מיכאל גורודצקי

חישוב אינטגרלים באמצעות שיטה אלגברית

״עזרה הדדית״ בין תחומי מתמטיקה שונים היא לעתים קרובות המפתח לפתרונות נפלאים לבעיות שונות. מאמר זה הוא עוד דוגמה כך – דוגמה ל״שיתוף פעולה״ ול״עזרה הדדית״ בין חדו״א לבין אלגברה.

לפולינום $P_n(x)$ ממעלה n ומספרים a, b כלשהם $(a^2+b^2\neq 0)$ ניתן לבצע חישוב אינטגרל $\int e^{ax}P_n(x)\cos bx\,dx$ ע״י שיטת אינטגרציה בחלקים, אך דרך זו ארוכה ומסובכת. זאת, כנראה, הסיבה, שבספר מפורסם של נוסחאות *"Tables of integrals and other mathematical data"* מאת *H.B. Dwight* ישנם רק מקרים פרטיים של אינטגרלים כאלה:

א. נוסחה מפורשת בשביל $\mathrm{P_n}(x)=x^n, b=0$,

ב. נוסחה מפורשת בשביל $\mathrm{P_n}(x)=1$,

ג. נוסחאות מפורשות בשביל $P_n(x)=x^n$, $n=1,\dots,6, a=0, b=1$ ונוסחת נסיגה בשביל n כללי.

לעומת זאת, שיטה אלגברית מאפשרת לקבל בדרך פשוטה יחסית נוסחה מפורשת כללית בשביל האינטגרל הנ״ל. הבסיס להפעלת שיטה אלגברית הוא ניחוש צורת הפתרון: $e^{ax}[Q_n(x)\cos bx+R_n(x)\sin bx]+C$ כאשר C – מספר קבוע כלשהו, $Q_n(x)$, $R_n(x)$ – פולינומים ממעלה n, אשר את מקדמיהם יש למצוא.

לאחר ביצוע הגזירה נקבל:

תארנים: *חישוב אינטגרלים, מערכת משוואות ליניאריות*

$$e^{ax}P_n(x)\,cosbx \;=\; e^{ax}[aQ_n(x) \;+\; Q_n{}'(x) \;+\; bR_n(x)]\;cosbx + $$
$$e^{ax}[-bQ_n(x) \;+\; aR_n(x) \;+\; R_n{}'(x)]\;sinbx$$

נצמצם ב- e^{ax}, ונשווה פולינומים ליד $cosbx$ ו- $sinbx$:

$$\begin{cases} P_n(x) = aQ_n(x) + Q_n'(x) + bR_n(x) \\ 0 = -bQ_n(x) + aR_n(x) + R_n'(x) \end{cases} \qquad (1)$$

נסמן וקטורי מקדמים של פולינומים $P_n(x),\ Q_n(x),\ R_n(x)$ לפי סדר עולה כ- $P,\ Q,\ R$ בהתאמה.

מערכת (1) שקולה למערכת משוואות ליניאריות מסדר $2(n + 1)$:

$$\begin{cases} P = AQ + bR \\ 0 = -bQ + AR \end{cases} \qquad (2)$$

באשר A היא מטריצה משולשת עליונה מסדר $n + 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

כדי לפתור מערכת (2) נכפיל את המשוואה הראשונה של המערכת ב- b, את המשוואה השנייה ב- A משמאל ונחבר אותן :

$bP = (A^2 + b^2I)R,\ I$ – I מטריצת יחידה מסדר $n + 1$. מטריצה $A^2 + b^2I$ היא מטריצה משולשת עליונה, אשר בה מופיע מספר $a^2 + b^2\,(\neq 0)$ על האלכסון הראשי. לכן היא הפיכה, ואין קושי למצוא הפכית שלה $(A^2 + b^2I)^{-1}$ולאחר מכן וקטור R:

$$R = (A^2 + b^2I)^{-1}bP \qquad (3)$$

למציאת וקטור Q נעשה הפוך – נכפיל את המשוואה הראשונה של המערכת ב- A משמאל, את השנייה ב- b ונחסר אותן: $AP = (A^2 + b^2I)Q$ (ניתן גם להציב (3) במשוואה השנייה של (2), אך אז יש להבדיל בין שני מקרים: $b = 0$ ו- $b \neq 0$) $\Leftarrow$

$$(4) \qquad Q = (A^2 + b^2I)^{-1}AP.$$

ע"י הצבה נוודא, שאכן וקטורים אלה מקיימים את המערכת (2). נציין, כי מטריצה A מתחלפת עם מטריצה $A^2 + b^2I$, ולכן היא מתחלפת גם עם ההפכית שלה $(A^2 + b^2I)^{-1}$.

נציב במשוואה הראשונה של מערכת (2):

$$A(A^2 + b^2I)^{-1}AP + b(A^2 + b^2I)^{-1}bP = (A^2 + b^2I)^{-1}A^2P + (A^2 + b^2I)^{-1} b^2P =$$

$$(A^2 + b^2I)^{-1}(A^2 + b^2I)P = IP = P$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת (2):

$$-b(A^2 + b^2I)^{-1}AP + A(A^2 + b^2I)^{-1}bP = -bA(A^2 + b^2I)^{-1}AP + bA(A^2 + b^2I)^{-1}AP = 0$$

נשחזר את הפולינומים $R_n(x), Q_n(x)$ ע"י מקדמיהם (4), (3) ונקבל תשובה:

$$\int e^{ax}P_n(x)\cos bx\,dx = e^{ax}[\, Q_n(x)\cos bx + R_n(x)\sin bx\,] + C$$

דוגמה 1:

חשב אינטגרל $\int e^{2x}(3x+1)\cos x\,dx$

פתרון: $n = 1,\ a = 2,\ b = 1,\ P = \{1,3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + b^2I = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^2 + b^2I)^{-1} = 5^{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow R = 5^{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = 5^{-2}\begin{Bmatrix} -7 \\ 15 \end{Bmatrix} \Rightarrow R_1(x) = 5^{-2}(-7+15x)$$

$$Q= 5^{-2}\begin{pmatrix}5 & -4\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix}= 5^{-2}\begin{pmatrix}5 & -4\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}5\\ 6\end{Bmatrix} = 5^{-2}\begin{Bmatrix}1\\ 30\end{Bmatrix} \Rightarrow Q_1(x) = 5^{-2}(1 + 30x)$$

תשובה : $\int e^{2x}(3x+1)\cos x\,dx = 5^{-2}e^{2x}[(1+30x)\cos x+(-7+15x)\sin x]+C$

דוגמה 2 :

חשב אינטגרל $\int e^x x^2 \cos 2x\,dx$

פתרון : $n = 2,\ a = 1,\ b = 2,\ P = \{0,0,1\}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + b^2I = \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^2 + b^2I)^{-1} = 5^{-3}\begin{pmatrix}25 & -10 & -2\\ 0 & 25 & -20\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix} \Rightarrow R = 5^{-3}\begin{pmatrix}25 & -10 & -2\\ 0 & 25 & -20\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{Bmatrix} = 5^{-3}\begin{Bmatrix}-4\\ -40\\ 50\end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$R_2(x) = 5^{-3}(-4 - 40x + 50x^2)$$

$$Q = 5^{-3}\begin{pmatrix}25 & -10 & -2\\ 0 & 25 & -20\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{Bmatrix}=5^{-3}\begin{pmatrix}25 & -10 & -2\\ 0 & 25 & -20\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 2\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$= 5^{-3}\begin{Bmatrix}-22\\ 30\\ 25\end{Bmatrix} \Rightarrow Q_2(x) = 5^{-3}(-22 + 30x + 25x^2)$$

תשובה:

$$\int e^x x^2 \cos 2x\, dx = 5^{-3} e^x[(-22+30x+25x^2)\cos 2x + (-4-40x+50x^2)\sin 2x] + C$$

באותה שיטה ניתן לקבל נוסחה דומה לאינטגרל $\int e^{ax} P_n(x)\sin bx\, dx$.

במקרה זה: $Q = -(A^2 + b^2 I)^{-1} bP,\ \ R = (A^2 + b^2 I)^{-1} AP$.