התמודדות עם משימות מיוחדות של סדרות, מספרים שלמים, ריבועי מספרים שלמים, מספרים ראשוניים ומספרים מְרֻכָּבִים

הקדמה

התמודדות עם משימות מתמטיות, שהמרכיב המרכזי בהן הוא מספרים – מחייבת, בדרך כלל, פתרון של משוואה אחת או יותר. במקרים מסוימים מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות, ולפעמים מדובר במשוואה מסדר גבוה, שפתרונה מורכב – דבר, המקשה על מציאת הפתרון.

תנאי בסיסי להצלחה בהתמודדות עם אתגרי החשיבה הוא הכרת האפיונים והתכונות של קבוצות המספרים השונות: טבעיים, שלמים, ראשוניים, זוגיים ואי-זוגיים, מרוכבים.

הפעולות הבאות על מספרים: פירוק לגורמים, צמצום שברים, מציאת מכנה משותף קטן ביותר, מציאת מחלק משותף גדול ביותר, איתור קבוצות מספרים, שביניהם קשר משותף וכד' – מחייבות הטמעה ושליטה בתכונות המספרים השונים.

להכרת תכונות המספרים והטמעת חשיבותן – הוכן לקט מגוון של משימות, כולל בעיות חקר, שפתרונן מתקבל על-ידי ניסוי וטעייה. במשימה הראשונה תוצג השאלה: "האם ישנן שלישיות ורביעיות של מספרים, שמכפלתם היא מספר ראשוני?"

כידוע, מספר ראשוני הוא מספר טבעי, שיש לו שני מחלקים בלבד: המספר 1 והמספר עצמו. לפיכך כאשר מבקשים למצוא שלישיות או רביעיות של מספרים, שמכפלתם היא מספר ראשוני, התשובה המיידית היא, שהן אינן קיימות. תשובה זו נכונה רק כאשר מדובר על שלישיות או רביעיות של מספרים טבעיים שכולם שונים. כאשר מאפשרים, שהמספר 1 יופיע בקבוצת המספרים יותר מפעם אחת, או כשמרחיבים את תחום המספרים לשברים, למספרים השליליים ואף לתחום המספרים המרוכבים – מוצאים סוגים שונים של שלישיות ורביעיות, שמכפלת איבריהן היא מספר ראשוני. מציאת שלישיות ורביעיות כאלו כאתגר – יכולה להיות אמצעי נוסף לתרגול כפל של שברים, כפל של מספרים חיוביים ושליליים וכן שימוש בנוסחת הכפל המקוצר למספרים ממשיים ולמספרים מרוכבים. כמו-כן תיבחן השאלה: האם בין השלישיות והרביעיות ישנן גם כאלה, המהוות סדרה חשבונית – כולל סיווגן בהתאם למאפיינים.

להלן יובאו היבטים דידקטיים ומתודיים.

__תארנים:__ מספרים – שלמים, ראשוניים, מרוכבים, סדרות.

שנתון "שאנן" – תשס"ד כרך ט'

לאחר מכן תוצג משימה של מציאת מספר מיוחד, שעל-ידי העתקת אחת מספרותיו למקום אחר – גדל ערכו פי 2. האסטרטגיה המתמטית למציאת המספר, המבוססת על-ידי ניסוי ובדיקה –תוגש במלואה.

בהמשך תוצגנה מספר משוואות ממעלה גבוהה, ונידָרש למצוא את הפתרונות השלמים שלהן בלבד.

בסיום המאמר תובא הוכחה לתכונת הכפל של שני מספרים, שכל אחד מהם הוא סכום ריבועים של שני מספרים טבעיים. הוכחת התכונה תיעשה בשתי שיטות:

א. על-ידי שימוש במספרים מרוכבים

ב. על-ידי אלגברה רגילה.

ברוב המשימות יופיעו דוגמאות עם מספרים. כמו-כן, יופיעו מספר משימות לעבודה עצמית, ועל-כן לא יובאו הפתרונות.

משימות נוספות ניתן למצוא במאמרים קודמים (1-3), או במקור (4).

ראוי לציין, שהדוגמאות המובאות לא מקיפות את כל האפשרויות, הקשורות לסוגי המשימות המתאימות לתלמידי החינוך העל-יסודי, אך הן נותנות כיוון לפיתוח נוסף של משימות, שיכולות להיות אתגר מעניין או פרויקט אישי.

משימה מס' 1:

מציאת שלישיות ורביעיות של מספרים, שמכפלת איבריהן היא מספר ראשוני.

1.א. שלישיות

א. שלישיות של מספרים טבעיים

כל שלישייה, ששניים מאיבריה הם המספר 1, והאיבר השלישי הוא מספר ראשוני – מכפלת איבריה תהא מספר ראשוני.

דוגמאות: (1,1,2), (1,1,13)

ב. שלישיות של מספרים שלמים.

כדי שמכפלתם תהא מספר ראשוני, קיימות שתי אפשרויות: האחת – כבסעיף א', והשנייה מחייבת, ששניים מהאיברים יהיו שליליים, שניים בעלי ערך מוחלט 1, והאיבר השלישי בערכו המוחלט יהיה מספר ראשוני.

דוגמאות: (-1,-1,5), (1,-1,-7)

ג. שלישיות עם מספרים חיוביים, שחלקם או כולם אינם שלמים.

למקרה זה ניתן לקבל סוגים שונים של שלישיות:

- שניים מהאיברים הופכיים – אחד מהאיברים חייב להיות מספר ראשוני, השני – שלם, והשלישי – שבר.

  דוגמאות: $\left(\frac{1}{4},4,5\right)$, $\left(\frac{1}{7},7,7\right)$

- שניים מהאיברים – שברים הופכיים, והשלישי מספר ראשוני.

  דוגמאות:

  $\left(\frac{7}{3},\frac{3}{7},7\right)$, $\left(\frac{2}{5},\frac{5}{2},11\right)$

- איבר אחד הוא המספר 1, האיבר השני – שלם, והאיבר השלישי – שבר, שמכפלתו באיבר השני נותנת מספר ראשוני.

  דוגמאות: $\left(1,35,\frac{1}{7}\right)$, $\left(1,25,\frac{1}{5}\right)$

- שלישיות של שברים.

  דוגמאות: $\left(\frac{36}{5},\frac{25}{6},\frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{3},\frac{25}{4}\right)$

- שלישיות עם זוג מספרים שליליים.

  דוגמאות: $\left(\frac{3}{5},-\frac{5}{3},-13\right)$, $\left(-\frac{1}{6},-6,7\right)$

ד. שלישיות עם זוג של מספרים מרוכבים.

- איבר אחד – המספר 1, ושני המספרים האחרים – מספרים מרוכבים צמודים, שמכפלתם היא מספר ראשוני.

  דוגמאות: $(3-2i,1,3+2i)$, $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}i,1,\sqrt{2}+\sqrt{5}i\right)$

- איבר אחד – מספר ראשוני, ושני המספרים האחרים – מספרים מרוכבים צמודים שמכפלתם 1.

  דוגמאות:

- $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i,\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i,13\right)$, $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\sqrt{5}i,\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\sqrt{5}i,17\right)$

ה. שלישיות של מספרים מרוכבים.

דוגמה: $\left(4-i, 3-i, \frac{11+7i}{10}\right)$.

ערך מכפלת האיברים הוא 17. מכפלת האיבר השני באיבר השלישי היא האיבר הצמוד של האיבר הראשון.

1.ב. רביעיות

א. רביעיות של מספרים שלמים חיוביים או שליליים, או חיוביים ושליליים.

התנאים לכך הם מספר זוגי של איברים בעלי אותו סימן, שלושה מהאיברים הם בעלי ערך מוחלט של 1, וערכו המוחלט של האיבר הרביעי הוא מספר ראשוני.

דוגמאות: $(1,1,1,3)$, $(-7,1,1,-1)$, $(-13,-1,-1,-1)$

ב. רביעיות של מספרים, שחלקם או כולם אינם שלמים, בעלי מספר זוגי של איברים עם אותו סימן.

בדומה לסעיף ג' של השלישיות – ייתכנו סוגים רבים של רביעיות, שמכפלתם תתן מספר ראשוני.

דוגמאות: $\left(1,3,\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{5},\frac{4}{3},-\frac{25}{4}\right)$, $\left(-\frac{25}{7},\frac{3}{5},-\frac{7}{15},11\right)$

ג. רביעיות של מספרים, שחלקם או כולם הם מספרים מרוכבים.

גם במקרה זה ייתכנו סוגים רבים של רביעיות.

דוגמאות: *(1,1,10+i,10-i)*, $\left(\frac{3}{5},\frac{5}{3},4+i,4-i\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, 1-i, 5+2i, 5-2i\right)$

1.ג. שלישיות של מספרים, המהווים סדרה חשבונית, ואשר מכפלתם היא מספר ראשוני.

השלישייה הקלסית, ההולמת דרישה זו, היא *-3,-1,1*, סדרה חשבונית בעלת הפרש 2, ושמכפלת איבריה 3 (מספר ראשוני).

למציאת שאר השלישיות – פועלים בדרך הבאה:

מסמנים את איברי הסדרה החשבונית ב-*a-d,a,a+d*, ועל כן מכפלתם היא $(a-d)\cdot a\cdot(a+d)=a\cdot(a^2-d^2)$, כלומר מכפלתם מורכבת משני גורמים: a ו- a^2-d^2.

כל מספר ראשוני הוא מכפלה של 1 במספר עצמו.

ערך המכפלה $a\cdot(a^2-d^2)$ יתאים למספר ראשוני, כאשר אחד מגורמי המכפלה יהיה 1, והגורם השני יהיה המספר הראשוני עצמו.

מטפלים בשני מקרים:

מקרה א'

בוחרים $a^2-d^2=1$, דהיינו $d^2=a^2-1$, ואילו a יהיה המספר הראשוני המבוקש.

עבור *a=2*, $d=\pm\sqrt{3}$ (לוקחים את הערך החיובי – סדרה עולה; הערך השלילי נותן אותה סדרה אך יורדת), והסדרה החשבונית: $2-\sqrt{3},2,2+\sqrt{3}$

עבור *a=3*, $d=\sqrt{8}$, והסדרה החשבונית: $3-\sqrt{8},3,3+\sqrt{8}$

עבור *a=5*, $d=\sqrt{24}$, והסדרה החשבונית: $5-2\sqrt{6},5,5+2\sqrt{6}$

וכך הלאה עבור שאר המספרים הראשוניים.

מקרה ב'

בוחרים ש-*a=1* וש- a^2-d^2 יהיה מספר ראשוני.

עבור $1-d^2=2$ מקבלים $d^2=-1$, כלומר $d=i$, והסדרה החשבונית: $1-i,1,1+i$.

עבור $1-d^2=3$ מקבלים $d^2=-2$, כלומר $d=i\sqrt{2}$ והסדרה החשבונית: $1-i\sqrt{2},1,1+i\sqrt{2}$

עבור $1-d^2=5$ מקבלים $d^2=-4$, כלומר $d=2i$, והסדרה החשבונית: $1-2i,1,1+2i$.

<u>לסיכום:</u> שלישיות, שמהוות סדרה חשבונית, ושמכפלת איבריהן מספר ראשוני – תתקבלנה כדלקמן: עבור כל מספר ראשוני – מקבלים 2 סדרות חשבוניות, שמכפלת איבריהן תהיה המספר הראשוני. סדרה אחת היא סדרה של מספרים ממשיים, והסדרה השנייה היא סדרה, שאיברה האמצעי 1, ושני איבריה האחרים (הראשון והאחרון) הם מספרים מרוכבים צמודים, שחלקם הממשי 1.

1.ד. רביעיות של מספרים המהווים סדרה חשבונית, ואשר מכפלתם היא מספר ראשוני.

למציאת הרביעיות פועלים בדרך הבאה:

מסמנים את איברי הסדרה החשבונית

ב- $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ (סדרה חשבונית שהֶפְרֵשה $2d$), ועל כן מכפלתם היא

$$(a-3d)\cdot(a-d)\cdot(a+d)\cdot(a+3d)=(a+d)\cdot(a-d)\cdot(a+3d)\cdot(a-3d)=$$
$$=(a^2-d^2)\cdot(a^2-9d^2)$$

כלומר מכפלתם מורכבת משני גורמים: (a^2-d^2) ו- (a^2-9d^2). ערך המכפלה יתאים למספר ראשוני, כאשר אחד מגורמי המכפלה יהיה 1, והגורם השני יהיה מספר ראשוני.

מטפלים בשני המקרים:

מקרה א'

בוחרים מספר ראשוני $= a^2-d^2$ ו- $a^2-9d^2=1$.

עבור המספר הראשוני 2 המשוואות הן:

$$\left.\begin{matrix} a^2-d^2=2 \\ a^2-9d^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d^2=\frac{1}{8} \Rightarrow d=\pm\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}$$

עבור a ו-d חיוביים – הסדרה החשבונית המבוקשת היא

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right),\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$, שמכפלת

איבריה היא המספר הראשוני 2. עבור a שלילי ו-d חיובי – מקבלים סדרה חשבונית אחרת של מספרים. עבור d שלילי מקבלים את אותן הסדרות, אך בסדר שונה של האיברים.

באותו אופן מוצאים את הסדרות החשבוניות עבור כל מספר ראשוני.

מקרה ב'

בוחרים מספר ראשוני $= a^2-9d^2$ ו- $a^2-d^2=1$. עבור המספר הראשוני 2 המשוואות הן:

$$\left.\begin{matrix} a^2-d^2=1 \\ a^2-9d^2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d^2=-\frac{1}{8} \Rightarrow d=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}i \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

משימה מס' 2

מציאת שלישיות של מספרים שלמים, המהווים סדרות חשבוניות, ומכפלות איבריהן היא ריבוע של מספר שלם.

היות והשלישייה מהווה סדרה חשבונית, נסמן את איבריה ב-$x+d$, x, $x-d$. יש למצוא x ו-d שלמים, המקיימים $(x-d)\cdot x\cdot(x+d)=(x^2-d^2)\cdot x=N^2$, כאשר N מספר שלם.

מציאת x ו-d תיעשה עבור ערכי N שונים בשיטת הניסוי והטעייה. עבור $N=2$ המשוואה היא $(x^2-d^2)\cdot x=4$.

המחלקים של המספר 4 הם: 1,2,4. בהתאם לאפשרויות השונות של המחלקים – מחשבים את הפרש הסדרה ומבודדים החוצה את המקרים, אשר בהם ההפרש הוא מספר שלם:

עבור $x=1$, $x^2-d^2=4$, ומקבלים $d^2=-3$ (d – מספר מדומה).

עבור $x=2$, $x^2-d^2=2$, ומקבלים $d^2=2$ (d – מספר לא שלם).

עבור $x=4$, $x^2-d^2=1$, ומקבלים $d^2=15$ (d – מספר לא שלם).

גם עבור ערכי x שלמים שליליים $(x=-1,-2,-4)$ לא מקבלים ערכי d שלמים, כלומר עבור $N=2$ אין פתרון למשימה.

לפישוט תהליך החיפוש עבור ערכי N גדולים יותר, אשר בהם גם מספר החלקים רב יותר – נציג שיטה, פשוטה יחסית, ונדגים אותה עבור $N=3$, כלומר המשוואה היא $(x^2-d^2)\cdot x=9$.

המחלקים של המספר 9 הם: 1,3,9. רושמים כסדרה את כל המחלקים (החיוביים והשליליים):

-9,-3,-1,1,3,9. מחפשים סדרה חשבונית של שלושה מהמספרים הנ"ל באופן שמכפלתם תהא 9.

הסדרות החשבוניות האפשריות הן: *-9,-3,3* , *-3,3,9* , *-3,-1,1* , *-1,1,3*. בשום סדרה חשבונית אפשרית – המכפלה אינה 9, ולכן עבור $N=3$ אין פתרון למשימה.

חיפוש פתרונות עבור ערכי N בתחום $N=2,3,4,\ldots,24$ הניבה את הפתרונות הבאים בלבד:

עבור $N=6$ התקבלה הסדרה *-9,-4,+1*

עבור $N=8$ התקבלה הסדרה *-8,-2,4*

עבור $N=9$ התקבלה הסדרה *-9,-3,3*.

בכל אחת מהשלישיות שנמצאו קיימים שני איברים שליליים.

משימות נוספות דומות (ללא פתרון)?

א. מצא שלישייה של מספרים שלמים, המהווים סדרה חשבונית, שמכפלתם שווה לחזקה השלישית של מספר שלם.

ב. מצא רביעייה של מספרים שלמים, המהווים סדרה חשבונית, שמכפלתם שווה לחזקה השלישית של מספר שלם.

משימה מס' 3:

מציאת ארבעה מספרים אי-זוגיים עוקבים, שמכפלתם – ריבוע של מספר שלם.

נסמן את המספרים העוקבים באופן הבא: $(n-3),(n-1),(n+1),(n+3)$, כאשר n הוא מספר זוגי.

נסמן ב-N את המספר השלם. לפיכך $(n-3)\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n+3)=N^2$

או $(n^2-9)\cdot(n^2-1)=N^2$

נסמן ב-p את n^2-9, כאשר p הוא מספר אי-זוגי (למה?).

נקבל את המשוואה: $p(p+8)=N^2$ או, $p^2+8p=N^2$

נבצע השלמה לריבוע באגף השמאלי: $(p+4)^2=4^2+N^2$

התקבלה השלישייה הפיתגורית: N, 4 ו-$p+4$. "השלישייה הפיתגורית" היחידה, שבה אחד המספרים הוא 4, היא $(\pm 3),(\pm 4),(\pm 5)$, כלומר $p+4=\pm 5$, והפתרונות $p_1=1,\quad p_2=-9$

עבור $p_1=1$ מקבלים: $n^2-9=1\Rightarrow n^2=10\Rightarrow n=\pm\sqrt{10}$

התשובה אינה מתאימה, כי n אינו מספר שלם זוגי.

עבור $p_2=-9$ מקבלים: $n^2-9=-9\Rightarrow n^2=0\Rightarrow n=0$, ועל כן רביעיית המספרים היא: *-3,-1,1,3*

<u>הערות:</u>

1. משלבי מציאת הרביעייה אנו מסיקים, שאין רביעייה של מספרים זוגיים עוקבים, שמכפלתם היא ריבוע של מספר שלם, וראוי להסביר זאת בצורה מתמטית.

2. ברביעייה שנמצאה מוצאים בקלות שישיות, שמיניות, עשיריות וכו' של מספרים אי-זוגיים עוקבים, שמכפלתם ריבוע של מספר שלם.

$15^2 = 225$ המכפלה $-5, -3, -1, 1, 3, 5$

$105^2 = 11{,}025$ המכפלה $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7,$

$945^2 = 893{,}025$ המכפלה $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$

משימה מס' 4:

הוכח, שתוספת של 1 למכפלה של ארבעה מספרים עוקבים היא ריבוע של מספר שלם.

ארבעת המספרים העוקבים יהיו: $n, n+1, n+2, n+3$ כאשר n הוא מספר שלם.

צ"ל ש- $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=N^2$, כאשר N הוא מספר שלם.

מבצעים פתיחת סוגריים באגף השמאלי, ומקבלים:

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=n^4+6n^3+2n^2+9n^2+6n+1=$$
$$(n^2)^2+2n(3n+1)+(3n+1)^2=(n^2+3n+1)^2=N^2$$

מכאן, $N=n^2+3n+1$, שהוא מספר שלם.

מ.ש.ל.

דוגמאות: $1\cdot2\cdot3\cdot4+1=25=5^2$

$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=361=19^2$

$(-7)\cdot(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)+1=841=29^2$

משימה דומה (ללא פתרון)

איזה מספר יש להחסיר ממכפלה של שלושה מספרים עוקבים, כדי שהתוצאה תהיה חזקה שלישית של מספר שלם?

משימה מס' 5:

מהן האפשרויות, ששכום קבוצה של *n* מספרים עוקבים יהיה *N* (נתון)?

לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית של מספרים עוקבים *(d=1)*,

$$N=\frac{(2a_1+n-1)}{2}\cdot n$$

שינוי נושא הנוסחה מביא למשוואה ריבועית(*):

$$n^2+(2a_1-1)n-2N=0$$

פתרון המשוואה $n_{1,2}=\dfrac{(1-2a_1)\pm\sqrt{8N+(2a_1-1)^2}}{2}$

n – מספר המחוברים חייב להיות מספר טבעי.

a_1 – מספר שלם (מדובר במספרים עוקבים).

$1\text{-}2a_1$ הוא מספר אי-זוגי, ולכן בשל המספר 2, המופיע במכנה של פתרון המשוואה, חייב הביטוי שמתחת לשורש להיות ריבוע של מספר שלם אי-זוגי.

כלומר $8N+(2a_1-1)^2=k^2$, כאשר k הוא מספר שלם אי-זוגי. פתרון המשוואה (*) יהיה

$$n_{1,2}=\frac{1-2a_1\pm k}{2}\quad(**)$$

<u>הדגמת הפתרון עבור *N=20*</u>

במקרה זה $(2a_1-1)^2=k^2-160$, ומחפשים k אי-זוגי, שמביא לכך ש-$(2a_1-1)$ יהיה מספר שלם אי-זוגי.

ה-k הראשון האפשרי הוא 13, ואז $(2a_1-1)^2=9\Rightarrow a_1=2$ או $a_1=-1$ על-ידי שימוש בנוסחה (**).

עבור $(a_1=2)$ – מקבלים, שמספר האיברים *n=5*, והקבוצה היא *2,3,4,5,6*. עבור $a_1=-1$ מקבלים *n=8*, והקבוצה היא, *-1,0,1,2,3,4,5,6*.

ה-k הבא האפשרי הוא 41, ואז $(2a_1-1)^2=1521\Rightarrow a_1=20$ או $a_1=-19$

עבור a_1-20 מקבלים *n=1*, ובקבוצה – איבר אחד והוא 20.

עבור $a_1 = -19$ מקבלים *n=40*, והקבוצה היא *18,19,20,.........,-1,0,1,.......,-19,-18*,

רואים, שאכן סכום הקבוצה הוא 20.

האם קיימים מקרי k אחרים אפשריים?

לא, כי החל מ-$k = 41$ הפרש הריבועים בין שני מספרים אי-זוגיים עוקבים גדול מ-160.

ראוי למצוא באותה דרך את הקבוצות עבור ערכי N אחרים.

משימה מס' 6:

מצא מספר, שאם מעבירים את ספרת היחידות שלו לראש המספר, יתקבל מספר הגדול פי 2 מהמספר המקורי (*5*).

מסמנים ב-x את ספרת היחידות של המספר (ערכיים אפשריים 1,2,3......,9) וב-y את המספר המבוקש.

שינוי מיקום ספרת היחידות משנה את ערכה בהתאם למספר הספרות של המספר.

מסמנים ב-n את מספר הספרות שבמספר y.

סילוק ספרת היחידות מקטינה את המספר המקורי לערך $\frac{y-x}{10}$. העברת ספרת היחידות לראש המספר מגדילה את ערכה ל- $x \cdot 10^{n-1}$.

לפי המשימה, יש למצוא את y מהמשוואה $\frac{y-x}{10} + x \cdot 10^{n-1} = 2y$. מכאן, שעל-ידי שינוי נושא הנוסחה ל-y, מקבלים $y = \frac{x \cdot (10^n - 1)}{19}$.

מכיוון ש-19 מספר ראשוני ו-y מספר שלם, יש למצוא ערך ל-n באופן ש-$10^n - 1$ יתחלק ב-19.

צורת הביטוי $10^n - 1$ היא מספר שכל ספרותיו 9, דהיינו 999999.........9.

חלוקת המספר בעזרת מחשבון עד למספר עשר ספרתי – לא הניבה חלוקה ב-19. לפיכך בוצעה חלוקה ידנית, והתקבל המספר ה"ענק" (תשע-עשרה ספרתי) הבא:

52,631,578,947,368,421

הכפלתו ב-x בהתאם לנוסחה (*) נותנת את המספר המבוקש: *y=105,263,157,894,736,842*

ניתן לבדוק, שהעברת ספרת היחידות 2 לראש המספר מגדילה את y פי 2 כנדרש.

משימה מס' 7:

מצא את הפתרונות השלמים של המשוואות.

משוואה מס' 1: $x+y=xy$

<u>פתרון:</u> $x+y=xy \Rightarrow x(y-1)=y \Rightarrow x=\frac{y}{y-1}=\frac{y-1+1}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}$

כדי ש-x יהיה מספר שלם, חייב גם הערך המספרי של $\frac{1}{y-1}$ להיות שלם.

האפשרויות היחידות, ש-$\frac{1}{y-1}$ יהיה מספר שלם, הן הבאות:

א. כאשר $y=0$, ואז גם $x=0$.

ב. כאשר $y=2$, ואז גם $x=2$,

כלומר הפתרונות הם: $(0,0)$ ו-$(2,2)$

משוואה מס' 2: $x^2-47=y^2$

<u>פתרון:</u> $x^2-47=y^2 \Rightarrow x^2-y^2=47 \Rightarrow (x+y)\cdot(x-y)=47$

47 הוא מספר ראשוני, ולכן ניתן להציגו ככפל של שני מספרים שלמים בשני האופנים:

$1x47=47,\ (-1)x(-47)=47$

מכאן מתקבלות מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x-y=47 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=24, y=-23 \qquad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=47 \end{cases} \Rightarrow x=24, y=23$$

$$\begin{cases} x-y=47 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=24, y=-23$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=47 \end{cases} \Rightarrow x=24, y=23$$

הפתרונות הם: $x=\pm24, y=\pm23$ (4 זוגות של תשובות).

משוואה מס' 3: $x^2-3xy+2y^2=3$

$$x^2-3xy+2y^2=3 \Rightarrow x^2-xy+2y^2-2xy=3 \Rightarrow x(x-y)-2y(x-y)=3$$

ומקבלים $(x-y)\cdot(x-2y)=3$

3 הוא מספר ראשוני, וניתן להציגו ככפל של שני מספרים שלמים בשני האופנים:

1x3=3, (-1)x(-3)=3

מכאן מתקבלות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=3 \end{cases} \Rightarrow x=-1,\ y=-2 \qquad \begin{cases} x-y=3 \\ x-2y=1 \end{cases} \Rightarrow x=5,\ y=2$$

$$\begin{cases} x-y=47 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=24,\ y=-23 \qquad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=47 \end{cases} \Rightarrow x=24,\ y=23$$

התשובה הסופית: *(5,2)*, *(-5,-2)*, *(1,2)* ו-*(-1,-2)*

משוואה מס' 4: $x(y^2+1)=48$

אחד מגורמי המכפלה y^2+1 תמיד חיובי, ולכן גם x חייב להיות חיובי.

את המספר 48 ניתן להציג ככפל של שני מספרים שלמים באופנים הבאים:

1x48=48, 2x24=48, 3x16=48, 4x12=48, 6x8=48

<u>טיפול באפשרות *1x48*</u>

אם $x=1$, מקבלים עבור y מספרים לא שלמים.

אם $x=48$, מקבלים $y=0$, והפתרון הוא *(48,0)*.

<u>טיפול באפשרות *2x24*</u>

אם $x=2$, מקבלים עבור y מספרים לא שלמים.

אם $x=24$, מקבלים $y=\pm1$, והפתרון הוא $(24,\pm1)$.

<u>טיפול באפשרות *3x16*</u>

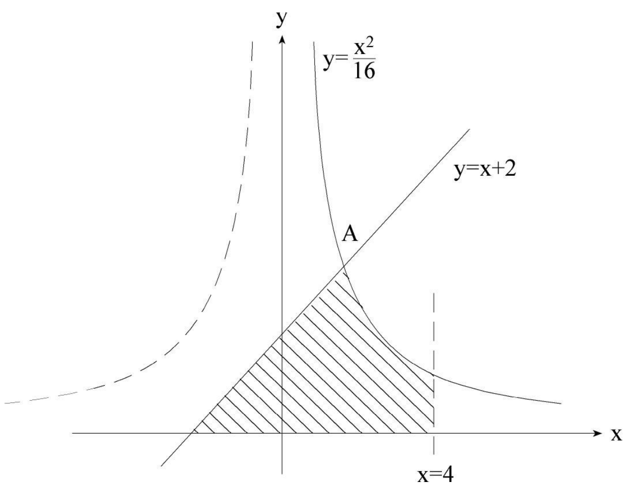
אם $x=3$, מקבלים מספרים לא שלמים.

אם $x=16$, מקבלים עבור y מספרים לא שלמים.

גם האפשרויות: *4x12* ו-*6x8* אינן מניבות פתרונות שלמים.

<u>משוואות נוספות (ללא פתרון)</u>

1. $x^2 + 23 = y^2$
2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 1$
3. $y^2 - 5x^2 = 6$



משימה מס' 8:

פתרון משוואה אלגברית – כדי לאפשר חישוב שטח.

במסגרת לימודי 5 יחידות לימוד נדרש תלמיד לחשב את השטח המוגבל בין ציר ה-x, הישר $x=4$, הפונקציה $y = \dfrac{16}{x^2}$ והישר $y = x + 2$ עד נקודת חיתוכו עם ציר ה-x.

הפונקציות והשטח מתוארים בציור.

התלמיד ציין, שמציאת הפונקציות הקדומות של $y = \dfrac{16}{x^2}$ ו- $y = x + 2$ פשוטה, וכן – גם חישוב ערך האינטגרל, אך הבעיה היא מציאת נקודת החיתוך (הנקודה A בציור), משום שמדובר בפתרון משוואה ממעלה שלישית:;

$$\frac{16}{x^2} = x + 2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 16 = 0.$$

כדי לפתור את המשוואה – נרשום אותה בצורה הבאה:

$$x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) + 4(x^2-4) = 0$$

מוצאים גורם משותף $x-2$, ומתקבלת המשוואה:

$$\begin{array}{ll} (x-2)(x^2+4x+8) = 0 & \\ \Downarrow \quad\quad\quad \Downarrow & \\ x_1 = 2 \quad\quad x_{2,3} = 2(-1 \pm i) & \end{array}$$

על סמך $x_1 = 2$ נקודת החיתוך היא *A(2,4)*.

הפתרונות $x_{2,3}$ אינם נראים בציור, כי הם בתחום המדומה. את הפתרונות $x_{2,3}$ ניתן היה למצוא, לאחר ש-$x_1 = 2$ היה מתקבל על-ידי ניחוש או על-ידי פתרון בדרך גרפית, ובהמשך הייתה נעשית חלוקת הפולינום $\left(x^3 + 2x^2 - 16\right)$ ב-$\left(x-2\right)$. החלוקה נותנת את המשוואה $x^2 + 4x + 8 = 0$, שפתרונותיה – המספרים המרוכבים $x_{2,3} = 2(-1 \pm i)$.

משימה מס' 9:

נתון מספר, שהוא סכום הריבועים של שני מספרים טבעיים שונים. הוכח, כי גם כפליים המספר הוא סכום הריבועים של שני מספרים טבעיים שונים.

נתון: $x=a^2+b^2$ (a ו-b טבעיים ו-$a>b$).

צ"ל: $2x=c^2+d^2$ (c ו-d טבעיים ו-$c>d$)

הוכחה:

$$x = a^2 + b^2 \Rightarrow 2x = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$2x = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

מכאן, $c=a+b$, $d=a-b$.

כלומר המספרים המבוקשים הם הסכום וההפרש של המספרים הנתונים.

דוגמאות:

$$x = 7^2 + 3^2 = 58$$
$$2x = (7+3)^2 + (7-3)^2 = 10^2 + 4^2 = 116 = 2x58$$
$$x = 10^2 + 7^2 = 149$$
$$2x = (10+7)^2 + (10-7)^2 = 17^2 + 3^2 = 298 = 2x149$$

הערה:

הקשר קיים עבור כל זוג של מספרים (חיוביים, שליליים, שלמים, שברים, שווים), ולא רק עבור מספרים טבעיים.

משימה מס' 10:

נתונים שני מספרים שונים, שכל אחד מהם הוא סכום הריבועים של שני מספרים טבעיים. הוכח, שגם המכפלה של שני המספרים היא סכום הריבועים של שני מספרים טבעיים.

נתון: $x = a^2 + b^2$, כאשר a ו-b הם מספרים טבעיים.

$y=c^2+d^2$, כאשר c ו-d הם מספרים טבעיים.

צריך להוכיח, ש- $x\cdot y=e^2+f^2$, כאשר e ו-f הם מספרים טבעיים.

<u>פתרון בדרך א' – על-ידי שימוש במספרים מורכבים</u>

רושמים את x בצורה הבאה: $x=(a+bi)(a-bi)$

רושמים את y בצורה הבאה: $y=(c+di)(c-di)$

מבצעים את המכפלה: $x\cdot y=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$

היות ופעולת הכפל היא חלופית, נרשום את המכפלה בסדר הבא:

$$x\cdot y=(a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)$$

מבצעים הכפלה של שני הסוגריים הראשונים והכפלה של שני הסוגריים האחרונים, ומקבלים:

$$x\cdot y=[(ac-bd)+(ad+bc)i]\ [(ac-bd)-(ad+bc)i]=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

כלומר $e=ac-bd$ ו-$f=ad+bc$ ו-e ו-f מספרים טבעיים, היות ו-a, b , c ו-d מספרים טבעיים.

<u>פתרון בדרך ב' – דרך אלגברית רגילה</u>

$$x\cdot y=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$$

בשני הביטויים הראשונים מבצעים השלמה לריבוע, וכך – גם בשני הביטויים האחרונים, ומקבלים:

$$x\cdot y=(ac-bd)^2+2abcd+(ad+bc)^2-2abcd=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

מסקנה: בשתי הדרכים מגיעים לאותה התוצאה.

דוגמה מספרית: $x=5^2+3^2=34,\ y=7^2+4^2=65\Rightarrow x\cdot y=2210$

מתוצאת ההוכחה: $x\cdot y=(35-12)^2+(20+21)^2=23^2+41^2=2210$

<u>הערה:</u> ראוי לשאול את התלמידים: האם קיימת חובה, ש- a,b,c,d,e,f יהיו מספרים טבעיים, או ניתן להסתפק בהנחה, שהם יהיו שלמים או אף שברים?

מראי מקומות

1. הירש, ג' (1999). **מתמטיקה אחרת.** אבן יהודה, רכס – פרויקטים חינוכיים בע"מ.
2. מדור חידות שעשועים ותשבצים, **מוסף ידיעות אחרונות** (17.2.2002).
3. סטופל, מ' (תשנ"ט). "הצגת משימות ככלי להגברת מוטיבציה ופיתוח החשיבה בלימודי חשבון ומתמטיקה", **שאנן, שנתון המכללה האקדמית הדתית לחינוך,** חיפה.
4. סטופל, מ', אוקסמן, ל' (1998). "בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד", **עלי"ה – עלון למורה למתמטיקה.** ירושלים, האוניברסיטה העברית, המרכז להוראת המדעים.
5. סטופל, מ', אוקסמן, ל' (תשס"א). "מספרים ראשוניים המופיעים במשימות ובבעיות מתמטיקה", **שאנן, שנתון המכללה הדתית לחינוך,** חיפה.