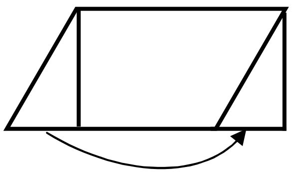
טרנספורמציה הדדית של צורות שוות שטח

מבוא

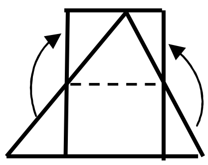


ציור
מס' 1

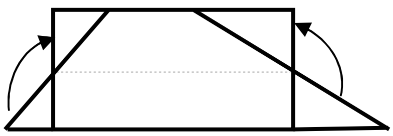
הרעיון של חלוקת צורה לחלקים והרכבת צורה אחרת מהם – מוכר לתלמידים כבר מביה"ס היסודי. די להזכיר את הדוגמה של ההסבר למציאת שטח של מקבילית על-סמך הנוסחה הידועה לשטח מלבן

(ציור מס' 1).

באופן דומה ניתן להסביר מציאת שטח של משולש (ציור מס' 2) או טרפז (ציור מס' 3).



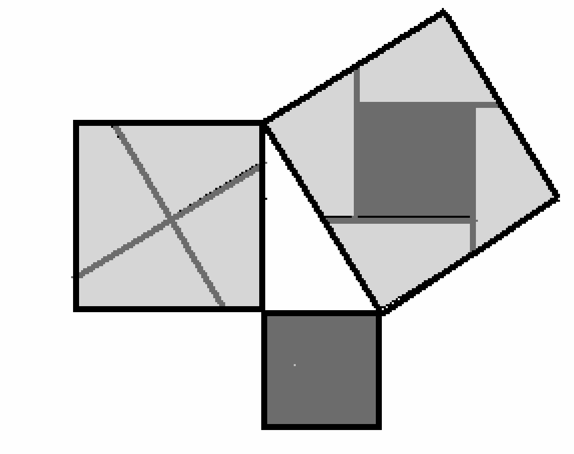
ציור מס' 2



ציור מס' 3

תארנים: *גזירה והרכבת צורות (משולש, מלבן, מצולע). צורות שוות שטח ושוות-הרכבה. משפט בולאי-גרווין.*

דוגמה יותר מתוחכמת היא הוכחת משפט פיתגורס (ציור מס' 4).



ציור מס' 4

ברור, שרעיון חלוקת צורות והרכבתן קשור ישירות לבעיית השוואת שטחי צורות. בהמשך ידובר על צורות, שהן מצולעים בלבד.

אם ניתן לחלק את צורה A למספר סופי של חלקים ולהרכיב מהם צורה B, אז הצורות A ו-B תיקראנה שוות-הרכבה. נסמן את העובדה, שצורות A ו-B הן שוות-הרכבה ב-$A\equiv B$.

ברור, שאם צורות A ו-B חופפות, אז $A\equiv B$.

קל להוכיח גם את התכונה הבאה, החשובה, של צורות שוות-הרכבה: אם $A\equiv B$, $B\equiv C$, אז $A\equiv C$ (טרנסיטיביות). אכן, ניתן לחלק את הצורות A ו-B למספר סופי של חלקים $A_1, A_2,\dots, A_n$ ו-$B_1, B_2,\dots, B_n$, באופן ש-$A_1=B_1, A_2=B_2,\dots, A_n=B_n$.

כמו-כן, ניתן לחלק את הצורות B ו-C למספר סופי של חלקים $B'_1, B'_2,\dots, B'_n$ ו- $C_1, C_2,\dots, C_n$, באופן ש... $B'_1=C_1, B'_2=C_2,\dots, B'_n=C_n$.

עם זאת, חיתוך הצורות $B_1, B_2,\dots, B_n$ עם הצורות $B'_1, B'_2,\dots, B'_n$ יוצר מערכת חדשה של צורות, המרכיבות את הצורה B, כאשר חלק מהן מרכיבות B_1, חלק מרכיבות B'_1, חלק מרכיבות B_2, חלק מרכיבות B'_2 וכו', כלומר כל אחת מהצורות B_i $(1\le i\le n)$ ו-B'_i מורכבת מחלק מהצורות החדשות הללו. במקרים אלה, מכל הצורות החדשות הללו מורכבות הצורות A ו-C, כלומר $A\equiv C$.

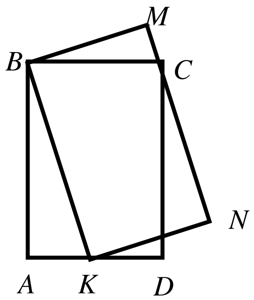
ברור, שאם $A\equiv B$, אז הן צורות בעלות שטח זהה, כלומר שוויון השטחים הוא תנאי הכרחי לשוויון הרכבה.

טבעי לשאול, מהו התנאי המספיק לכך.

מתברר, ששוויון שטחי המצולעים הוא גם תנאי מספיק לשוויון ההרכבה ביניהם. תוצאה זו ידועה כמשפט בולאי-גרווין (*Bolyai-Gerwien*): אם שטחים של שני מצולעים שווים זה לזה, אז המצולעים הללו שווי-הרכבה.

(בולאי, מתמטיקאי הונגרי מפורסם, הוכיח את המשפט ב-1832, ובלי קשר לזה, קצין גרמני חובב מתמטיקה, גרווין, הוכיח אותו ב-1833)

הוכחת המשפט, לאחר הכנה מתאימה, יכולה להיות מובנת לתלמידי חטיבות הביניים, ולשמש נושא מעניין לשיעורי העשרה, אשר בהם מביאים רקע תאורטי לשיטות גזירה והרכבה של צורות, שתלמידים מכירים כבר מביה"ס היסודי.



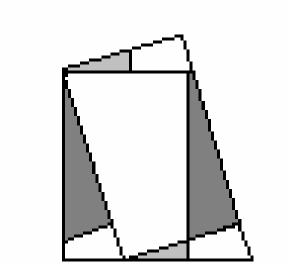
ציור מס' 5

הוכחת המשפט יכולה להבנות ב-3 שלבים: הוכחה למלבנים, למשולשים ולמצולעים כלליים, ומבחינה דידקטית יעיל מאוד לדון בה עם תלמידים דווקא בשלבים אלו.

נביא את שלבי ההוכחה.

1. הוכחת המשפט למלבנים.

נסמן את צלעותיהם של המלבנים $ABCD$ ו-$A'B'C'D'$ ב-a,b ו- c,d בהתאמה ($AB=a$). נניח ש-$c\geq a\geq b$. אם $c=a$, אז המלבנים חופפים, וטענת המשפט הוכחה.

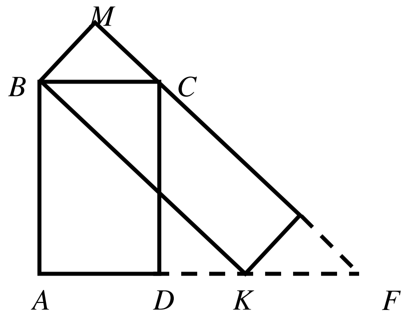

ציור מס' 6

אם $c>a$, נתבונן בנקודה K, הנמצאת על הצלע AD או על המשכה באופן ש- $BK=c$.

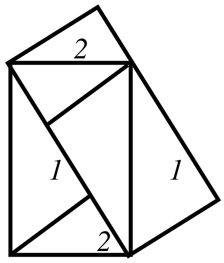
1.1. אם $c<BD$, אז הנקודה K נמצאת על הקטע AD. נתבונן במלבן $BKNM$ בעל צלע MN, העוברת דרך קדקוד C (ציור מס' 5). ניתן להוכיח בקלות, ש- $ABCD\equiv BKNM$ (ציור מס' 6).

לכן $S_{ABCD}=S_{BKNM}$, ומפני ש- $BK=c$, המלבנים $BKNM$ ו- $A'B'C'D'$ חופפים ו- $ABCD\equiv A'B'C'D'$.

1.2. אם $c=BD$, ההוכחה טריביאלית (ציור מס' 7).

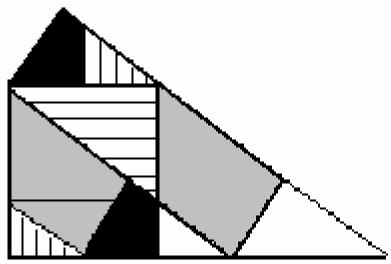


ציור מס' 8



ציור מס' 7

1.3. אם $c>BD$, המקרה מורכב יותר. הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AD (ציור מס׳ 8).



ציור מס' 9

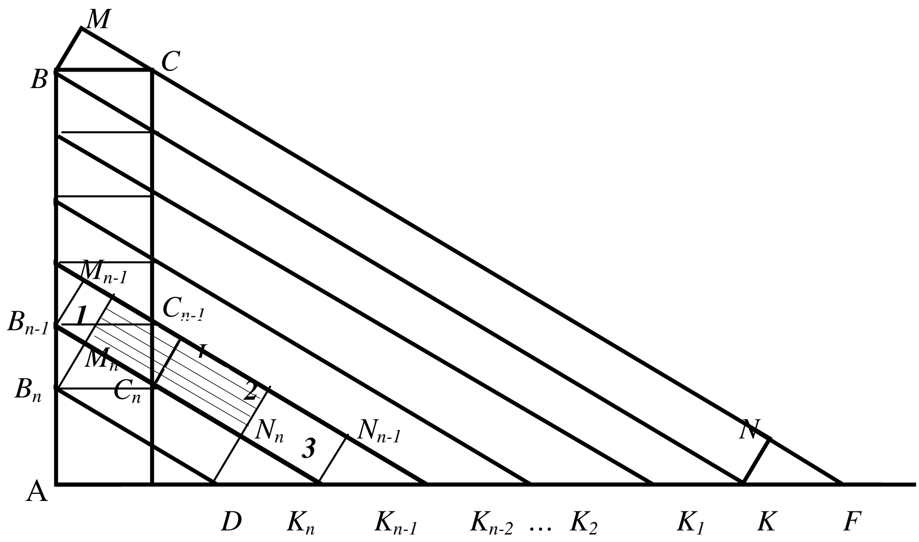
כאן צריך להבדיל בין שני תת-מקרים :

תת-מקרה א׳ : $DK < KF$. החלוקה המתאימה מובאת בציור מס׳ 9.

תת-מקרה ב׳ : $DK \geq KF$. נעביר ישרים מקבילים ל-BK דרך נקודות $K_1, K_2,\dots, K_n$. $K_1K_2=K_2K_3=\dots=K_{n-1}K_n=KF$, $DK_n < KF$ או נקודות K_n ו-D מתלכדות (ציור מס׳ 10). אז לפי המוכח לעיל $AB_nC_nD\equiv B_nM_nN_nK_n$. המלבן $B_{n-1}M_{n-1}N_{n-1}K_{n-1}$ מורכב מ-3 מלבנים : מלבן מס׳ 1, מלבן מס׳ 2, מלבן מס׳ 3, כאשר מלבן מס׳ 2 (מקווקו) והמלבן $B_nM_nN_nK_n$ חופפים, והמלבנים מס׳ 1 ומס׳ 3 יחד מרכיבים את המלבן $B_{n-1}M_{n-1}LC_n$. $B_{n-1}M_{n-1}LC_n\equiv B_nB_{n-1}C_{n-1}C$.

לכן, $B_{n-1}M_{n-1}N_{n-1}K_{n-1}\equiv AB_{n-1}C_{n-1}D$.

באופן דומה נקבל, ש-$AB_iC_iD\equiv B_iM_iN_iK_i$ (לכל $1\leq i\leq n$). מכאן נגיע ל-$ABCD\equiv BMNK$.



ציור מס' 10

זוהי, אם כן, הוכחת המשפט למקרה של מלבנים שווי שטח.

2. הוכחת המשפט למשולשים.

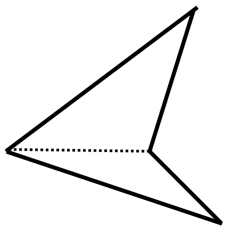
נתבונן במקרה של שני משולשים שווי שטח. נסמנם ב-ABC ו-$A'B'C'$.

נניח, שהצלע AC היא הצלע הגדולה במשולש ABC. אז קל לחלק את המשולש לשלושה חלקים ולהרכיב מהם מלבן בעל צלע AC (החלוקה כבר מובאת קודם בציור מס' 2). באופן דומה ניתן לחלק את המשולש $A'B'C'$ ולהרכיב מלבן מהחלקים. שני המלבנים המתקבלים מכך הם מלבנים שווי שטח, ולכן, כפי שכבר הוכח, הם גם שווי-הרכבה.

3. הוכחת המשפט למצולעים כלליים.

נעבור למקרה כללי:

נתבונן בשני מצולעים: M_1, M_2, (לאו דווקא קמורים) שווי שטח.



ציור מס' 11

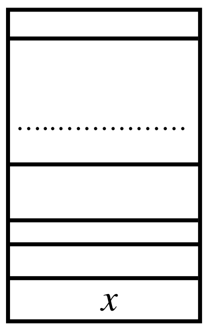
נוכיח קודם-כל, שכל מצולע ניתן לחלק למספר סופי של משולשים.
למצולע קמור – הטענה טריביאלית: די להעביר את כל האלכסונים מאחד הקדקודים.

למצולע קעור נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקדקודים n.

בשביל $n=4$ הטענה טריביאלית (ציור מס' 11).

נניח, ש-$n>4$. נתבונן ב-3 קדקודים עוקבים כלשהם: A,B,C של המצולע, היוצרים זווית ABC קטנה מ-$180°$. אם בתוך המשולש ABC אין קדקודים אחרים של המצולע, אז האלכסון AC מחלק את המצולע למשולש ABC ולמצולע בעל $n-1$ קדקודים, אשר לפי הנחת האינדוקציה ניתן לחלק למשולשים.

אם בתוך המשולש ABC נמצאים קדקודים אחרים של המצולע, נחבר את כל הקדקודים הללו עם הנקודה B על-ידי קטעים. נסמן ב-P את הקדקוד מתוך הקדקודים האלה, אשר יוצר זווית PCB קטנה ביותר. נסמן את נקודת החיתוך של הישרים PC ו-AB ב-D. אז בתוך המשולש DBC אין קדקודים אחרים של המצולע, והאלכסון PB מחלק את המצולע לשני מצולעים בעלי מספר קדקודים קטן מ-n, אשר לפי הנחת האינדוקציה ניתנים לחלוקה למספר סופי של משולשים.



ציור מס' 12

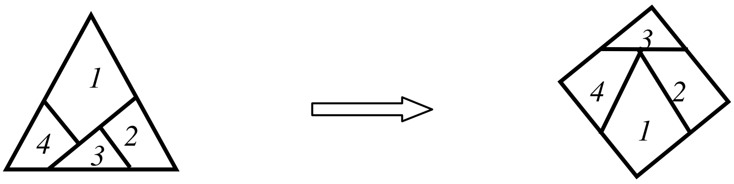
ובכן, כל מצולע ניתן לחלק למספר סופי של משולשים: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. את המשולש Δ_1 ניתן לחלק ל-3 חלקים ולהרכיב מהם מלבן. נסמן אחת מצלעותיו ב-x. ניתן לחלק גם כן כל משולש אחר Δ_i ($1 \le i \le n$) ל-3 חלקים ולהרכיב מהם מלבן. כל אחד מהמלבנים הללו הוא שווה-הרכבה למלבן בעל אותו שטח וצלע x. לכן, כל אחד מהמשולשים Δ_i הוא שווה-הרכבה למלבן בעל צלע x. מכל המלבנים האלה ניתן להרכיב מלבן אחד בעל צלע x (ציור מס' 12).

לכן, המצולע M_1 שווה-הרכבה למלבן F_1, והמצולע M_2 שווה-הרכבה למלבן F_2, כאשר השטח של F_1 שווה לשטח של F_2. מכאן נובע, שהמלבנים F_1 ו-F_2 שווי-הרכבה, וכמו-כן M_1 ו-M_2 שווי-הרכבה.

מ.ש.ל.

לסיום, נציין, שההוכחה הנ"ל מספקת גם שיטה (אלגוריתם) לחלוקת מצולעים שווי שטח למספר שווה של חלקים זהים, אבל, הלכה למעשה, שיטה זו יכולה להתגלות כמורכבת וקשה למימוש, ובמקרים רבים עדיף להשתמש בשיטות אחרות, כולל השיטות היוריסטיות.

בתור דוגמה מובהקת ניתן להביא את הטרנספורמציה של משולש שווה צלעות לריבוע (ציור מס' 13).



ציור מס' 13

מראי מקומות:

Stewart, I. (1987). **The Problems of Mathematics, 2nd ed**. Oxford, England: Oxford University Press.

Boltjanski, V.G. (1956). **Figures with Equal Areas and Equidecomposable Figures,** Moscow, [Russian]

ארבל, ב' (1990). **אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיות**, האוניברסיטה הפתוחה.