משה סטופל ודוד פרייברט

הנדסת-המישור והטריגונומטרייה – בנות אותה משפחה – הילכו שתיהן יחדיו?

תקציר

להבלטת הקשר שבין הנדסת-המישור ובין הטריגונומטרייה, שהם שני ענפי מתמטיקה קרובים ומשיקים זה לזה, הוצגו 8 משימות ברמות-קושי שונות, שמקובל לפתור אותן על-ידי הנדסה אוקלידית.

מצד אחד, פתרון משימות בדרך הנדסית, ובעיקר – את הקשות שבהן, מחייב לעתים קרובות פיתוח יצירתיות, המתבטאת בבניות-עזר, ואף שימוש במשפטים פחות ידועים.

מצד שני, ישנם מקרים רבים, שבהם ניתן להשיג בקלות את הפתרון בדרך טריגונומטרית, שהיא באופייה טכנית.

לכל אחת מהמשימות הוצג פתרון הנדסי אחד, לפחות, ופתרון אחר בדרך טריגונומטרית.

מהתבוננות בפתרונות, שהתקבלו בשתי הדרכים – אנו רואים, שלפעמים הדרך ההנדסית עדיפה – מבחינת הקלות והפשטות – על הדרך הטריגונומטרית, ולפעמים – המצב הפוך, וכמובן, דבר זה מעיד על יופייה של המתמטיקה.

מילות מפתח: *הנדסת-מישור ; טריגונומטרייה ; פתרון משימות בדרכים שונות.*

מבוא

הלימודים של הנדסת-המישור מתחילים בכיתות הגבוהות של בית-הספר היסודי, ולאחר מכן נמשכים בעיקר בכיתות ח׳-י׳ של החינוך העל-יסודי.

כענף חשוב של המתמטיקה – הנדסת-המישור מהווה חלק מסוים מחיי היום-יום שלנו. הנדסת-המישור מהווה תחום, המבוסס על הנחות-יסוד (אקסיומות), על צורות גאומטריות ועל משפטים רבים, היוצרים יחד מארג מובנה. הכרת-משפטים ויכולת-היישום שלהם הם התנאים הבסיסיים לכך שתלמיד יהיה מסוגל להתמודד עם פתרון בעיות בהנדסת-המישור. לימוד ענף הטריגונומטרייה, שהוא בן-משפחה קרוב להנדסת-המישור, מתחיל בחטיבה העליונה – כהמשך רציף ללימוד הנדסת-המישור, והוא מבוסס על ידע קודם שנרכש. תלמיד נחשב כבקי בטריגונומטרייה, אם הוא בעל-ידע בהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות, מכיר את המחזוריות שלהן ואת הקשרים שביניהן, בעל-יכולת יישום של הזהויות הטריגונומטריות, מסוגל לפתור

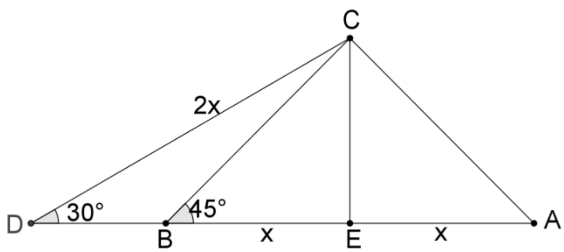
משוואות ואי-שוויונים טריגונומטריים, ולשלב את כולם לפתרון בעיות, הקשורות לצורות הנדסיות. פתרון בעיות בהנדסת-המישור ברמות-קושי מעל לרמה בסיסית – מחייב עומק חשיבה – תוך כדי בדיקה מקבילה של מספר כיווני פתרון אפשריים. אמצעי חשוב, ולפעמים – הכרחי, לצורך ההתמודדות עם משימה קשה בהנדסה הוא בניית-עזר, שמאפשרת להגיע להוכחה או לפתרון. ככל שמתנסים יותר, רוכשים את המיומנות למציאת בניית-עזר נכונה או דרכי-פתרון אחרות, שחלקן לא-שגרתיות. לפעמים קורה, שלא ניתן למצוא פתרון למשימה קשה בדרך של הנדסת-המישור, אך ניתן למצוא אותו בשימוש בטריגונומטרייה, ולעתים – להפך, כלומר, לעתים הפתרון הגאומטרי מתקבל ביתר-קלות מהפתרון הטריגונומטרי, ולפעמים – להפך.

במאמר זה תוצגנה משימות בהנדסה החל – מקַלות, וכלה – בקָשות, ויובאו הפתרונות שלהן בשתי דרכים: א) על-ידי הנדסת-המישור ; ב) על-ידי טריגונומטרייה. ישפוט הקורא, מי מהן קלה יותר, יפה יותר, מקורית יותר. מכל מקום, ברור ששתי הדרכים משלימות זו את זו – כענפים משתלבים בעץ המתמטיקה. ידע, כלים ושליטה בשני התחומים – מאפשרים התמודדות נאותה עם בעיות קשות.

משימה מס' 1

נתון משולש ש"ש וישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90^0)$**. על המשך הצלע AB נתונה נקודה** D **באופן ש-** $\measuredangle DCB = \frac{1}{3}\measuredangle CAD$.

הוכח, כי $CD = AB$.



ציור 1א

<u>הוכחה על-ידי הנדסת-המישור</u>: דרך א'

$\measuredangle CBA = \measuredangle CAB = 45°$ (זוויות-הבסיס במשולש ישר-זווית וש"ש). מכאן,

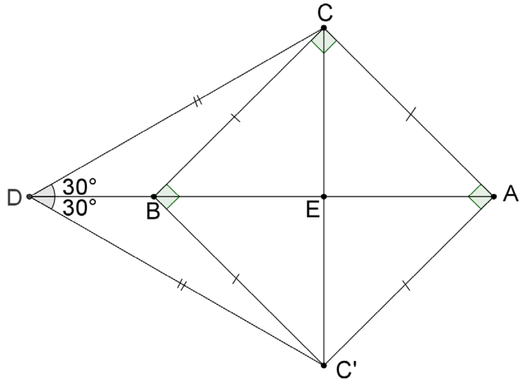
$\measuredangle DCB = \frac{1}{3}\cdot 45° = 15° \;\Rightarrow\; \measuredangle CDB = \measuredangle CBA - \measuredangle DCB = 45° - 15° = 30°$. נוריד גובה CE במשולש ΔCBE, ואז יתקבל משולש ΔDCE ישר-זווית ובעל זוויות חדות $60°$ ו- $30°$. נסמן $CE = x$ ונקבל: $BE = EA = x$ (הגובה לבסיס במשולש ישר-זווית וש"ש). מכאן, $BA = 2x$ וגם $CD = 2x$ (הניצב מול $30°$ שווה למחצית היתר).

מ.ש.ל.

דרך ב'

נבנה את התמונה של ציור 1א, כאשר ציר השיקוף הוא הקו DA (כנראה בציור 1ב). כתוצאה מפעולת השיקוף – נקבל משולש $\Delta DCC'$, שהוא משולש ש״צ (משולש ש״ש, שזווית-הראש שלו $60°$), כלומר, $DC = CC'$. כמו-כן $ACBC'$ הוא ריבוע, ולכן $AB = CC'$ (אלכסונים בריבוע). מכאן, $AB = DC$.

מ. ש. ל.



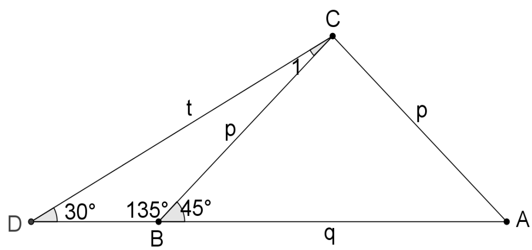
ציור 1ב

<u>הוכחה על-ידי הטריגונומטרייה</u>

נסמן:
$$CD = t$$
$$CA = CB = p$$
$$AB = q$$

שימוש במשפט הסינוסים במשולש ΔDBC,

$$\frac{t}{\sin 135°} = \frac{p}{\sin 30°} \quad \Rightarrow$$
$$t = \frac{p \cdot \sin 135°}{\sin 30°} = \frac{p \cdot \sin 45°}{\sin 30°} = p\sqrt{2}$$



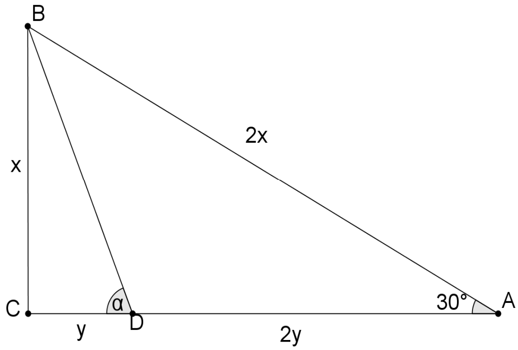
ציור 1ג

שימוש בהגדרת הקוסינוס במשולש ΔABC, $\cos 45° = \dfrac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{p}{\cos 45°} = p\sqrt{2}$

מכאן $p = q$.

מ.ש.ל.

משימה מס' 2



ציור 2

נתון משולש ישר-זווית ΔABC **ובעל זווית** ($\measuredangle C = 90°$) $\measuredangle BAC = 30°$ **.** D **נקודה על הניצב** CA**, ולכן** $AD = 2CD$ **. הוכח, כי** AD **חוצה את זווית** $\measuredangle CBA$**.**

הוכחה על-ידי הנדסת-המישור

נסמן $BC = x$, ולכן $AB = 2x$
(לפי תכונת משולש: $30°,60°,90°$).

נסמן: $CD = y$, ולכן $AD = 2y$.

מתקבל הקשר,

$2 = \frac{2y}{y} = \frac{2x}{x} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$. כלומר, BD חוצה-זווית לפי משפט חוצה הזווית.

מ. ש. ל.

הוכחות גאומטריות אחרות אפשר למצוא אצל סטופל וחריר (2008).

הוכחה על-ידי הטריגונומטרייה

נשתמש בסימון של ההוכחה בהנדסת-המישור, ונוסיף סימון: $\measuredangle BDC = \alpha$. לפי הגדרת הטנגנס,

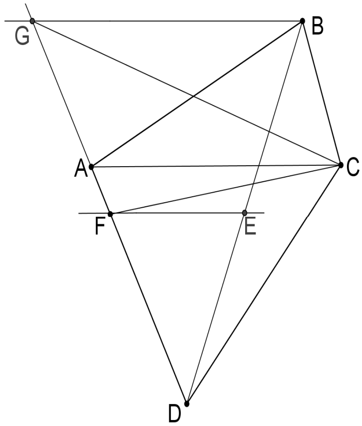
$$\alpha = 60° \Rightarrow tg\alpha = 3tg30° = \sqrt{3} \Rightarrow tg\alpha = \frac{x}{y},\ \ tg30° = \frac{x}{3y}$$

על-ידי חישוב זוויות במשולש – נקבל: $\measuredangle CBD = \measuredangle BDA = 30°$.

מ. ש. ל.

משימה מס' 3

נתון מרובע כלשהו $ABCD$. הנקודה E היא אמצע האלכסון BD. דרך נקודה זו – העבירו ישר מקביל לאלכסון AC, החותך את הצלע AD בנקודה F (כפי שנראה בציור 3א). הוכח, כי הקטע CF מחלק את שטח המרובע $ABCD$ לשני חלקים שווי-שטח, כלומר $S_{ABCD}=S_{\Delta CFD}$.



ציור 3א

<u>הוכחה בדרך הנדסית</u>

כבניית-עזר נעביר דרך הקדקוד B ישר, המקביל לאלכסון AC, החותך את המשך הצלע AD בנקודה G. למשולשים ΔABC ו-ΔACD יש אותו שטח, משום ש-AC בסיס משותף, והגבהים שלהם שווים (נובע מ- $BG \parallel AC$).

מכאן, $S_{ABCD}=S_{\Delta ACF}+S_{\Delta ACB}=S_{\Delta ACF}+S_{\Delta ACG}$.

EF – קטע האמצעים במשולש ΔDBG (ישר, היוצא מאמצע צלע של משולש ומקביל לצלע השנייה). לכן, $FD \parallel GB$. מכאן נובע, ש-CF הוא תיכון במשולש ΔCDG, וכידוע, "תיכון במשולש מחלק את שטחו לשני משולשים שווי-שטח". לכן, $S_{\Delta GCF}=S_{\Delta CFD}$. מהקשר שהוכח: $S_{ABCD}=S_{\Delta GCF}$ נובע, $S_{ABCD}=S_{\Delta CFD}$.

מ.ש.ל.

<u>הוכחה בדרך משולבת – הנדסה וטריגונומטרייה</u>

נחבר את הנקודה E עם הנקודות A ו- C (כנראה בציור 3ב').

$S_{\Delta ACE}=S_{\Delta ACF}$ (משולשים בעלי אותו בסיס וגובה). ומכאן,

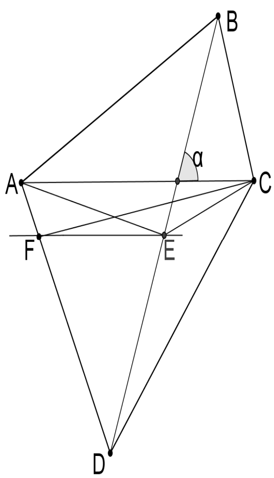
$S_{ABCF}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACF}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACE}=S_{ABCE}$.

כידוע, "שטחו של מרובע שווה למחצית מכפלת אלכסוניו בסינוס הזווית שביניהם". לכן, $S_{ABCE}=\frac{1}{2}AC\cdot BE\cdot\sin\alpha$

(α – זווית שבין אלכסוני המרובע הנתון). שטח המרובע הנתון הוא, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot 2BE\cdot\sin\alpha=2S_{ABCE}$

מכאן נקבל, $S_{ABCF}=S_{ABCE}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, כלומר נקבל $S_{ABCD}=S_{\Delta CFD}$.

מ. ש. ל.

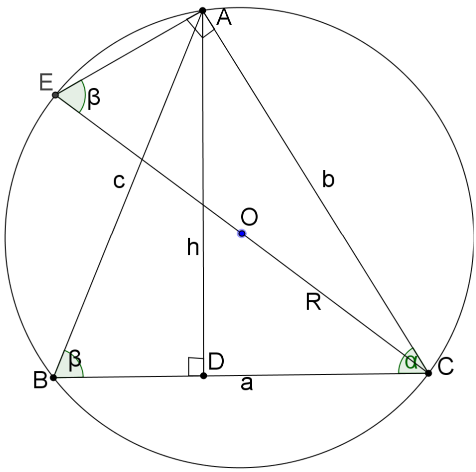


ציור 3ב

משימה מס' 4

הוכח את הקשר בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ΔABC, ובין צלעותיו ושטחו – $R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4S_{\Delta}}$.

(גורן, 1989, עמ' 306).



ציור 4

<u>הוכחה בדרך הנדסת-המישור</u>

נוריד את הגובה AD לבסיס, ונסמן אותו ב-h.
את מרכז- המעגל החוסם, נסמן ב-O, ונעביר את הקוטר $CE=2R$. נסמן:

$BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. $\measuredangle EAC=90^\circ$

(זווית היקפית הנשענת על הקוטר).

$\measuredangle CEA=\measuredangle ABC=\beta$ (זוויות היקפיות, הנשענות על הקשת $\widehat{AC}$).

המשולשים ΔBDA ו-ΔCAE דומים לפי ז.ז. על-פי יחס הצלעות במשולשים דומים:

$\dfrac{h}{b}=\dfrac{c}{2R} \Rightarrow h=\dfrac{b\cdot c}{2R}$. חישוב שטח המשולש $S_{\Delta}=\dfrac{a\cdot h}{2}=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R} \Rightarrow R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4S_{\Delta}}$.

מ.ש.ל.

<u>הוכחה בדרך הטריגונומטרית</u>

נחשב את שטח במשולש $S_{\Delta}=\dfrac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2}$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{b}{\sin\beta}=2R \Rightarrow \sin\beta=\frac{b}{2R}.$$

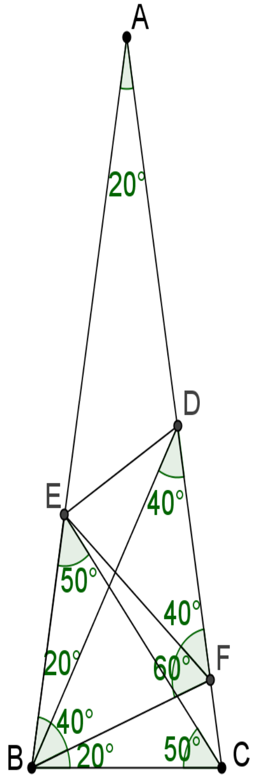
נציב קשר בנוסחת-השטח, $S_{\Delta}=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R} \Rightarrow R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4S_{\Delta}}$.

מ. ש. ל.

בצורה חד-משמעית נראה, שהדרך הטריגונומטרית הרבה יותר פשוטה ואינה מחייבת העברת קווי-עזר ודמיון-משולשים.

משימה מס' 5

משולש ΔABC הוא משולש ש"ש, שזווית-הראש שלו היא בת $20°$. מהנקודה B העבירו את הישר BD, באופן-
$\measuredangle DBC = 60^0$, ומהקדקוד C העבירו את הישר CE, באופן – $\measuredangle ECB = 50°$. חַשֵּׁב את ערכה של הזווית $\measuredangle BDE$.



ציור 5א

<u>הפתרון לפי הנדסת-המישור</u>

חישוב-הזוויות נותן $\measuredangle BEC = 50°$. מכאן – משולש ΔEBC ש"ש ($EB=BC$). נעביר קו-עזר BF, ולפיכך זווית $\Delta FBC = 20^0$ (כנראה בציור 5א). המשולש המתקבל ΔCBF הוא משולש ש"ש, שבו $BF=BC$. לפי חישוב הזוויות, גם המשולש ΔDBF הוא משולש ש"ש, ולכן $DF = BF$.

עד כה התקבלו הקשרים הבאים :

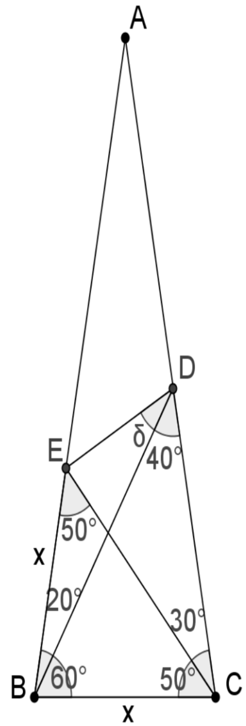
$DF = BF = BC = EB$ (*).

נחבר בקו ישר את הנקודות E ו- F.

המשולש ΔEBF הוא משולש ש"ש בעל זווית הראש של $60°$, ועל-כן הוא משולש ש"צ. יחד עם הקשרים (*) נקבל משולש ΔFED שהוא ש"ש. מחישוב-הזוויות סביב הנקודה – נקבל, $\measuredangle DFE = 40^0$, ולכן, $\measuredangle EDF = 70^0$. מאחר ש- $\measuredangle BDC = 40^0$, נקבל, $\measuredangle BDE = 30^0$.

מ. ש. ל.

<u>הערה</u> : ללא קווי-העזר BF ו-EF, שהביאו ליצירת משולשים שווי-שוקיים ומשולש ש"צ, היה קשה מאוד לחשב את ערך הזווית.



ציור 5ב

פתרון בדרך הטריגונומטרית

נסמן : $BC= x$, $\measuredangle EDB =\delta$. הזוויות הנתונות ואלו שניתן לחשב אותן– מופיעות בציור 5ב. לפי חישוב הזוויות, המשולש ΔEBC ש״ש, ולכן גם BE=x.

ממשפט הסינוסים במשולש ΔDBC נקבל

$$\frac{BD}{\sin 80^\circ}=\frac{x}{\sin 40^\circ}\Rightarrow BD=\frac{x\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=2x\sin 40^\circ \cdot$$

ממשפט הסינוסים במשולש ΔBED נקבל

$$\frac{x}{\sin\delta}=\frac{BD}{\sin\left[180^\circ-\left(\delta+20^\circ\right)\right]}=\frac{BD}{\sin(\delta+20^\circ)}=\frac{2x\cos 40^\circ}{\sin(\delta+20^\circ)}$$

כך נקבל את המשוואה הטריגונומטרית :

$$\sin\left(\delta+20^\circ\right)=2\sin\delta\cos 40^\circ \cdot$$

לפי זהויות טריגונומטריות נקבל

$$\sin\delta\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\cos\delta=\sin\delta\cos 40^\circ+\sin\delta\cos 40^\circ$$

נעביר אגפים

$$\sin\delta\left(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ\right)=\sin 20^\circ\cos\delta-\cos 40^\circ\sin\delta$$

$$-2\sin\delta\sin 30^\circ\sin 10^\circ=\sin 20^\circ\cos\delta-\cos 40^\circ\sin\delta$$

$$-\sin 10^\circ\sin\delta=\sin 20^\circ\cos\delta-\cos 40^\circ\sin\delta$$

$$\left(\cos 40^\circ-\sin 10^\circ\right)\sin\delta=\sin 20^\circ\cos\delta$$

$$\tan\delta=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 10^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ-\sin 10^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 30^\circ}=\frac{1}{2\cos 30^\circ}=\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \underline{\delta=30^\circ}$$

משימה מס׳ 6

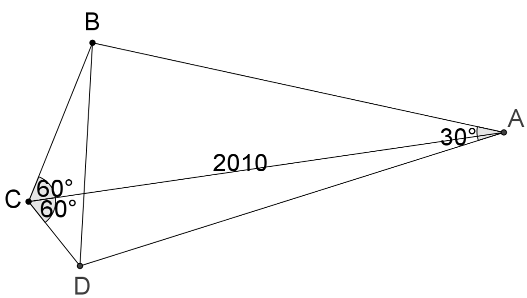
במרובע $ABCD$ נתון:

$\measuredangle BAC=\measuredangle DCA=60^\circ$,

$\measuredangle BAD=30^\circ$, $BC=$ **2010 ס״מ** .

מצא את היקף המשולש ΔBCD

(מיטב, 2006, עמ׳ 163).



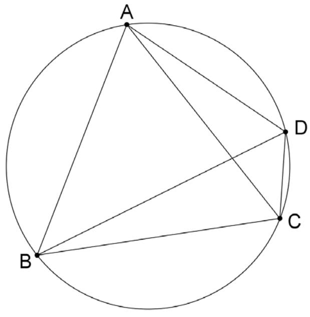
ציור 6א

פתרון בדרך ההנדסית

פתרון התרגיל מבוסס על המשפט :

במשולש ש״צ החסום במעגל, כשמעבירים בו מיתר, היוצא מאחד מקדקודי המשולש, אורך מיתר זה שווה לסכום אורכי המיתרים, היוצאים משני קדקודי המשולש ומתחברים אל קצהו השני של המיתר.

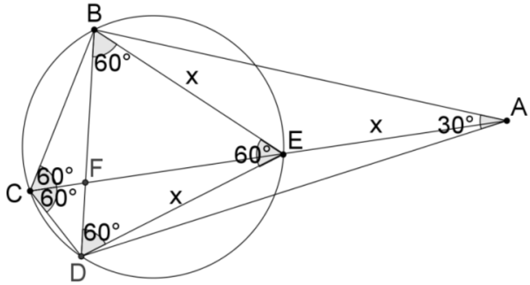
המשולש ΔABC הוא משולש ש״צ (ראו ציור 6ב). **כלומר המשפט הוא** $BD = AD + DC$. ההוכחות למשפט זה הן בדרך ההנדסית והן בדרך הטריגונומטרית – ניתן למצוא אצל מוגילבסקי וסטופל (2005).



ציור 6ב

לשם פתרון הבעיה שהוצגה – נבנה מעגל, החוסם את המשולש ΔCDB. מעגל זה חותך את AC, האלכסון של המרובע, בנקודה E. $\measuredangle BED = 60°$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום).

$\measuredangle BDE = 60^0$ (זוויות היקפיות, הנשענות על קשתות שוות).



ציור 6ג

לכן משולש ΔBDE הוא שווה-צלעות.

נסמן: $BD = DE = EB = x$ הנקודה E היא מרכז-המעגל, העובר דרך הנקודות D, B ו-A,

וזאת – מהנימוקים הבאים: $EB = ED$, $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BED = 30^0$ (זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה קשת). מכאן, $EA = x$.

לכן $AC = x + EC = x + CD + CB = BD + CD + CB = 2010$ (לפי משפט שצוטט בהקדמה), כלומר, היקף המשולש ΔBCD הוא כאורך האלכסון AC של המרובע.

__פתרון בדרך הטריגונומטרית__

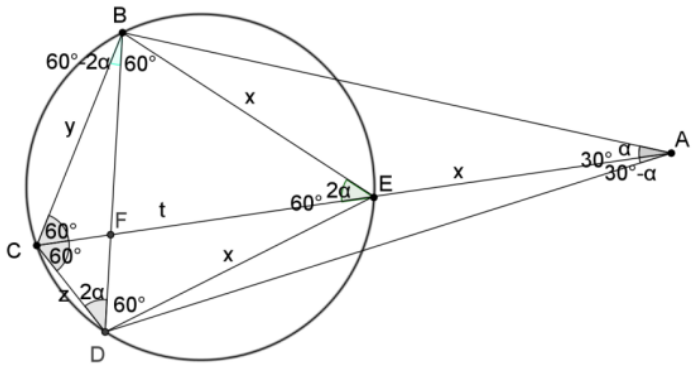
נוסיף סימנים לציור 6ג (ראו ציור 6ד). $\measuredangle BAC = \alpha, CD = z\ , BC = y\ , CE = t$

על-פי סימון זה ובהתחשב בהוכחה, ש-C הוא מרכז המעגל, החוסם את המשולש ΔABD נקבל את ערכי הזוויות הבאות: $\measuredangle CBD = 60° - 2\alpha$, $\measuredangle CEB = 2\alpha$.

$$\measuredangle CDB = 2\alpha, \measuredangle DEC = 60^0 - 2\alpha$$

על-ידי שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש ΔBCD נקבל $y=\frac{x\sin 2\alpha}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin 2\alpha$

$$z=\frac{x\sin(60^\circ-2\alpha)}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin(60^\circ-2\alpha)$$



ציור 6ד

על-ידי שימוש במשפט הסינוסים במשולש ΔBCE נקבל

$t=\frac{x\sin(120^\circ-2\alpha)}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin(120^\circ-2\alpha)$. נסמן, $p=AC=2010$. מכאן,

$x+t=p \Leftarrow x+\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin(120^\circ-2\alpha)=p \Leftarrow x=\frac{p}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(120^\circ-2\alpha\right)}$ $(*)$.

$$x+y+z=x+\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin 2\alpha+\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin(60^\circ-2\alpha)=x+\frac{2}{\sqrt{3}}x\left[\sin 2\alpha+\sin(60^\circ-2\alpha)\right]$$

על-ידי שימוש בנוסחת סכום סינוסים – נקבל

$$x+y+z=x+\frac{2}{\sqrt{3}}x\cos\left(30^\circ-2\alpha\right)=x\left[1+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(30^\circ-2\alpha\right)\right]$$

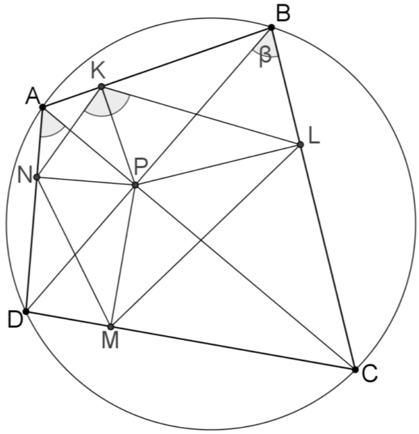
מאחר ש- $\sin\left(120^\circ-2\alpha\right)=\cos\left(30^\circ-2\alpha\right)$ נובע

$x+y+z=x\left[1+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(120^\circ-2\alpha\right)\right]$. הצבת הערך של x מהקשר $(*)$ נותנת,

$x+y+z=p$, כלומר היקף המשולש ΔBCD הוא, $\underline{p=AC=2010}$.

משימה מס' 7

נתון מרובע $ABCD$ החסום במעגל. מנקודת חיתוך האלכסונים P הורידו אנכים PK, PL, PM ו-PN לצלעות המרובע, כנראה באיור 7. הוכח, כי ניתן לחסום מעגל במרובע $KLMN$.



ציור 7

<u>הוכחה בדרך ההנדסית</u>

נוכיח, כי הנקודה P היא נקודת-המפגש של חוצי-הזוויות במרובע $KLMN$. משמעות הוכחת עובדה זו, היא, שהנקודה P נמצאת **במרחקים שווים מצלעות המרובע,** ועל כן ניתן לחסום בו מעגל.

נוכיח, ש-PB חוצה את הזווית $\measuredangle ABC$.

נסמן : $\measuredangle LPB = \beta$

המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ועל-כן $\measuredangle NAP = \beta$ (זווית היקפית, הנשענת על הקשת $\widehat{DC}$).

המרובע $PKBL$ הוא מרובע בר-חסימה מאחר שסכום זוויותיו הנגדיות 180^0.

מכאן, $\measuredangle PKL = \measuredangle PBL = \beta$ (זוויות היקפיות, הנשענות על אותה הקשת). המרובע $PKAN$ הוא מרובע בר-חסימה, משום שסכום זוויותיו הנגדיות $180°$. מכאן, $\measuredangle NAP = \measuredangle NKP = \beta$, (זוויות היקפיות, הנשענות על אותה הקשת). מכאן נובע, ש-PK חוצה את הזווית $\measuredangle NKL$ של המרובע $KLMN$. באותו אופן מוכיחים, שגם PL, PM ו-PN הם חוצי-זוויות המרובע, ועל-כן הנקודה P היא מרכז המעגל, החסום במרובע $KLMN$.

מ.ש.ל.

<u>הוכחה בדרך הטריגונומטרית</u>

נסמן ב-R את רדיוס המעגל, החוסם את המרובע $PKBL$.

על-ידי שימוש במשפט הסינוסים : במשולש ΔKBL נקבל : $\frac{KL}{\sin\measuredangle KBL} = 2R$, ובמשולש ΔPBL נקבל : $\frac{PB}{\sin 90°} = 2R$.

מהקשרים הנ"ל נקבל : $KL = PB \cdot \sin\measuredangle ABC$.

באותו אופן מתקבל $MN = PD \cdot \sin\measuredangle ADC$ (המרובע PMDN הוא בר-חסימה).

$\sin\measuredangle ABC = \sin\measuredangle ADC$ (זוויות משלימות ל-180^0).

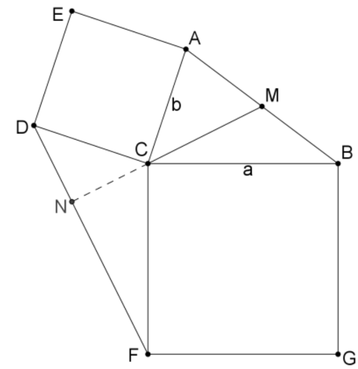
מכאן, $KL + MN = (PB + PD)\sin\measuredangle ABC$ או $KL + MN = BD \cdot \sin\measuredangle ABC$. באותו אופן עבור המרובעים: $PLCM$ ו-$PNAK$, נקבל, $LM + NK = AC \cdot \sin\measuredangle BAD$. והיות והמשולשים: $\Delta\Delta ABC$ ו- ΔABD חסומים באותו מעגל, הרי –

$$\frac{BD}{\sin\measuredangle BAD} = \frac{AC}{\sin\measuredangle ABC} = 2R'$$ (R' – רדיוס המעגל, החוסם את המרובע $ABCD$).

מכאן נובע: $KL + MN + LM + NK$, ועל-פי המשפט: *"במרובע, שבו סכום אורכי זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום אורכי הזוג השני של צלעות-ניתן לחסום מעגל"*.

כך התקבלה ההוכחה למשימה.

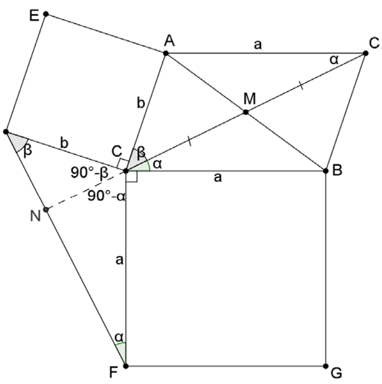
משימה מס' 8



נתון משולש ΔABC שאורכי צלעותיו: a, b, c. על שתיים מצלעותיו בנו כלפי חוץ ריבועים: $ACDE$ ו-$BCFG$, כנראה בציור. במשולש הנתון העבירו את MC התיכון לצלע AB ($AM=MB$). המשכו של התיכון חותך את FD בנקודה N.

הוכח, כי $DF \perp CM$ **ו-** $CM = \dfrac{1}{2}DF$.

<u>**הוכחה בדרך ההנדסית**</u>



ציור 8א

נאריך את התיכון CM כאורכו עד לנקודה C_1. המרובע $ACBC_1$ הוא מקבילית (מרובע, שאלכסוניו חוצים זה את זה). נסמן, $\measuredangle ACC_1 = \beta, \measuredangle BCC_1 = \alpha$.

חישוב-זוויות פשוט נותן

$$\measuredangle CAC_1 = \measuredangle DCF = 180^0 - (\alpha + \beta),$$

ולכן $\Delta DCF \cong \Delta CAC_1$ (לפי צ.ז.צ.). מכאן מקבלים

(א) $\measuredangle CDN = \beta$

חישוב-זוויות על קו ישר נותן $\measuredangle DCN = 90^0 - \beta$.

מכאן חישוב- זוויות במשולש ΔDCN נותן $\measuredangle DNC = 90^0$ ז"א ש- $CM \perp DF$.

(ב) $CC_1 = DF$. אבל $MC = \frac{1}{2}CC_1$, ולכן $MC = \frac{1}{2}DF$.

מ.ש.ל.

הוכחה בדרך הטריגונומטרית: ש- $MC = \frac{1}{2}DF$ **.**

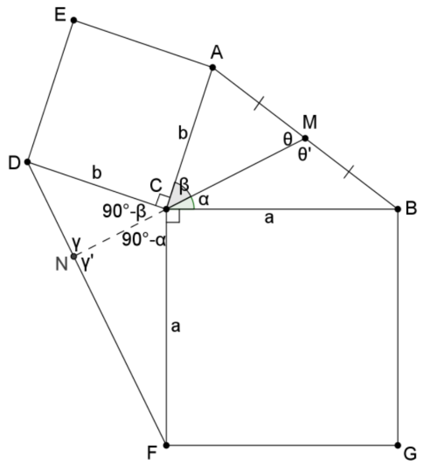
ידוע מהטריגונומטרייה, כי הביטוי לאורך של m_c – התיכון לצלע AB, היוצא מקדקוד C הוא,

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\measuredangle ACB}\ .$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ΔCDF,

$$DF^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180° - \measuredangle ACB\right) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\measuredangle ACB$$ או

$DF = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\measuredangle ACB}$, ולכן, $m_c = CM = \frac{1}{2}DF$.



ציור 8ב

ההוכחה בדרך הטריגונומטרית הבאה,

ש- $CM \perp DF$ אינה פשוטה.

נסמן את הזוויות שליד הנקודה M ב- θ וב- θ'. לפי משפט הסינוסים במשולשים $\measuredangle CAM$ ו- $\measuredangle CBM$,

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{AM}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{AM \cdot \sin\theta}{\sin\beta},$$

$$\frac{a}{\sin\theta'} = \frac{MB}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{MB \cdot \sin\theta'}{\sin\alpha}\ .$$

ומשום ש- $\sin\theta = \sin\theta'$ (זוויות משלימות ל- $180°$) וש- $AM = MB$ (נתון), נקבל

$$b = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta} \quad (*)\ .$$

נסמן את הזוויות שליד הנקודה M ב-γ וב-γ'.

לפי משפט הסינוסים במשולשים ΔDCN ו- ΔFCN,

$$\frac{b}{\sin\gamma} = \frac{DN}{\sin(90° - \beta)} \quad \Rightarrow \quad DN = \frac{b \cdot \cos\beta}{\sin\gamma},$$

$$\frac{a}{\sin\gamma'} = \frac{NF}{\sin(90° - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad NF = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\sin\gamma'} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\sin\gamma}\ .$$

$$\cdot DF = DN + NF = \frac{1}{\sin\gamma}\left(b\cos\beta + a\cos\alpha\right)$$

ולאחר העלאה בריבוע, $\cdot(**)\quad DF^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left(b^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta + a^2\cos^2\alpha\right)$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ΔDCF ,

$$(***)\quad DF^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\left[180^\circ - \left(\alpha+\beta\right)\right] = [b^2 + a^2 + 2ab\cos\left(\alpha+\beta\right)]$$

באמצעות קשר $(*)$ ובעזרת הזהות, $\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ניתן להוכיח בקלות, שהביטויים שבסוגריים של קשרים $(**)$ ו- $(***)$ שווים זה לזה. המסקנה משוויון זה היא: $\cdot\sin\gamma = 1 \;\Rightarrow\; \gamma = 90^\circ$

מ.ש.ל.

הערה מתודית

הבעיה האחרונה מהווה משימת אתגר ונחשבת בעיה קשה:

הפתר-ון בדרך ההנדסית מחייבת בניית-עזר מקובלת של מקבילית, כאשר נתון תיכון במשולש. לאחר מכן יש לאתר משולשים חופפים, וההמשך – פשוט.

הפתרון בדרך השנייה מחייבת ידע בטריגונומטרייה – כולל שליטה בזהויות ומיומנות בטכניקה אלגברית. הקורא ישפוט מה הדרך הפשוטה יותר להתמודדות עם בעיית אתגר.

בנוסף לכך נבוא **<u>הוכחה, ש- $DF \perp CM$ בדרך משולבת וקטורית-טריגונומטרית</u>**.

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$, כי נקודה M היא אמצע הקטע AB. לפי משולש ΔCDF:

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}$. נחשב את ערך המכפלה הסקלרית:

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} =$$

$$= ab\cos\left[90^\circ + \left(\alpha+\beta\right)\right] + a^2\cos 90^\circ - b^2\cos 90^\circ - ba\cos\left[90^\circ + \left(\alpha+\beta\right)\right] = 0$$

קיבלנו: $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$, ולכן $MC \perp DF$.

מ.ש.ל.

סיכום

הוצגו 8 משימות בדרגות קושי שונות: החל מ-4 שאלות קלות יחסית, וכלה – בשאלות קשות ומאותגרות.

בשאלות הקלות הפתרון ההנדסי והפתרון הטריגונומטרי קרובים במידת-הקושי שלהם.

בשאלות הקשות והמאתגרות לפעמים הפתרון ההנדסי קל מהפתרון הטריגונומטרי, ולפעמים – להפך. דבר זה מצביע על כך ששליטה טובה בשני התחומים היא ערובה ליכולת-התמודדות עם שאלות קשות.

ביבליוגרפיה

גורן, ב' (1989). **גיאומטריה של המישור: לתלמידי בתי-ספר תיכוניים וניבחנים חיצוניים** (מהדורה מורחבת). תל-אביב: מישלב.

מוגילבסקי, ר' וסטופל, מ' (2005). משפטים שנשכחו בהנדסת המישור והדגמת השימוש בהם לפתרון בעיות. **שאנן, 10**, 231-252.

מיטב, א' (2006). **מתמטיקה: מבחני בגרות ומתכונות עם פתרונות מלאים**. גבעת שמואל: שורש.

סטופל, מ' וחריר, ש' (2008). "יפה היא הגאומטריה": חיזוק ההיגד ע"י הצגת דרכי פתרון אחדות לאותה משימה. **שאנן, 13**, 255-271.