר במבחן הסופי מורכב יותר, אך זה לא מנע מהתלמידים בקבוצת הניסוי לשמור על אותה רמה, על אף השוני הניכר ברמת הקושי בין שני המבחנים.

לעומת זאת בקבוצת הביקורת נמצא הבדל מובהק בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, והייתה מגמת ירידה בממוצע במבחן הפוסט. אפשר להסביר את הירידה הניכרת במבחן הפוסט בקבוצת הביקורת לסוג הבעיות והתכנים, אשר היו בכל אחד מהמבחנים; במבחן המקדים הבעיות מאופיינות בנטייה לטכניקה שצבר התלמיד לאחר תרגול בתכנים אלה. כמו כן תכנים אלה היו רק תכנים התחלתיים מבחינת החשבון הדיפרנציאלי של הפונקציות הטריגונומטריות, ואכן, כפי שדיווח גרהרדט (Gerhardt, 2015), הטעויות של הסטודנטים בתכנים אלה קשורות בעיקר לשגיאות אלגבריות ולשגיאות אריתמטיות, ואילו בבעיות במבחן הפוסט הייתה התעסקות רבה יותר בתכני החדו"א (החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי). הקשיים של התלמידים בחדו"א ידועים בספרות, כיוון שמחקרים מסוימים בחינוך המתמטי עוסקים בקשיים אלה (Blackett & Tall, 1991; Tall, 1993; Tarmizi, 2010). התוצאה הזאת מחזקת את ההסבר הקודם, הקשור לקבוצת הניסוי, כלומר ההבדל בין המבחן המקדים למבחן הפוסט, הוא תוצאה של מורכבות התכנים במבחן הפוסט. כל זה מחזק את השערת המחקר הראשונה, אשר גרסה, כי שילוב שיטת ההוראה של דיון כיתתי/עצמי בשגיאות, בנושא פונקציות טריגונומטריות, משפר את ההישגים של התלמידים.

ממצאים אלה תומכים בתוצאות מחקרה של דוד (2007), אשר טוענת, כי שימוש בשגיאות תורם להעמקת התובנות המתמטיות. כמו כן הם מחזקים את טענותיה של רייז (2007), אשר ציינה כי ניצול הידע על שגיאות אפשריות של תלמידים, כבר במהלך הוראת הנושא המתמטי הנלמד, עשוי לסייע במניעתן של שגיאות אלו. כמובן, כל זה מחדד את טענתן של תירוש (Tirosh, 1990) ווילסון (Wilson, 1990), שלפיה אפשר ללמד מתמטיקה מתוך התמקדות בחוסר עקביות, בגילוי חוסר עקביות ובניתוח רעיונות לא עקביים; פעילויות אלה יכולות לאפשר ללומד לזהות את ההיבטים השגויים בידע שלו ולגרום למוטיבציה לשנות את הידע הזה ולתרום לפיתוח של חשיבה לוגית.

יתרה מזו, ממצאי מחקר זה עולים בקנה אחד עם טענתה של גירון (2007), אשר מדגישה שדיון בכיתה תורם רבות להבנת מושגים במתמטיקה בקרב תלמידים, ונותן להם לפרש טעויות בעזרת ידע קודם. מי שלא עובר חוויה זו, יסבול מתחושה לא נעימה, שתפגע פגיעה רבה בביטחון העצמי שלו. לדעת פרקש וצמיר (2008), תלמיד, אשר נחשף לקטגוריות אחרות של שגיאות בדרך לרמת חשיבה גבוהה כמתוכנן, חייב לעבור שלב של בשלות קוגניטיבית, כי הטעות גורמת לצמיחת קונפליקט קוגניטיבי, אשר יש לו תפקיד חשוב בהליך הלמידה ובעיקר בלמידה עצמית. יתרה מזו, הלמידה השיתופית, הניכרת בדיון הכיתתי, הביאה לחילופי הרעיונות בין התלמידים, וזה אפשר הזדמנות חשובה לשיח מתמטי עשיר. התלמיד שמע והשמיע טענות והצעות, השתתף בפירוש הסוגיות למיניהן, ניתח את הבעיות מנקודת מבטו, וכל זה הביא את התלמידים להבנה טובה יותר בנושא. כמו כן הלמידה בשיטה זו עוררה את הסקרנות של התלמידים, הקנתה להם הרגשה נוחה וסיפקה למתקשים מביניהם הזדמנות להשתתף

בפתרון המוצג לפניהם. הם היו צריכים רק לאתר את השגיאה ולתקן אותה. כאשר תלמידים מסבירים את דרכי חשיבתם ומצדיקים אותן, הם מאתגרים את חבריהם וחשיבתם נעשית ברורה ובהירה (Lampert, 1990).

מחקרים בחינוך מתמטי הראו, כי במעבר מפונקציות אלגבריות לפונקציות טריגונומטריות, מתגלה הבדל בין הבנה אינסטרומנטלית ובין הבנה רלציונית בקרב התלמידים (Gür, 2009). יתרה מזו, קלונובר (1997) טוענת כי התלמידים מתקשים בעת עיסוקם בפונקציות טריגונומטריות, כאשר הם נתקלים במונחים חדשים כגון פונקציות מחזוריות. קלונובר (שם) משייכת את סיבת הקושי הזה למעבר מעיסוק בפונקציות אלגבריות לפונקציות טריגונומטריות. חוקרים רבים אחרים (פרקש וצמיר, 2008; תמיר ואחרים, 1995; Greenfield, 1987; Gür, 2009) מציעים להתגבר על הקושי במעבר זה בעזרת שימוש בשגיאותיהם של התלמידים במהלך הלמידה. ראוי לציין, כי טעויות של תלמידים אינן מקריות, אלא מודלים אינטואיטיביים סמויים מניעים אותן, וחשוב להעלות מודלים אלה למודעותם של התלמידים (Fischbein, 1990).

עוד ממצא חשוב שעלה ממחקר זה מראה, כי התרומה של שיטת דיון כיתתי/עצמי בשגיאות לא הייתה רבה בנושאים שפתרונם מתבסס על שיטה אלגוריתמית, כמו מציאת משוואת המשיק, בעוד שנמצא הבדל מובהק של אחוזי השגיאות הנובעות מהבנה לקויה בטריגונומטריה בין שתי הקבוצות; תוצאה זו עולה בקנה אחד עם ממצא שעלה ממחקרה של קלונובר (1997), אשר מייחסת להבנת התלמידים את הפונקציות האלגבריות יותר מאשר את הפונקציות הטריגונומטריות, כיוון שהתלמידים עשויים לראות במציאת משוואת המשיק תהליך דומה לפונקציות אלגבריות. יש לציין שלא היה הבדל מגדרי בכל אחת מהקבוצות, וזה תואם למסקנה של בן ששון-פורסטנברג (2001) שטענה כי במגזרים מסוימים לא נמצאו הבדלים מובהקים בין הישגי הבנים להישגי הבנות.

באשר להשערת המחקר השנייה, אשר גורסת כי שיטת הלימוד של דיון בפתרונות שגויים גרמה לצמצום רב של השגיאות האופייניות של תלמידים – הממצאים מראים כי השערה זו אוששה. ממצא זה מראה כי דיון כיתתי/עצמי בשגיאות הוא תהליך שבו התלמידים בונים ידע מתמטי מתוך פעילות חקר בעולם המושגים המתמטיים בתיווכו של המורה (גביש, 1998). מכאן תהליך זה עשוי לצמצם את השגיאות האופייניות של התלמידים בנושא הנלמד.

לסיכום, כפי שאפשר ללמוד ממחקר זה, הדיון בשגיאות, שבנוי על עבודה שיתופית ודיאלוג רפלקטיבי בין המורה לתלמידים ובין התלמידים עצמם, מפתח שיח מתמטי, אשר מביא לידי העלאת רעיונות ולידי שיתוף פעולה במהלך תהליך הבנייה, שמתבסס על החוויות וההתנסויות שהתלמיד בונה בעצמו אחרי שכבר השתתף בדיון הכיתתי. ממצאי המחקר מאמתים את הטענה שלמידה המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בשגיאות – שהיא בעיקר סביבה פעילה וחווייתית התורמת לשיפור הישגי התלמידים – עוזרת לתלמידים לצמצם את שגיאותיהם. ובעיקר דיון בשגיאות נחשב למיומנות גבוהה, כיוון שהוא מורכב מתחומי חשיבה רבים: חשיבה סימבולית, חשיבה ביקורתית, חשיבה יצירתית, חיפוש סיבות לתופעה, נימוק טענות, בחירה נכונה לשיטה המתאימה לבעיה ושימוש בידע קודם (Greenfield, 1987).

בשל מסקנות מחקר זה, אשר עסק בקשר בין שיטת לימוד המתבססת על דיון כיתתי/עצמי בשגיאות ובין הישגי התלמידים וצמצום השגיאות האופייניות אצלם, אפשר לטעון שמומלץ להציג לתלמידים תרגילים עם פתרונות מלאים, בלתי נכונים, ולבקש מהם לאתר את השגיאות ולתקן אותן במהלך הפעלת שיח מתמטי. שיטה יעילה זו מביאה לידי שיפור בהישגי התלמידים ולידי הפחתת השגיאות הנובעות מהבנה לקויה, ולכן היא מחזקת את הביטחון העצמי אצלם ומעלה את רמת המוטיבציה בקרב התלמידים. ממצאים אלה הם בהתאם למחקרו של בוראסקי (Borasi, 1994), אשר טען כי שימוש בשגיאות בתהליך למידה יכול לתרום ללמידת מתמטיקה, אשר מפחיתה את הקשיים בלמידת מושגים, מגדילה את מומחיות התלמידים ב"עשייה מתמטית" וכמו כן מגדילה את הביטחון העצמי של התלמידים ביכולת הלמידה שלהם וביכולת השימוש בכלים מתמטיים.

מקורות

אביטל, ש' (1981). מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד? **שבבים: עלון למורי המתמטיקה, 15**, 1-5.

בן ששון-פורסטנברג, ש' (2001). **הבדלים בין המינים במערכת החינוך**. ירושלים: הכנסת – מרכז מחקר ומידע. אוחזר מתוך https://www.knesset.gov.il/mmm/data/pdf/m00927.pdf

גירון, ת' (2007). מי מדבר על שגיאות? דיון בכיתה בהכללות יתר של התלמידים. **מספר חזק 2000**, **13**, 38-41.

דוד, ח' (2007). שימוש בשגיאות של תלמידים כמנוף לשיפור הלמידה ולהעמקת הידע המתמטי. **על"ה, 37**, 81-93.

הפנר, ר' (2004). טעות או שגיאה. בתוך **מילון השפה העברית**. אוחזר מתוך http://www.safa-ivrit.org/synonyms/taut.php

משרד החינוך התרבות והספורט. (2011). **חוזר מפמ"ר לשנת הלימודים התשע"ב לעל יסודי (ע"ב/ 1)**. ירושלים: המחבר.

פרקש, א' וצמיר, פ' (2008). פתרונות נכונים ושגויים לבעיה טריגונומטרית במישור (חלק ראשון: מחשבות על משפט הסינוסים). **על"ה, 39**, 81-86.

קלונובר, נ' (1997). המושג 'פונקציה' בטריגונומטריה אצל תלמידי כיתות י"א וי"ב – השוואה בין פונקציות אלגבריות ופונקציות טריגונומטריות. **על"ה, 21**, 75-81.

רייז, ר' (2007). **טעויות של תלמידים כמנוף להוראה**. חיפה: הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים. אוחזר מתוך http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/beit%20sefer%20kaits%207.pdf

תמיר, פ', זיו, ש' ופטקין, ד' (1995). הוראת המדעים והמתמטיקה בכיתות ח' בישראל באמצע שנות ה-90. **הלכה למעשה בתכנון לימודים, 13**, 219-256.

Alro, H., & Skovsmose, O. (1996). On the right track. *For the Learning of Mathematics, 16*(1), 2-8, 22.

Behr, M., & Harel, G. (1990). Students' errors, misconceptions, and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 75-84.

Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 144-151). Assisi, Italy: PME.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboard for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14*(1), 31-50.

Gerhardt, I. (2015). The alarm experiment. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 25*(1), 80-97.

Greenfield, L. B. (1987). Teaching thinking through problem solving. In J. E. Stice (Ed.), *Developing critical thinking and problem-solving abilities* (pp. 5-22). San Francisco: Jossey-Bass.

Gür, H. (2009). Trigonometry learning. *New Horizons in Education, 57*(1), 67-80.

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum, 34*(1), 4-8.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Leighton, J. P., Chu, M-W., & Seitz, P. (2012). Cognitive diagnostic assessment and the learning errors and formative feedback (LEAFF) model. In R. Lissitz (Ed.), *Informing the practice of teaching using formative and interim assessment: A systems approach* (pp. 183-207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

McMillan, J. H., & Turner, A. (2014, April). *Understanding student voices about assessment: Links to learning and motivation*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Philadelphia.

Miller, S. (2001). Understanding transformations of periodic functions through art. *Mathematics Teacher, 94*(8), 632-635.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Fla.: Academic Press.

Sokolowski, A., & Rackley, R. (2011). Teaching harmonic motion in trigonometry. *Australian Senior Mathematics Journal, 25*(1), 45-53.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. *Plenary Address, Proceedings of the Working Group 3 on Students' obstacles in Calculus, ICME 7* (pp. 13-28). Que'bec, Canada.

Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing students' difficulties in learning calculus. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8*, 377-383.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3&4), 111-129.

Tugend, A. (2011). *Better by mistake: The unexpected benefits of being wrong*. New York: Riverhead Books.

Watson, J. (1990). Research for teaching. Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher, 46*(3), 12-14.

Weber, K. (2005). Students’ understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91-112.

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Wongapiwatkul, P., Laosinchai, P., & Panijpan, B. (2011). Enhancing conceptual understanding of trigonometry using earth geometry and the great circle. *Australian Senior Mathematics Journal, 25*(1), 54-63.

Zimmerman, B. (2001). Theories of self-regulated learning and academic achievement: An overview and analysis. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Self-regular learning and academic achievement: Theoretical prospectives* (2nd ed., pp. 1-37). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

נספח א

מבחן מקדים

זמן: 60 דקות

ענה על השאלות הבאות:

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, הסבירו למה זה מתקיים לכל ערך של x.	(15 נקודות)
2. נתון: $\tan x=\frac{3}{4}$, חשבו ללא שימוש במחשבון את $tan2x$.	(10 נקודות)
3. נתון: $\sin x=\frac{1}{4}$, חשב את $sin2x$.	(10 נקודות)
4. מצא (באמצעות x) ערך אפשרי אחד של x.	(20 נקודות)
א. $\sin(180-\alpha)=\sin 2x$.	(10 נקודות)
ב. $\cos(90-\alpha)=\sin x$.	(10 נקודות)
5. גזרו את הפונקציות:	(20 נקודות)
א. $y=3\sin x$.	(5 נקודות)
ב. $y=x\cos x$.	(5 נקודות)
6. $y = x^2+\sin^2 x$.	(5 נקודות)
7. $y=\tan x-\frac{\pi}{2}$.	(5 נקודות)
8. נתון $\sin x=\frac{1}{2}$:, מצא שני ערכים של x שמקיימים את המשוואה.	(15 נקודות)
9. הסבירו למה $\tan 90$ בלתי מוגדר.	(10 נקודות)

נספח ב

דוגמה לפתרון שגוי ולשיח מתמטי

דוגמה 1:

פתור את המשוואה: $\sin 2x=\sin x$

הפתרון:

$\sin 2x = \sin x :$

$\sin x = 0$

$x - \pi k$

השיח המתמטי:

תלמיד 1: "האם $\sin 2x$ שווה $2\sin x$?"

תלמיד 2: "המעבר הזה מ- $\sin 2x$ ל- $2\sin x$ הוא נכון כי פתרנו לא מזמן תרגיל בכיתה והשתמשנו בנוסחה זו."

תלמיד 3: "את מתבלבלת בין זהות למשוואה, בכיתה פתרנו משוואה וזה לא אותו דבר".

המורה: "מה ההבדל בין זהות למשוואה?".

תלמיד 4: "למשל $\sin x = \cos x$ זו משוואה כי היא נכונה רק לערכים מסוימים של x כמו $\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4}$ ולכן זו אינה זהות כי זהות צריכה להתקיים לכל ערך של x בתוך תחום ההגדרה".

תלמיד 5: "חסר עוד פתרון כללי כי משוואה של סינוס יש לה שני פתרונות כלליים".

תלמיד 6: "אבל זה מקרה מיוחד שיש לו פתרון כללי אחד".

נספח ג

מבחן פוסט: שאלות, מטרות ומחוון

שאלה 1:

א. האם הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos x+1}{\sin x}$ חותכת את ציר ה-y? נמק את תשובתך.

ב. $(\sin^2 x)^2-(cos^2 x)^2$ $(\cos^2 x)^2(\sin^2 x)^2$, נסחו את הביטוי בצורה אחרת תוך כדי שימוש בזהויות טריגונומטריות.

חלק א': בדק את הבנת התלמיד למושג של פונקציה טריגונומטרית תוך כדי התייחסות למעגל טריגונומטרי. לסעיף זה ניתנת הערכה של 8% מהציון הכולל. מדוע זה קשור למעגל? ניסיון להציב 0 בפונקציה – מספיק.

חלק ב': בדק את הידע של התלמידים בזהויות טריגונומטריות ולבקיאותם בטכניקה אלגברית. לסעיף זה ניתנת הערכה של 7% מהציון הכולל.

שאלה 2:

מצאו את המשוואה של המשיק לפונקציה: $y=\cos 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.

שאלה זו בדקה את השליטה של התלמידים בפתירת תרגילים בדרך אלגוריתמית – מציאת המשוואה של משיק. לשאלה זו ניתנת הערכה של 10% מהציון הכולל.

שאלה 3:

נתונה הפונקציה: $f(x)=-2x+2\cos x$, שיפוע המשיק לפונקציה שווה 1-, מצאו את שיעורי ה-x של נקודות ההשקה בתחום $-\pi\le x\le 2\pi$.

שאלה 4:

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $y=4x+\sin 3x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

שאלה 5:

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $y=\frac{1}{2}x+\cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

שאלות אלו בדקו את הבנת תכונת המחזוריות המתבטאת בפתרון משוואות טריגונומטריות על מנת למצוא נקודות קיצון או תחומי עלייה וירידה. לכל שאלה ניתנת הערכה של 15% מהציון הכולל. לשלוש השאלות היה משקל של 45% מהציון הכולל.

שאלה 6:

הראו שלפונקציה $y=\tan x$ אין נקודות קיצון והיא עולה בכל תחום הגדרתה.

שאלה 6 בדקה את יכולת הנימוק המלא והפעלת שיקול דעת. לשאלה זו ניתנת הערכה של 10% מהציון הכולל.

שאלה 7:

נתונה הפונקציה: $y=ax+\sin 4x$, בתחום: $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

הפונקציה מקבלת מקסימום בנקודה $x=\frac{\pi}{6}$. בקצה של התחום?

א. מצאו את ערכו של a.

ב. מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המוחלטות בתחום הנתון.

ג. ציירו סקיצה של הפונקציה.

שאלה זו בדקה את יישום ההבנה והידע תוך כדי קישור בין ניסוח מתמטי לשרטוט גרפי. על שאלה זו ניתנת הערכה של 20% מהציון הכולל.

ד"ר אמאל שריף-רסלאן
מכהנת כראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה.
בוגרת תואר ראשון ושני בפקולטה למתמטיקה בטכניון, ותואר שלישי מהמחלקה להוראת המדעים בטכניון.
תחומי המחקר שלה הם מתמטיקה שימושית ברפואה (בפרט קרדיולוגיה) וחשיבה מתמטית מתקדמת.
כתבה פרסומים רבים בתחומים אלה.

רג'א אבו שאהין
מורה למתמטיקה בבית-ספר ניסויי תיכון מסעדה.
בעל ניסיון של 25 שנים בהוראה.
בוגר תואר ראשון ושני בחינוך מדעי במתמטיקה במכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה.