משה סטופל ושלמה חריר

כללי החילוק ותכונות המספרים הטבעיים – ככלי להוכחה ופתרון משימות במספרים שלמים

מבוא

מכלול המספרים השונים, המהווה בסיס לענפי המתמטיקה, הוא עולם קסום, רב-פנים ותכונות. העיסוק במספרים שונים מגלה מדי פעם בפעם תכונות בלתי-מוכרות, שבעזרתן ניתן למצוא תכונות נוספות באותם המספרים או באחרים.

המספרים הטבעיים – עם הופעתם בשחר התפתחותה של המתמטיקה – מהווים את אחת הקבוצות החשובות, המרכיבות את מכלול המספרים. קבוצת המספרים הטבעיים מכילה בתוכה אוסף רחב של תת-קבוצות, שלכל אחת מהן אפיונים ייחודיים.

להלן קבוצות אחדות:

א. המספרים הזוגיים והאי-זוגיים: $1,3,5,7,...$ $2,4,6,8,...$

ב. המספרים הראשוניים: $2,3,5,7,11,13,...$

ג. המספרים החד-ספרתיים, הדו-ספרתיים וכו' $1,2,3,...$ $11,12,13,...$

ד. השלישיות הפיתגוריות היסודיות: $(3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)$

ה. המספרים, המסתיימים ב-0 או בכל מספר אחר: $10,20,30,...$

ו. המספרים, המתחלקים (ללא שארית) ב-3: $3,6,9,12,...$ או בכל במספר אחר.

ז. קבוצת המספרים, שבחלוקתם ב-5 (או בכל מספר אחר) – נותנת שארית 2: $2,7,12,17,...$.

פעולות חשבון שונות על איברים בתת-קבוצה של מספרים טבעיים – מותירה לפעמים את התוצאה בתחום התת-קבוצה, ולפעמים נמצאת התוצאה בתת-קבוצה אחרת.

לדוגמה: חיבור מספרים אי-זוגיים נותנת תוצאה זוגית (יציאה מהתת-קבוצה). לעומת זאת, כפל של מספרים אי-זוגיים נותנת תוצאה אי-זוגית.

תארנים: *כללי החילוק, תכונות המספרים הטבעיים, דרכי-פתרון חלופיות.*

מצב דומה קיים גם בתת-קבוצה של קבוצות אחרות של מספרים: שלמים, שברים, חיוביים ושליליים, רציונליים ואי-רציונליים, מרוכבים. פעולות חשבון על איברים בקבוצה מסוימת – יכולה להניב תוצאה, שהיא בקבוצה אחרת.

לדוגמה:

מחד גיסא, תוצאת חיבור שני המספרים האי-רציונליים $\sqrt{12}+\sqrt{3}$, נותנת מספר אי-רציונלי, אך, מאידך גיסא, מכפלתם נותנת מספר רציונלי (את המספר 6).

כבר בחינוך היסודי נלמדים כללי החילוק (או בשם אחר: סימני החילוק) בקבוצה מצומצמת של מספרים: *2,3,4,5,6,9,10*. בכיתות היותר גבוהות ניתנים לפעמים כללי החילוק – לקבוצה נוספות של מספרים: *7,8,11,12,13,14,15*.

במהלך לימודי המתמטיקה לא תמיד מודגשות התכונות (וההסבר שלהלן) של מכפלות מספרים טבעיים עוקבים (גם שלמים עוקבים):

- מכפלה של שני מספרים עוקבים – תמיד מתחלקת ב-2.
- מכפלה של שלושה מספרים עוקבים – תמיד מתחלקת ב-6.
- מכפלה של ארבעה מספרים עוקבים – תמיד מתחלקת ב-24.
- מכפלה של שני מספרים עוקבים זוגיים – תמיד מתחלקת ב-8.
- מכפלה של שלושה מספרים אי-זוגיים עוקבים – תמיד מתחלקת ב-3.

בשלבי הלימוד המתקדמים יותר (ברמות של 4 ו-5 י"ל) – נדרשים התלמידים להוכיח, שביטויים, שהם פונקציה של מספר טבעי $P(n)$ (n – מספר טבעי), מתחלקים במספר מסוים.

לדוגמה:

הוכח, שעבור כל n טבעי $P(n)=7^{2n}-10\cdot 2^{2n}$ מתחלק ב-9.

בסוג כזה של תרגילים – הרי ברוב מוחלט של המקרים ניתנת ההוכחה על-ידי שימוש באינדוקציה מתמטית.

לרוב התלמידים – השימוש באינדוקציה נעשה כתהליך טכני ללא הבנת המשמעות העמוקה העומדת בבסיסה.

להלן כמה כללי חילוק של ביטויים מעריכיים בעלי-מספרים טבעיים, שניתן להשתמש בהם לפתרון ולהוכחה של משימות שונות.

* $P(n) = a^n - b^n$ מתחלק ב-a-b עבור כל n טבעי.

* $P(n) = a^n - b^n$ מתחלק ב-$a+b$ עבור כל n טבעי זוגי.

* $P(n) = a^n + b^n$ מתחלק ב-$a+b$ עבור כל n טבעי אי-זוגי.

את כללי-החילוק הנ"ל ניתן להוכיח בדרכים שונות, כגון: אינדוקציה, משפט השארית, חלוקת רב-איבר ברב-איבר, סכום של סדרה הנדסית.

השימוש בכללי החילוק היסודיים ובכללי-החילוק של ביטויים בעלי-מעריכים טבעיים, יחד עם ידע נוסף באלגברה (חוקי חזקות ובפעולות עם ביטויים מעריכיים, וכן ידע בסדרות שונות) – יוצגו ככלים להוכחה או לפתרון של משימות, הקשורות בתכונות של המספרים.

המשימות יוצגו בצורה מדורגת, כשלמרביתן מובאות דרכי-פתרון, וחלקן – לתרגול ולהתמודדות עצמית.

הבאת פתרונות חלופיים מצביעה על העושר הרב של המתמטיקה ועל ההנאה, שהיא מעניקה לעוסקים בה ולמתעניינים בענפיה הרבים והמגוונים.

סך הכל מובאות 26 משימות, שחלקן נאספו ממקורות שונים (ללא פתרון), המצוינים במידת האפשר במראי-מקומות [1-7]. חלקן התקבלו בתודה מד"ר רחל מוגילבסקי – עמיתה בחוג למתמטיקה של מכללת "שאנן", ובודדות חוברו על-ידי כותבי-המאמר.

חשוב לציין, שישנם גם פתרונות אחרים מאלו שהובאו, אך מטרת המאמר – להדגיש, שניתן לפתור משימות שונות במספרים טבעיים על סמך כללי חילוק פשוטים ואלגברה יסודית, ובמיוחד באותן המשימות, שמקובל לפתור אותן על-ידי אינדוקציה.

הצגת משימות

משימה מס׳ 1:

הוכח, כי הביטוי $P(n) = 10^n + 2$ **מתחלק ב-3 עבור כל n טבעי.**

הצבה של ערכי n החל מ-$n=1$ בביטוי – נותנת לו את הערכים הבאים:

12, 102, 1,002, 10,002.... סכום הספרות של כל אחד מערכי הביטוי הוא 3, ולכן לפי כלל החילוק ב-3, הביטוי תמיד יתחלק ב-3.

<u>הערה:</u> הביטויים $P(n) = 10^n + 5$ ו- $P(n) = 10^n + 8$ גם הם מתחלקים ב-3 לפי אותה המסקנה של המשימה.

משימה מס׳ 2

הוכח, כי הביטוי $P(n) = 10^n - 4$ **מתחלק גם ב-3 וגם ב-4 עבור כל** n **טבעי גדול מ-1.**

הצבה של ערכי n החל מ-$n=2$ בביטוי – נותנת לו את הערכים הבאים:

96, 996, 9,996 99,996.

המספר מתחלק ב-3, משום שסכום הספרות של כל אחד מערכי המספרים מתחלק ב-3.

המספר מתחלק גם ב-4 לפי כלל החילוק: "כל מספר המסתיים במספר דו-ספרתי (ספרת העשרות והיחידות שלו) שמתחלק ב-4, גם המספר עצמו יתחלק ב-4". במקרה זה כל המספרים מסתיימים ב-*96*, ולכן הם מתחלקים ב-4.

את החלוקה ב-4 ניתן להוכיח גם בדרך הבאה:

$$P(n) = 10^n - 4 = 10 \cdot 10^{n-1} - 4 = 2(5 \cdot 10^{n-1} - 2)$$

הביטוי שבסוגריים הוא זוגי, ולכן הוא מכיל את הגורם 2 (הפרש בין שני מספרים זוגיים) ומכפלה של שני מספרים זוגיים המתחלקת ב-4.

משימה מס' 3

הוכח, שהביטוי $P(n)=13n^4+26n^3-13n^2-26n$ מתחלק ל-312 עבור כל n טבעי.

מפתחים את *P(n)* כדלקמן:

$$P(n)=13n(n^3+2n^2-n-2)=13n[n(n^2-1)+2(n^2-1)]$$
$$=13n(n+2)(n^2-1)=13(n-1)n(n+1)(n+2)$$

המספר 312 הוא מכפלה של $13\cdot 24$.

הביטוי *P(n)* מורכב מגורם מכפלה 13 וממכפלה של ארבעה מספרים עוקבים. מכפלה של ארבעה מספרים עוקבים מכילה 2 מספרים זוגיים, שאחד מהם מתחלק ב-2, והשני ב-4, לכן המכפלה מתחלקת ב-8. כמו-כן בארבעה מספרים עוקבים יש, לפחות, מספר אחד שמתחלק ב-3. לכן המכפלה מתחלקת ב-24 $(3\cdot 8)$.

מ.ש.ל.

משימה מס' 4

הוכח, שהביטוי $P(n)=6^{2n}-1$ מתחלק:

א. ב-5 עבור כל n טבעי

ב. ב-7 עבור כל n טבעי

ג. ב-35 עבור כל n טבעי

ד. ב-37 עבור כל n טבעי זוגי

א. המספר 6 בכל מעריך טבעי מסתיים ב-6 $(6^1=6, 6^2=36, 6^3=216, 6^4=1296)$. חיסור של 1 גורם לכך שספרת היחידות של *P(n)* תהיה 5, שהרי זה כלל החילוק ב-5.

ניתן להוכיח זאת גם בדרך אחרת:

רושמים את *P(n)* בצורה הבאה:

$P(n)=6^{2n}-1=6^{2n}-1^{2n}$, ולפי הכלל, ש- $P(n)=a^n-b^n$ מתחלק ב-*a-b* מקבלים, ש-*P(n)* מתחלק ב-*6-1*, דהיינו ב-5.

ב. בהתאם לכלל, שלפיו $P(n)=a^n-b^n$ מתחלק ב-$a+b$ עבור n טבעי זוגי, הרי במקרה של $P(n)=6^{2n}-1^{2n}$ המעריך-זוגי, ולכן הביטוי מתחלק ב-$6+1$, דהיינו, ב-7.

ג. ביטוי, שמתחלק גם ב-5 וגם ב-7, מתחלק גם ב-35 $(5\cdot 7)$.
את החלוקה ב-35 אפשר להוכיח גם בדרך הבאה:
רושמים $P(n)=6^{2n}-1=36^n-1^n$. ביטוי זה מתחלק ב-$36-1$, דהיינו, ב-35, לפי כלל החלוקה שהוזכר.

ד. הביטוי $P(n)=36^n-1^n$ מתחלק ב-$36+1$, דהיינו, ב-37, לפי כלל החלוקה שהוזכר.

משימה מס' 5

הוכח, שהביטוי $P(n)=7^n+2^{n+3}$ מתחלק ב-9 עבור כל n זוגי.

רושמים את $P(n)$ באופן הבא:

$P(n)=7^n+2^3\cdot 2^n=7^n+8\cdot 2^n=7^n-2^n+9\cdot 2^n$. הביטוי 7^n-2^n מתחלק ב-$7+2$, דהיינו, ב-9 עבור n זוגי, לפי הכלל שהוזכר. הביטוי $9\cdot 2^n$ מתחלק ב-9 בשל הגורם המכפיל 9.

משימה מס' 6

הוכח, כי עבור כל n טבעי אי-זוגי:

א. הסכום $1^n+2^n+3^n$ מתחלק ב-$(1+2+3)$.

ב. הסכום $1^n+2^n+3^n+4^n$ מתחלק ב-$(1+2+3+4)$.

<u>הוכחה ל-א':</u>

לפי הכלל, ש- a^n+b^n מתחלק ל-$(a+b)$ עבור כל n אי-זוגי, 1^n+2^n יתחלק ב-3. מכאן ניתן לרשום, ש- $1^n+2^n=3k$, כאשר k – מספר טבעי אי-זוגי (k חייב להיות אי-זוגי, מאחר שהסכום 1^n+2^n הוא אי-זוגי).

מכאן,

$1^n+2^n+3^n=3k+3^n$.

מאחר ש-n הוא מספר טבעי אי-זוגי, נבטא אותו בצורה $n=2m+1$ (m – מספר טבעי).

מכאן,

$1^n+2^n+3^n=3k+3^{2m+1}=3k+3\cdot 3^{2m}=3(k+3^{2m})$. הביטוי שבסוגריים – זוגי (סכום של שני מספרים אי-זוגיים).

לכן הסכום $1^n+2^n+3^n$ הוא מכפלה של 3 במספר זוגי, והוא מתחלק ב-6.

<u>הוכחה ל-ב׳:</u>

בדומה לדרך ההוכחה של סעיף א׳, 1^n+4^n מתחלק ב-5, ונסַמנו ב-$5k$ (k – אי-זוגי) ; 2^n+3^n מתחלק ב-5, ונסַמנו ב-$5l$ (l – אי-זוגי).

מכאן,

$$1^n+2^n+3^n+4^n=5(k+l)$$

$k+l$ מספר זוגי (סכום של שני מספרים אי-זוגיים).

לכן הסכום $1^n+2^n+3^n+4^n$ הוא מכפלה של 5 במספר זוגי, והוא מתחלק ב-10.

מ.ש.ל.

משימה מס׳ 7 (משימות להתמודדות עצמית וללא פתרון)

א. הוכח, כי הביטוי $P(n)=10^n+116$ מתחלק ב-36 עבור כל n טבעי גדול מ-1.

ב. הוכח, כי המספר $2^{45}+7^{30}$ מתחלק ב-19.

ג. הוכח, כי המספר $3^{36}-8^4$ מתחלק ב-25 וגם ב-29.

משימה מס' 8

מצא את המספר הקטן ביותר, שמתחלק ב-35 ומורכב מהספרות 0 ו-1 בלבד.

המחלקים של 35 הם 5 ו-7. כדי שהמספר המבוקש יתחלק ב-5, עליו להסתיים ב-0. נותר למצוא את המספר הקטן ביותר, שמורכב מהספרות 0 ו-1 ומתחלק ב-7 ולהכפיל אותו ב-10 (אם ספרת היחידות שלו אינה 0), כדי שגם הוא יתחלק ב-5. מכיוון שלמספר 7 אין כלל חילוק פשוט, כמו למספרים *2,3,4,5,6,10* מחפשים את המספר הדרוש בשיטה של ניסוי וטעייה.

בין המספרים הדו-ספרתיים: 10 ו-11 אין מספר המתחלק ב-7. בין המספרים התלת-ספרתיים: ,100 101, 110 ו-111 אין מספר המתחלק ב-7.

כשעוברים למספרים הארבע-ספרתיים, מוצאים מיד, שהמספר 1,001 מתחלק ב-7.

לפיכך המספר הקטן ביותר, המורכב מהספרות 0 ו-1 בלבד ומתחלק ב-35, הוא 10,010.

משימה מס' 9

א. מצא את המספר התשע-ספרתי הקטן ביותר, המורכב מהספרות *1,2,3,…,8,9*; כל ספרה מופיעה פעם אחת, והוא מתחלק ב-*36*.

ב. כבסעיף א', אך מבוקש המספר הגדול ביותר.

ג. כבסעיף א', אך מדובר במספר עשר-ספרתי, הכולל גם את הספרה 0.

כדי שהמספר יתחלק ב-36, עליו להתחלק גם ב-4 וגם ב-9.

כל המספרים, שנבנים כתמורות של תשע הספרות הנתונות, מתחלקים ב-9, משום שסכום הספרות של כל מספר הוא 45 (*1+2+3+…+9=45*), שהוא כלל החילוק ב-9.

כדי שהמספר יתחלק גם ב-4, הרי לפי כלל החילוק ב-4, חייב החלק הימני הדו-ספרתי של המספר, להתחלק ב-4. על-מנת לקבל את המספר הקטן ביותר – יש לדאוג לכך שהספרות הקטנות יהיו בצד שמאל של המספר.

המספר, ההולם את הדרישה של סעיף א', הוא: *123,457,896*.

המספר ההולם את הדרישה של סעיף ב', הוא: *987,654,312*.

המספר ההולם את הדרישה של סעיף ג', הוא: *1,023,457,896*.

משימה מס' 10

ד. מצא את המספר הקטן ביותר, שמתחלק ב-75 ומורכב מספרות של 0 ו-1 בלבד.

ה. כבסעיף א', אך מתחלק ב-225.

(זו משימה עצמית ללא פתרון, מופיעה במקור [5])

משימה מס' 11

הוכח, כי לא קיים n טבעי, שעבורו הביטוי $3n+2$ יהיה ריבוע של מספר שלם.

צ"ל שלא קיים N – מספר שלם, שעבורו $3n+2=N^2$ (או $3n=N^2-2$). את המספר N ניתן לייצג באמצעות k – מספר שלם, בשלושה אופנים, הכוללים את כל המספרים השלמים.

$N=3k$ (מספר שבחלוקה ב-3 נותן שארית 0).

$N=3k+1$ (מספר שבחלוקה ב-3 נותן שארית 1).

$N=3k+2$ (מספר שבחלוקה ב-3 נותן שארית 2).

צ"ל שלא קיים k המקיים $3n=N^2-2$.

עבור $N=3k$ מתקבל: $3n=9k^2-2$. השוויון בלתי-אפשרי, מאחר שאגף שמאל מתחלק ב-3, ובאגף ימין מתקבלת שארית 1 בחלוקה ב-3.

עבור $N=3k+1$ מתקבל: $3n=9k^2+6k-1$. השוויון בלתי-אפשרי, משום שבאגף ימין מתקבלת שארית 2 בחלוקה ב-3.

עבור $N=3k+2$ מתקבל: $3n=9k^2+12k+2$. השוויון בלתי-אפשרי, משום שבאגף ימין מתקבלת שארית 2 בחלוקה ב-3.

כלומר, לא קיים שום ערך של k (ולכן שום ערך של N), שעבורו יתקיים השוויון $3n+2=N^2$.

משימה מס' 12

א. **הוכח, שאם *n* הוא מספר טבעי, שאינו מתחלק ב-3, אז המספר $2n^2+1$ מתחלק, בלי שארית, ב-3.**

ב. **הוכח, שאם *n* הוא מספר טבעי, שאינו מתחלק ב-5, אז אחד המספרים n^2-1 או n^2+1 מתחלק, בלי שארית, ב-5 (מקור [2]).**

<u>הוכחה ל-א׳:</u>

מאחר ש-n אינו מתחלק ב-3, ניתן לבטא אותו בשתי הצורות הבאות: $n_1 = 3m+1$ ו- $n_2 = 3m+2$ (m – מספר טבעי או שווה ל-0).

עם הצבת n_1 בביטוי $2n^2+1$ מקבלים: $2n^2+1 = 2(3m+1)^2+1 = 3(6m^2+4m+1)$.

קיים גורם 3, ועל-כן הביטוי מתחלק ב-3.

עם הצבת n_2 מקבלים: $2(3m+2)^2+1 = 3(6m^2+8m+3)$, וגם כאן הביטוי מתחלק ב-3.

<u>הוכחה ל-ב׳:</u>

מאחר ש-n אינו מתחלק ב-5, ניתן לבטא אותו בארבע הצורות הבאות:

$$n_1 = 5m+1$$
$$n_2 = 5m+2$$
$$n_3 = 5m+3$$
$$n_4 = 5m+4$$

מציבים ערכים אלו בביטויים n^2+1 ו- n^2-1

<u>עבור $n_1=5m+1$</u> $(5m+1)^2+1 = 25m^2+10m+2$ – אינו מתחלק ב-5.

$(5m+1)^2-1 = 25m^2+10m$ – מתחלק ב-5.

<u>עבור $n_2=5m+2$</u> $(5m+2)^2+1 = 25m^2+20m+5$ – מתחלק ב-5.

$(5m+2)^2-1 = 25m^2+20m+3$ – אינו מתחלק ב-5.

<u>עבור $n_3=5m+3$</u> $(5m+3)^2+1 = 25m^2+30m+10$ – מתחלק ב-5.

$(5m+3)^2-1 = 25m^2+30m+8$ – אינו מתחלק ב-5.

עבור $\underline{n_4=5m+4}$ $\quad (5m+4)^2+1=25m^2+40m+17$ – אינו מתחלק ב-5.

$(5m+4)^2-1=25m^2+40m+15$ – מתחלק ב-5.

משימה מס' 13

הוכח, שעבור כל n טבעי גדול מ-2 ספרת העשרות של המספר 3^n היא זוגית.

הקדמה

ערכי המספרים הראשונים של 3^n הם:

$3^0=\underline{1},\ 3^1=\underline{3},\ 3^2=\underline{9},\ 3^3=2\underline{7},\ 3^4=8\underline{1},\ 3^5=24\underline{3},\ 3^6=72\underline{9},\ 3^7=218\underline{7}$

רואים, שמתקבלת מחזוריות בעלת מחזור של 4 בספרת האחדות:

$1,3,9,7,1,3,9,7,\dots$

יהא k מספר טבעי.

עבור $n=4k$ ספרת האחדות של 3^n היא 1.

עבור $n=4k+1$ ספרת האחדות של 3^n היא 3.

עבור $n=4k+2$ ספרת האחדות של 3^n היא 9.

עבור $n=4k+3$ ספרת האחדות של 3^n היא 7.

עבור כל אחת מהאפשרויות הנ"ל יש להוכיח, שהביטויים:

$\frac{3^{4k}-1}{10},\frac{3^{4k+1}-3}{10},\frac{3^{4k+2}-9}{10},\frac{3^{4k+3}-7}{10}$ מתחלקים ב-2 (זוגיים). למשל, עבור $3^9=19,683$ יש להוכיח, ש- $\frac{19,683-3}{10}$ זוגי.

הוכחה:

א. צ"ל $\frac{3^{4k}-1}{10}$ מתחלק ב-2.

$$\frac{3^{4k}-1}{10}=\frac{(3^{2k}+1)(3^{2k}-1)}{10}=\frac{(3^{2k}+1^{2k})(3^{2k}-1^{2k})}{10}=\frac{(9^{k}+1^{k})(9^{k}-1^{k})}{10}$$

אם k אי-זוגי, הביטוי הראשון מתחלק ב-10 לפי כלל החלוקה, והביטוי השני הוא זוגי (מתחלק ב-2). אם k זוגי, הביטוי השני מתחלק ב-10, לפי כלל החלוקה, והביטוי הראשון הוא זוגי (סכום של שני מספרים אי-זוגיים).

ב. צ"ל $\frac{3^{4k+1}-3}{10}$ מתחלק ב-2.

$$\frac{3^{4k+1}-3}{10}=3\frac{3^{4k}-1}{10}$$

וההסבר – כבסעיף א'.

ג. צ"ל $\frac{3^{4k+2}-9}{10}$ מתחלק ב-2.

$$\frac{3^{4k+2}-9}{10}=9\frac{3^{4k}-1}{10}$$

וההסבר – כבסעיף א'.

ד. צ"ל $\frac{3^{4k+3}-7}{10}$ מתחלק ב-2.

$$\frac{3^{4k+3}-7}{10}=\frac{27\cdot 3^{4k}-7}{10}=\frac{20\cdot 3^{4k}+7\cdot 3^{4k}-7}{10}=2\cdot 3^{4k}+\frac{7(3^{4k}-1)}{10}$$

הביטוי הראשון הוא זוגי, לפי שיש גורם 2.

הביטוי השני הוא זוגי, לפי ההסבר שבסעיף א'.

מובן, שניתן להוכיח את סעיפי א'-ד' גם על-ידי אינדוקציה.

משימה מס' 14

הוכח, שבכל ריבוע של מספר אי-זוגי הגדול מ-3 ספרת העשרות היא זוגית.

<u>הוכחה:</u>

מסמנים בצורה סמלית את המספר האי-זוגי כדלקמן:

k	An

כאשר k ספרת האחדות, המקבלת את הערכים: $1,3,5,7,9$. An – הערך המספרי של שאר הספרות לאחר השמטת ספרת האחדות, $n-1$ הוא מספר הספרות, המרכיבות את An.

לדוגמה: $\boxed{248{,}53|7}$ – במספר $k=7$, $An=24{,}853$ ו-$n=5$.

ערך המספר האי-זוגי: $N=10An+k$

ערך המספר בריבוע:

$$N^2=(10An+k)^2=100An^2+20k\cdot An+k^2=$$
$$=20An(5An+k)+k^2=20a+k^2$$

כאשר $a=An(5An+k)$

בביטוי $20a$ ספרת העשרות היא תמיד זוגית, וזאת – בשל הכפל ב-20 בלי להתחשב בעובדה, ש- a זוגי או אי-זוגי.

התוספת של k^2 מקבלת את הערכים הבאים בלבד: $1,9,25,49,81$.

התוספות של 1 או 9 אינן משנות את הספרה הזוגית העשרונית של $20a$.

התוספת של 25 או 49 או 81 מוסיפות ספרה זוגית (2 או 4 או 8) לספרה הזוגית העשרונית של $20a$, ובכך היא מותירה אותה זוגית.

מ.ש.ל.

משימה מס' 15

הוכח, שמספר, המורכב מספרת אחדות 9, שבהמשכה *n-1* ספרות של 8 ובהמשכן *n* ספרות של 4, הוא ריבוע של מספר שלם.

צורת המספר על-פי הנתון: $\underbrace{444\ldots4}_{n\text{-}}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9$

n- פעמים *n-1* פעמים

ערך המספר בהתאם למיקום ספרותיו הוא

$$9+8(10^1+10^2+.....+10^{n-1})+4(10^n+10^{n+1}....+10^{2n-1})$$

הביטויים בסוגריים הם סכומים של סדרות הנדסיות בעלות מנה *q=10*. על-ידי שימוש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית – מקבלים:

$$9+\frac{80(10^{n-1}-1)}{9}+\frac{4\cdot10^n(10^n-1)}{9}=\frac{4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1}{9}=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2$$

הסכום שהתקבל הוא ריבוע של מספר. האם המספר שבסוגריים הוא שלם? התשובה – כן. סכום הספרות של המספר המופיע במונה הוא 3, ועל-כן המונה מתחלק במכנה ומתקבל מספר שלם.

מ.ש.ל.

משימה מס' 16

הוכח, שההפרש בין מספר, המורכב מ-*2n* ספרות של 1 למספר המורכב מ-*n* ספרות של 2, הוא ריבוע של מספר שלם.

צ"ל: $\underbrace{1111....111}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}=N^2$

2n- פעמים *n -* פעמים

כאשר N – מספר שלם.

הוכחה דרך א':

בעזרת נוסחת הסכום של סדרה הנדסית – נחשב את הערך המספרי של כל אחד מהמספרים שבאגף שמאל:

$$\underbrace{1111\ldots111}_{2n\text{ פעמים}} = 1(10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{2n-1}) = \frac{1(10^{2n}-1)}{9}$$

$$\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ פעמים}} = 2(10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{n-1}) = \frac{2(10^n-1)}{9}$$

הפרש המספרים,

$$\frac{(10^{2n}-1)-2(10^n-1)}{9} = \frac{10^{2n}-2\cdot 10^n+1}{9} = \frac{(10^n-1)^2}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2$$

הביטוי שבמונה הוא מספר, המורכב רק מהספרות *9*, כגון: *99,999*. מספרים אלו מתחלקים ב-3 (משום שסכום ספרותיהם מתחלק ב-3), ולכן האגף השמאלי הוא ריבוע של מספר שלם.

מ.ש.ל.

הוכחה דרך ב'

רושמים את המספרים שבאגף השמאלי בצורה הבאה:

$$\underbrace{1111\ldots111}_{2n\text{ פעמים}} = \underbrace{1111\ldots11}_{n\text{ פעמים}}\cdot 10^n + \underbrace{1111\ldots11}_{n\text{ פעמים}}$$

$$\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ פעמים}} = 2\cdot\underbrace{1111\ldots11}_{n\text{ פעמים}}$$

הפרש המספרים:

$$111....11\cdot10^n+111....11-2\cdot(111....11)=$$
$$111....11\cdot10^n-111....11=111....11(10^n-1)=\underbrace{111....11}_{n\text{ - פעמים}}\cdot9\cdot\underbrace{111....11}_{n\text{ - פעמים}}=$$
$$=(111....11)^2\cdot3^2=(333...33)^2$$

מ.ש.ל.

משימה מס' 17

הוכח, שהמספר $3333^{4444}+4444^{3333}$ מתחלק ב-7.

<u>פתרון</u>

היות ומדובר במספר ענק, דרך ההוכחה תסתמך על חוקי חזקות ועל כללי-חלוקה.

$$3333^{4444}+4444^{3333}=3^{4444}\cdot1111^{4444}+4^{3333}\cdot1111^{3333}=$$
$$=(3^4)^{1111}\cdot(1111^{1111})^4+(4^3)^{1111}\cdot(1111^{1111})^3=$$
$$=1111^{3333}(81^{1111}\cdot1111^{1111}+64^{1111})=$$
$$=1111^{3333}[(81\cdot1111)^{1111}+64^{1111}]=$$
$$=1111^{3333}(89{,}991^{1111}+64^{1111})$$

הגורם 1111^{3333} אינו מתחלק ב-7, משום ש-1111 אינו מתחלק ב-7.

הגורם השני $89{,}991^{1111}+64^{1111}$ מתחלק ב-$90{,}055$ $(89{,}991+64)$ לפי הכלל ש-a^n+b^n מתחלק ב-$a+b$ עבור n אי-זוגי. היות והמספר $90{,}055$ הוא מכפלה של $12{,}865\cdot7$, לכן המספר מתחלק ב-7.

מ.ש.ל.

הערה: פתרון נוסף למשימה מופיע במקור [6].

משימה מס' 18

מצא את ערכי n טבעי, שעבורם חלוקת הסכום $1+2+3,...+n$ ב-5 נותנת שארית 1.

נסמן ב-S_n את הסכום, ולפי נוסחת הסכום לסדרה חשבונית: $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$.

לפי הדרישה במשימה, $\frac{S_n}{5} = M + \frac{1}{5}$, כאשר M כמנה הוא מספר טבעי.

$$S_n = 5M + 1 \Rightarrow \frac{(1+n)n}{2} = 5M + 1 \Rightarrow (1+n)n = 10M + 2$$

מקבלים משוואה ריבועית:

$$n^2 + n - 2(5M+1) = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{40M+9}}{2}$$

מחפשים M מתאים, באופן ש-$40M+9$ יהיה ריבוע של מספר שלם אי-זוגי [למה?] (מבין שתי התשובות רק השורש בעל הסימן החיובי נותן תוצאה מתאימה ל-n).

עבור $M=0$ מקבלים: $n=1$

עבור $M=1$ מקבלים: $n=3$

עבור $M=4$ מקבלים: $n=6$

עבור $M=7$ מקבלים: $n=8$

עבור $M=12$ מקבלים: $n=11$

עבור $M=18$ מקבלים: $n=13$

עבור $M=27$ מקבלים: $n=16$

מקבלים אינסוף ערכים ל-n. ערכי n הם סדרה עולה, שהפרשה הוא 2 או 3 לסירוגין.

המשך הערכים של n הם: $,21,23,26,28,31,34,36,...,81$

משימה מס' 19

מצא n ו-m טבעיים, שבעבורם מתקיים השוויון: $2^n - 5\cdot 2^m = 2008$

<u>פתרון</u>

$$2^n - 5\cdot 2^m = 2^m \cdot 2^{n-m} - 5\cdot 2^m = 2^m(2^{n-m} - 5) = 2008 = 2^3 \cdot 251$$

מחלקים ב-2^3 ומקבלים: $2^{m-3}(2^{n-m} - 5) = 251$

באגף ימין יש מספר אי-זוגי. לפיכך גם האגף השמאלי הוא אי-זוגי, והדבר אפשרי רק כאשר $m-3=0$, דהיינו, $m=3$.

נותר: $2^{n-m} - 5 = 251 \Rightarrow 2^{n-3} = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 11$

תשובה סופית: $n=11$ ו-$m=3$

משימה מס' 20

באיזו ספרה מסתיים המספר $37^{39}+17^{77}$, המבוטא ע"י חזקות?

<u>דרך א':</u>

ע"י חוקי חזקות מקבלים,

$$\begin{aligned}
&37^{39} + 17^{77} = 37\cdot 37^{38} + 17^{77} = 20\cdot 37^{38} + 17\cdot 37^{38} + 17^{77} = \\
&20\cdot 37^{38} + 17(37^{38} + 17^{76}) = 20\cdot 37^{38} + 17\left((37^2)^{19} + (17^4)^{19}\right) = \\
&20\cdot 37^{38} + 17(1{,}369^{19} + 83{,}521^{19})
\end{aligned}$$

לפי הכלל, ש-(a^n+b^n) מתחלק ב-$(a+b)$ עבור n אי-זוגי, הרי המספר בסוגריים מתחלק ב- $1{,}369+183{,}521=184{,}890$, כלומר, המספר בסוגריים מתחלק ב-10, וכמותו – גם המספר הראשון ($20\cdot 37^{38}$) מתחלק ב-10, ולכן המספר מסתיים ב-0.

<u>דרך ב'</u>

ספרת האחדות של מספר המסתיים ב-7, כשמעלים אותו בחזקת מספר טבעי n, מקבלת את הערכים: $1,7,9,3,1,7,9,3,...$ במחזור של 4, לפי הכלל: 7^{4n} – מסתיים – ב-1, 7^{4n+1} – מסתיים ב-7, 7^{4n+2} – מסתיים ב-9, 7^{4n+3} מסתיים ב-3.

לפי הכללים הנ"ל: $37^{39}=37^{4\cdot 9+3}$ מסתיים ב-3.

$17^{77}=17^{4\cdot 19+1}$ מסתיים ב-7.

לכן הסכום של שני המספרים יסתיים ב-0.

משימה מס' 21

מצא את המספר הקטן ביותר, שספרת האחדות שלו היא 6, ועם העברתה לראש המספר – מתקבל מספר חדש, הגדול פי 4 מהמספר המקורי.

<u>פתרון</u>

מסמנים את המספר המבוקש בצורה הסמלית הבאה:

An	6

A_n – הוא ערך של המספר לאחר מחיקת ספרת האחדות 6.

n – מספר הספרות, שממנו מורכב A_n.

לדוגמה:

במספר

2,453	6

, $A_n=2,453$ ו-$n=4$.

לפי הסימון, ערך המספר המקורי הוא $10A_n+6$.

ערך המספר החדש עם העברת הספרה 6 לראש המספר

6	An

הוא $6\cdot 10^n+A_n$

בהתאם לדרישה לקבלת מספר, הגדול פי 4 מהמספר המקורי, מקבלים משוואה:

$$6\cdot 10^n+A_n=4(10A_n+6)\Rightarrow A_n=\frac{2(10^n-4)}{13}$$

מאחר ש-A_n מספר שלם, צריך למצוא n, שעבורו 10^n-4 יתחלק ב-13.

ערכי המספר 10^n-4 הם כדלקמן: ...,96, 996, 9,996, 99,996. לראשונה עבור $n=5$ מקבלים: 10^5-4=99,996, מספר המתחלק ב-13 ונותן A_n=15,384.

לפיכך המספר המבוקש הקטן ביותר הוא 153,846.

מ.ש.ל.

המספר הבא, העונה על הדרישה, מתקבל עבור $n=11$, והוא 153,846,153,846.

האם יש דמיון בין המספר הראשון לשני?

משימה מס' 22

הוכח, כי עבור כל n טבעי – ספרת היחידות של הביטוי n^5, היא כספרת היחידות של n.

<u>הוכחה</u>

נניח, שספרת היחידות של המספר n היא m.

ההוכחה מתבססת על כך שהפחתת המספר m מ-n^5 נותנת ביטוי המסתיים באפס,

כלומר צריך להוכיח, ש-n^5-m מתחלק ב-10.

רושמים את המספר n בצורה של $k+m$, כאשר k הוא החלק הגדול של המספר ומסתיים ב-0.

למשל, במספר 3,548 , $m=8$ ו- $k=3,540$.

$$n^5\text{-}m=(k+m)^5\text{-}m=k^5+5k^4\cdot m+10k^3m^2+10k^2\cdot m^3+5k\cdot m^4+m^5\text{-}m=$$

$$=k(k^4+5k^3m+10k^2m^2+10km^3+5m^4)+m^5\text{-}m$$

הביטוי בעל הסוגריים מתחלק ב-10 בשל הגורם k.

הביטוי הנוסף m^5-m מתחלק ב-10 עבור כל m, כאשר $m=0,1,2,\ldots,9$.

עובדה זו אפשר להוכיח במספר דרכים:

א. ע"י הצבת כל ערכי m אפשריים.

ב. ע"י פירוק $m^5\text{-}m$ למכפלה: $(m\text{-}1)m(m+1)(m^2+1)$, המורכבת ממכפלה של שלושה מספרים עוקבים, ומהביטוי m^2+1, ויש בה גורם 2 וגם גורם 5 (למה?).

ג. בעזרת אינדוקציה מתמטית, המוכיחה את נכונות הטענה עבור כל m טבעי.

מ.ש.ל.

משימה מס' 23

הוכח, שהביטוי $P(n)=2^{4^n}-5$ מסתיים בספרה 1 עבור כל n טבעי.

הוכחה

הוכחת הטענה שקולה להוכחה, ש-$P(n)-1$ מתחלק ב-10 (מסתיים בספרה 0).

נסמן: $k(n)=P(n)-1$, ונוכיח, ש-$k(n)$ מתחלק ב-10.

נרשום: $k(n)=2^{4^n}-6$, ונוכיח, שערכו המספרי מסתיים בספרה 0.

ספרת האחדות של הביטוי 2^n (n – מספר טבעי) היא אחת מהספרות: $2,4,6,8$. ספרת האחדות של הביטוי 2^{4m} (m – מספר טבעי) היא תמיד 6 (למה?).

את הביטוי 2^{4^n} ניתן לרשום כ-2^{4m}, כאשר m – מספר טבעי בעל ערכים מסוימים ($1,4,16,64,\dots$).

כפי שצוין, הערך של הביטוי 2^{4m} מסתיים בספרת אחדות שערכה 6. לכן כשמפחיתים ממנו 6, מקבלים מספר המסתיים ב-0.

מ.ש.ל.

משימה דומה (ללא הוכחה)

הוכח, כי הביטוי $\mathrm{P}(n)=2^{2^n}+1$ מסתיים בספרה 7, עבור כל n טבעי, כאשר $n\geq 2$.

משימה מס׳ 24:

מצא, את כל המספרים השלמים, שעבורם ערך הביטוי $\sqrt{x^2+x+1}$ יהיה מספר רציוני.

<u>פתרון</u>

המספר הרציונלי יסומן ב- $\frac{p}{q}$, כאשר p ו-q הם מספרים שלמים, כלומר, $\sqrt{x^2+x+1}=\frac{p}{q}$.

ע״י העלאה בריבוע – מקבלים: $x^2+x+1=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow x^2+x=\frac{p^2}{q^2}-1$

לפי שערך האגף השמאלי הוא שלם, לכן, $\frac{p^2}{q^2}=a^2$ כאשר a מספר שלם.

מכאן,

$$x^2+x=x(x+1)=a^2-1=(a+1)(a-1)$$

באגף שמאל ישנה מכפלה של שני מספרים עוקבים, וכידוע, מכפלה כזו יכולה להסתיים רק בספרות: *0,2,6*.

באגף הימין הביטוי a^2-1 יכול להסתיים רק בספרות: *0,3,4,5,8,9*.

מעובדה זו נובע, ששוויון בין האגפים יווצר רק בתנאי במקרה שהמספרים בכל אגף יסתיימו ב-0.

בנוסף לכך, ההפרש בין גורמי המכפלה באגף ימין הוא 2, ובאגף שמאל הוא 1. לכן שוויון בין האגפים יתקבל רק כאשר המכפלה תהיה שווה ל-0,

כלומר, $x(x+1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-1$.

משימה מס׳ 25

הוכח, שסכום הריבועים של שני המספרים אי-זוגיים אינו יכול להיות שווה לריבוע של מספר שלם.

מסמנים את שני המספרים האי-זוגיים ב-$2m+1$ ו-$2n+1$ (m ו-n מספרים טבעיים).

צ"ל ש- $(2m+1)^2+(2n+1)^2 \neq N^2$, כאשר N מספר שלם.

<u>הוכחה</u>

נניח, שאכן $(2m+1)^2+(2n+1)^2 = N^2$, ונוכיח, שהדבר בלתי-אפשרי לפי ההנחה, ש-N^2 זוגי (וכך גם N).

מאחר ש-N חייב להיות מספר זוגי, נסמנו ב-$2p$ (p – מספר טבעי)

מכאן, $(2m+1)^2+(2n+1)^2=(2p)^2$

או $2=4[p^2-(m^2+n^2)-(m+n)]$

הביטוי בסוגריים המרובעים הוא מספר שלם, והכפלתו ב-4 תמיד תיתן מספר שונה מהמספר 2, הנמצא באגף השמאלי, ולכן הדבר בלתי אפשרי.

מ.ש.ל.

הערה: אם ההנחה לעיל הייתה נכונה, המשמעות היא, שניתן לקבל שלישייה פיתגורית, ששני המספרים הקטנים שלה הם אי-זוגיים, והמספר הגדול הוא זוגי, דבר שאינו קיים.

משימה מס' 26

הוכח, שלמשוואה: y^2-$5x^2$=6 אין פתרונות של מספרים שלמים.

<u>הוכחה:</u>

$y^2-5x^2=6$

היות והאגף הימני הוא זוגי, הדבר מחייב, ש-x ו-y שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים.

אם x ו-y זוגיים, נסמנם באופן הבא:

$x=2m$, $y=2n$ (n, m הם מספרים שלמים).

מציבים ערכים אלו במשוואה ומקבלים: $4n^2-20m^2=6 \Rightarrow 4(n^2-5m\ \ )=6$

האגף השמאלי מתחלק ב-4, ואילו האגף הימני אינו מתחלק ב-4, ולכן אין מספרים שלמים, המהווים פתרון למשוואה.

אם x ו-y אי-זוגיים, נסמנם באופן הבא: $x=2m+1,\ y=2n+1$ (m ו-n מספרים שלמים). מציבים ערכים אלו במשוואה ומקבלים: $4n^2+4n-20m^2-20m=10$. גם כאן מקבלים, שהאגף השמאלי מתחלק ב-4, ואילו האגף הימני אינו מתחלק ב-4, וכנ"ל אין מספרים שלמים המהווים פתרון למשוואה.

מסקנה: אין למשוואה פתרונות של מספרים שלמים.

משימה מס' 27

אם a ו-b מספרים טבעיים, המקיימים $a+b=10$, ערכו המספרי של הביטוי $a^2+3ab+b^2$ יהיה ריבוע של מספר שלם רק כאשר המספרים האלה הם 3 ו-7.

<u>הוכחה:</u>

מסמנים את המספר השלם ב-N, כלומר, $a^2+3ab+b^2=N^2$

$$a^2+2ab+b^2+ab=N^2 \Rightarrow (a+b)^2+ab=N^2$$

על-ידי שימוש בנתון $a+b=10$, מקבלים: $ab=N^2-100$

a, b הם מספרים טבעיים שסכומם 10, ולכן, $9 \le ab \le 25$,

כלומר, $9 \le N^2-100 \le 25 \Rightarrow 109 \le N^2 \le 125$

המספר השלם היחידי, המקיים את אי-השוויון, הוא $N=11$. מכאן, $ab=21$. לכן הערכים היחידים המתאימים ל-a ול-b הם 3 ו-7.

מ.ש.ל.

משימה (ללא הוכחה)

הוכח שהמספר הפילינדרומי $\overline{ab(a+b)ba}$ מתחלק ב-37 עבור כל a ו-b $(0<a+b<10)$

סיכום

המשימות שהוצגו אפיינו מספרים שלמים בלבד. לקבלת הפתרונות נעשה שימוש בכללי חלוקה, בתכונות המספרים, בפעולות עם חזקות ובשימוש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית. ראוי לציין, שאף-על-פי שלמרבית המשימות דרך הפתרון המקובלת היא שימוש באינדוקציה, הרי מטרת המאמר היא להבליט את אפשרות השימוש בדרכים חלופיות.

מראי מקומות

1. אבירי, ח' (1986). **אלגברה רחבה,** פרקים: 7, 10 ו-15. תל-אביב, מישלב.
2. אבירי, ח' (1983). **אלגברה תיכונית,** פרקים: 4 ו-6. תל-אביב, מישלב.
3. גורן, ב' (1989). **אלגברה 4 ו-5 י"ל,** פרקים: 9 ו-11, תל-אביב, הוצאת המחבר.
4. אספיס, א' (2000). **אלגברה סטטיסטיקה והסתברות (4 י"ל),** פרקים 7 ו-8, הוצאת המחבר.
5. **אלף אפס – שעשועי מתמטיקה,** ירושלים, מכללה ירושלים
6. כהן, כ' (2001). **אוסף החידות הגדול, סדרת סגול.** חיפה, רקפת.
7. בירנבוים, ע' (1997). **מספר חזק, חידות ואתגרי חשיבה.** תל-אביב, תמר.