דוד זלצר, רחל מוגילבסקי, משה סטופל

מכלול בעיות בעלות שיטות פתרון שונות בהנדסת מרחב

תקציר

במאמר זה מוצג מגוון של משימות הקשורות לקוביה ומנסרה משולשת משוכללת: חישובי שטחים, נפחים, זוויות בין מישורים, מרחקים ומקומות גיאומטריים. המשימות מדורגות מבחינת הקושי. בחלקן מלוּוֹת בשיטות אחדות למציאת פתרון, המשלבות ענפים שונים במתמטיקה, וכן, המלצות והערות מתודיות ליישום בתהליך ההוראה.

מבוא

ראייה מרחבית מפותחת וכן ידע מתמטי בהנדסת מרחב, חשובים והכרחיים לכל העוסקים בתחומי ההנדסה (בניין, ארכיטקטורה, מכונות, אווירונאוטיקה), בתחומי המדע (כימיה, ביולוגיה, רפואה, טכנולוגיה של מזון ותורת האריזה – פיזור במרחב של מרכיבים), אומנות, ואף לפרט המעוניין לעצב את המרחב שבסביבתו הקרובה.

מסיבות אלו, חשוב מאוד להעמיק ולהרחיב את לימודי הנדסת המרחב הכלולים בתוכנית הלימודים במתמטיקה בכל הרמות: 3 י״ל, 4 י״ל ו-5 י״ל[1-3].

המרכיב המרכזי בהנדסת המרחב הוא הצורה הכללית של הגוף. החל מגיל צעיר לומדים להכיר גופים שונים: כדור, קוביה, תיבה, פירמידה, חרוט וגליל.

במהלך ההתבגרות, כשמתפתחת הראייה המרחבית, מיון הגופים חד יותר וישנה כבר הבחנה ברורה בין הגופים השייכים לאותה צורה יסודית. למשל, יכולת ההבחנה בין פירמידות שונות בהתאם לצורת הבסיס, או הכושר להבחין אם המקצועות הצדדיים שווים זה לזה.

בשלב הבא, מתמקדים במרכיבים היסודיים ובנתונים הגיאומטריים שמהם בנוי הגוף המרחבי: צורת הפאות ומספרן, שטח הפנים, הנפח, זוויות בין הפאות, מישורי חיתוך וצורתם, מרחקים פנימיים וכד׳. בשלב זה, חישובים מתמטיים שונים משמשים מרכיב מרכזי בביצוע המשימות.

הפעולות המשמשות להרחבת הידע בתחום הנדסת מרחב הן: הכנסת גופים קטומים, יצירת גופים חדשים על-ידי העברת מישורי חיתוך, שילוב בין גופים מרחביים, וכן חסימת גוף מרחבי אחד בגוף מרחבי אחר.

לימודי הנדסת מרחב, המשלבים אמצעי המחשה, בניית גופים מרחביים ופתרון לקט רחב ומגוון של תרגילים, עשויים לשפר ולפתח במידה רבה את יכולת הראייה והדמיון המרחבי. תוך כדי הלימוד והעיסוק בנושא באים לידי ביטוי פיתוח כישורים נוספים, כגון שימוש באינטואיציה, חשיבה לוגית, אינטגרציה והטמעה של מושגים, יכולת להוכיח ולשלול השערות. התכונות הנרכשות מועילות להתמודדות עם בעיות גם בתחומים אחרים.

סקירה מקיפה על מחקרים הקשורים באימון ובראייה מרחבית, מופיעה במאמרו של בן-חיים[4]. במאמרם

תארנים: מכלול בעיות בהנדסת מרחב; קוביה ומנסרה משולשת משוכללת, מישורי חיתוך במרחב.

של שניים ממחברי המאמר הזה[5], עסק ב״חתכים קוניים״ הנוצרים מחיתוך מישורים עם מעטפת חרוט מעגלי אינסופי.

במאמר זה, מוצג מכלול של בעיות הנוגעות לתכונותיו של גוף מרחבי מנקודות-מבט שונות. דרך פתרון הבעיות מתבססת על שיטות מתמטיות מגוונות המשלבות ענפים שונים במתמטיקה: הנדסת המישור, הנדסה אנליטית, אלגברה וקטורית, חשבון דיפרנציאלי, טרנספורמציות הנדסיות, מציאת מקומות גיאומטריים וכד׳[6, 7]. כל אלה מבליטים את יופייה של המתמטיקה, המורכבת מענפים שונים המשתלבים זה בזה. בעיות המבוססות על בניית חתכים בגוף הנדסי, משמשות בסיס ללימוד הנדסה תיאורית (פרוייקטיבית), תחום הנלמד במסגרת אקדמית.

מהניסיון שלנו בהוראת הנושא, נוכחנו לדעת כי תלמידים מגלים יותר עניין בבעיות שיש קשר ביניהן בלימוד החומר מאשר בעיות שאין ביניהן קשר כלל. בשלב מתקדם, מנסים התלמידים להציג שאלות מורכבות יותר, כך שכושר הפעילות שלהם מתקדם מבעיה לבעיה, דבר שיש בו קידום משמעותי בתהליך הלימודי.

לקט המשימות המופיע במכלול, קשורות למנסרות מיוחדות, המודרגות מבחינת הקושי. בתחילת המאמר מובאות שתי משימות הקשורות לקוביה, ובהמשך משימות רבות ומגוונות הקשורות למנסרה משולשת משוכללת, כולל מציאת מקומות גיאומטריים וטרנספורמציות גיאומטריות המשקפות את המנסרה כשלעצמה (סימטריות של מנסרה).

משימות אחדות מלוות בשיטות מספר למציאת פתרון וכן המלצות מתודיות ליישום בתהליך ההוראה.

סימונים: לאורך המאמר ייעשה שימוש בסימנים הבאים:

$\measuredangle$(AA', CB) – הזווית בין הישרים 'AA ו-CB

$\measuredangle$(A'C, C C'B') – הזווית בין הישר A'C למישור העובר דרך הנקודות C', C ו-'B

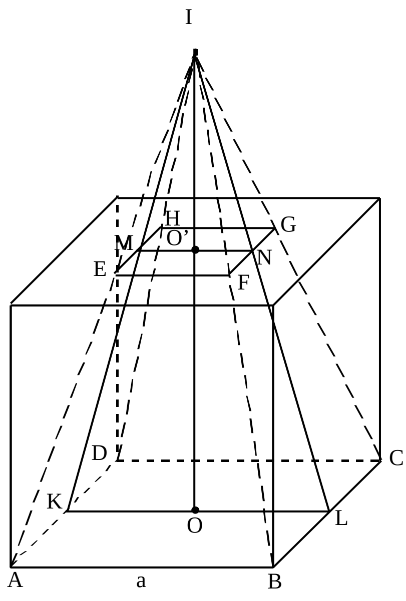
d(AA', CB) – המרחק בין הישרים A'A ו-CB

א. חישוב נפחי גופים שנחתכו מקוביה

משימה א׳ – חישוב נפח פירמידה קטומה

על בסיסה העליון של קוביה שאורך מקצועה a, סימנו ריבוע מרכזי שאורך צלעו b וצלעותיו מקבילות למקצועות הבסיס. את קדקודיו של הריבוע חיברנו עם הקדקודים המתאימים בבסיס התחתון, והתקבלה פירמידה קטומה (ציור מס׳ 1). יש לחשב את נפחה.

למטרה זו, נמשיך את המקצועות הצדדיים של הפירמידה הקטומה עד לנקודה I. מתקבלת פירמידה ריבועית גדולה (ABCDI), המורכבת מהפירמידה הקטומה ומפירמידה ריבועית קטנה (EFGHI) שנוצרה מחוץ לקוביה על-ידי המשכי המקצועות.



ציור מס׳ 1

נפח הפירמידה הקטומה הוא ההפרש בין נפחי הפירמידות הריבועיות: הגדולה והקטנה.

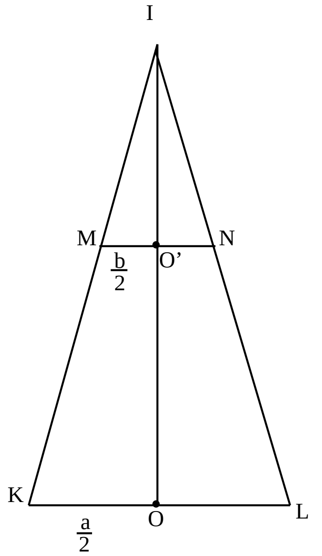
נעביר את מישור החיתוך IKL הניצב לבסיס התחתון ועובר דרך מרכזו O.

נעתיק מישור זה לציור מס׳ 2.

נסמן: IO=H, IO'=h (h ו-H הם גבהי הפירמידות).

$V=\frac{1}{3}(a^2H-b^2h)$ הוא נפח פירמידה קטומה. אורכו של הקטע OO' הוא a. מדמיון המשולשים IMN ו-IKL נובע היחס:

$$\frac{b}{a}=\frac{h}{H}=\frac{h}{a+h}.$$



ציור מס׳ 2

נחלץ את h ונקבל $h=\frac{ab}{a-b}$ וכן $H=a+h=\frac{a^2}{a-b}$

נציב את הגבהים h ו-H בנוסחת הנפח ונקבל:

$$V=\frac{1}{3}a^2\ \frac{a^2}{a-b}-\frac{1}{3}b^2\ \frac{ab}{a-b}=\frac{1}{3}a\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)=\frac{1}{3}a\left(a^2+ab+b^2\right).$$

מקרים קיצוניים של המשימה

א. b=o – הגוף הנוצר הוא פירמידה ריבועית שבסיסה וגובהה a ועל כן נפחו הוא $\frac{1}{3}a^3$.

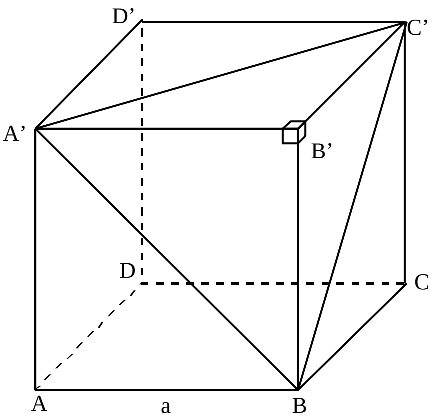
ב. b=a – הגוף הנוצר הוא הקוביה המקורית שנפחה a^3.

משימה ב׳ – חישוב נפח פירמידה שנחתכה מקוביה

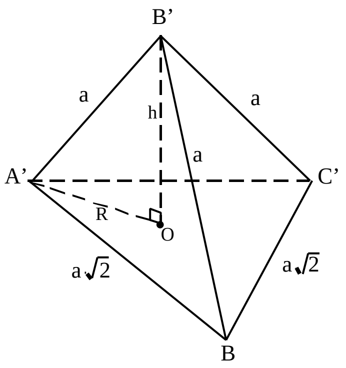
בקוביה ABCDA'B'C'D' בעלת מקצוע a, מעבירים מישור חיתוך A'BC' החותך מהקוביה את הפירמידה המשולשת A'BC'B' (ציור מס׳ 3).

יש לחשב את נפח הפירמידה.

נציג 2 שיטות לחישוב הנפח שההבדל ביניהן הוא בחירת הפאה המשמשת בסיס לפירמידה.



ציור מס׳ 3



ציור מס׳ 4

שיטה א׳

מניחים את הפירמידה על הפאה A'BC' שצורתה משולש שווה-צלעות, אורך כל צלע: $a\sqrt{2}$, ואורכי המקצועות הצדדיים: a (ציור מס׳ 4).

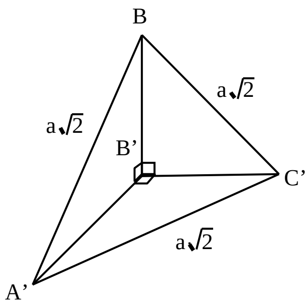
היטל הקדקוד העליון B' על הבסיס הוא הנקודה O – מרכז הבסיס.

לפי משפט הסינוסים: $\frac{a\sqrt{2}}{\sin 60^0} = 2R$

נקבל $R = a\sqrt{\frac{2}{3}}$;

ולפי משפט פיתגורס נקבל $h = \sqrt{a^2 - R^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

ולכן נפח הפירמידה הוא $V = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 \sin 60^0\ \ h = \frac{1}{6}a^3$, כלומר, נפח הפירמידה הוא $\frac{1}{6}$ מנפח הקוביה המקורית.



ציור מס׳ 5

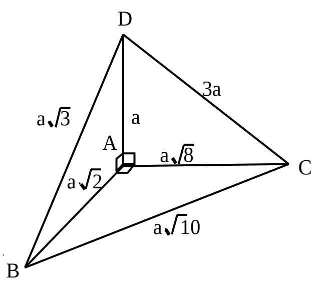
שיטה ב׳

מניחים את הפירמידה על הפאה A'B'C'.

מתקבלת פירמידה שגובהה a ובסיסה משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים שאורך ניצביו a (ציור מס׳ 5).

נפח הפירמידה: $V = \frac{1}{3}\ \frac{a\ a}{2}a = \frac{1}{6}a^3$

הערה: שיטה ב׳ פשוטה יותר ואינה מצריכה חישוב גובה הפירמידה, ואפילו ידע בסיסי בטריגונומטריה.



ציור מס׳ 6

משימת המשך

המשימה הקודמת מוכיחה, כי לפאה, שעליה מונח גוף הנדסי יש השפעה על פישוט חישוב הנפח. ניתן ליישם את העיקרון המתמטי, שהוצג לחישוב מרחק של נקודה ממישור.

ניקח לדוגמה, פירמידה משולשת, ששלוש מפאותיה משולשים ישרי-זווית, ואחד מהם הוא הבסיס של הפירמידה (כמתואר בציור מס׳ 6).

בציור מוצגים אורכי מקצועות הפירמידה. יש למצוא את d – מרחק הקדקוד A מהמישור BCD.

שיטה א' – באמצעות חישוב הנפח

נפח הפירמידה הוא $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{8}}{2} \cdot a = \frac{2}{3}a^3$

נפח הפירמידה הוא גם $V = \frac{1}{3} \cdot S\Delta_{BCD} \cdot d$

(V – הוא גם נפח הפירמידה כאשר BCD הוא מישור בסיסה) .

מכאן $d = \frac{2a^3}{S\Delta_{BCD}}$

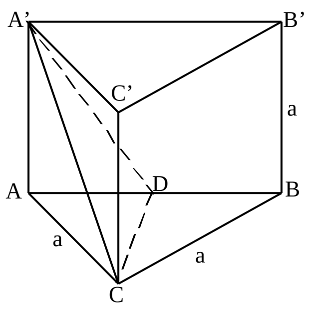
(את שטח משולש BCD אפשר לחשב בעזרת טריגונומטריה או בעזרת נוסחת הרון).

שיטה ב' – בדרך וקטורית

היות, שהמקצועות BA, DA ו-CA ניצבים זה לזה, לכן ניתן לקבוע את הנקודה A כראשית הצירים, ולהציג בדרך וקטורית את המישור BCD. בעזרת הנוסחה של מרחק נקודה ממישור ניתן לחשב את המרחק d.

ב' – חישובים במנסרה משולשת משוכללת

המשימות שיובאו בהמשך הן מקרה פרטי של מנסרה משולשת שכל מקצועותיה שווים (אורך a). המקרה הכללי יוצע לתלמידים כמשימה מתקדמת.



ציור מס' 7

משימה ג' – מציאת ערכים של:

1. $\measuredangle(A'C, A'AB)$
2. $d(C, A'AB)$
3. $d(CC', AB)$
4. $\measuredangle(CC', AB)$

לפתרון סעיפי המשימה נפנה לציור מס' 7.

בבסיס המנסרה ABC נוריד את הגובה CD.

היות שמישור הבסיס מאונך לכל אחת מהפאות, הרי הישר CD מאונך למישור AA'B (גובה במשולש ש"צ) ומקבלים: $d(C,AA'B) = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

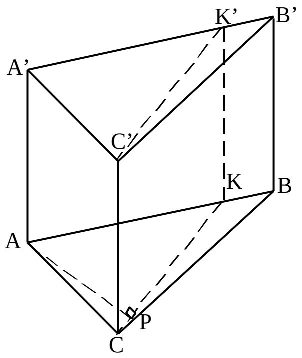
הקטע A'D הוא ההיטל של A'C (אלכסון הפאה AA'C'C) על המישור AA'B, ולכן $\measuredangle(A'C, AA'B) = \measuredangle CA'D$.

אורכו של הקטע A'C הוא $a\sqrt{2}$ (אלכסון בריבוע), לפיכך

$$\sin\measuredangle CA'D = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \measuredangle(A'C, AA'B) \approx 37.8^0$$

הקטע CD הוא אנך משותף לישרים מצטלבים CC' ו-AB, לכן $d(CC', AB) = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

קל להוכיח כי, $\measuredangle(CC', AB) = \measuredangle(AA', AB) = 90^0$.



ציור מס' 8

משימה ד'

נסמן נקודה K על מקצוע הבסיס AB באופן שיתקיים: AK:KB=m:n (ציור מס' 8).

יש למצוא את ערכם של:

1. $\measuredangle(CC'K, ABB')$
2. $d(AA', CC'K)$

בהתאם לחלק היחסי a $AK = \frac{m}{m+n}$

שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש AKC נותן:

$$CK = \frac{\sqrt{m^2 + m\ \ n + n^2}}{m+n}a$$

באותו משולש נחשב את ערך זווית AKC. בהתאם למשפט הסינוסים,

$$\sin\measuredangle AKC = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{m+n}{\sqrt{m^2+mn+n^2}},$$

או

$$\measuredangle(CC'K, ABB') = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{m+n}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}.$$

נוריד את AP – גובה במשולש ACK, ולכן d(AA', CC'K) = AP. נחשב את ערכו:

$$AP = AK\ \sin\measuredangle AKC = \frac{am\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+mn+n^2}},$$

לכן

$$d(AA', CC'K) = \frac{am\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+mn+n^2}}.$$

אם m = n, הנקודה K היא אמצע הקטע AB, נקבל: $\measuredangle(CC'K, ABB') = \arcsin 1 = 90^0$;

$$d(AA', CC'K) = \frac{a}{2}.$$

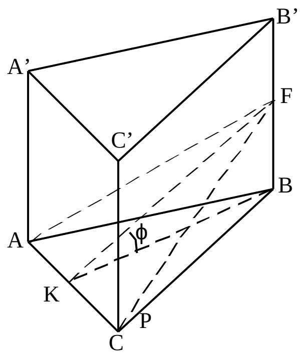
הערה: חשוב להדגיש לתלמידים, שהצבת המקרה הפרטי, מטרתה להוכיח נכונות חישובים שהתקבלו עבור המקרה הכללי.

משימה ה׳

נחתוך את המנסרה על-ידי מישור העובר דרך מקצוע הבסיס AC ויוצר זווית ϕ עם מישור הבסיס ABC.

המשימה כוללת ארבעה סעיפים:

1. מציאת צורת החתך.
2. חישוב שטח החתך.
3. חישוב היקף החתך.
4. מציאת נקודות המינימום והמקסימום של השטח והיקף החתך.



ציור מס׳ 9

דרך הפיתרון

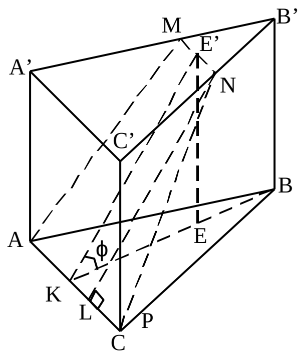
סעיף 1 –

מקדקוד B נוריד את הגובה BK של בסיס ABC.

אם זווית ϕ בין מישור החתך לבסיס היא בתחום

$\varphi \le \operatorname{arc}tg\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, החתך הוא משולש שווה שוקיים (ציור מס׳ 9).

אם הזווית היא בתחום $\varphi > \operatorname{arc}tg\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, החתך הוא טרפז שווה שוקיים כמוצג בציור מס׳ 10.



ציור מס׳ 10

ערכה של הזווית הקריטית – φ_c למעבר משטח חתך משולש לשטח חתך טרפז הוא: $\measuredangle B'KB = \varphi_c = \operatorname{arc}tg\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 49.11^0$

סעיף 2 –

עבור זווית $0 < \varphi \le \varphi_c$ משולש ABC הוא ההיטל של החתך AFC על מישור בסיס המנסרה, ולכן

$$S(\varphi) = S_{\Delta ABC}/\cos\varphi = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$$

עבור זווית $\varphi_c < \varphi < \pi / 2$ שטח חתך הטרפז הוא $S(\varphi) = S_{AMNC} = \dfrac{MN + AC}{2}\ KE'$.

ממשולש KEE' (EE'=BB'=a) נקבל: $KE' = \frac{a}{\sin\varphi}$ ו- $KE = actg\varphi$,

מכאן, $E'B' = KB - KE = \frac{a\sqrt{3}}{2} - actg\varphi$,

מדמיון המשולשים MB'N ו-ABC נובע היחס, $\frac{MN}{AC} = \frac{E'B'}{KB}$

נחלץ את MN ונציב קטעים כדי לקבל $MN = a - \frac{2actg\varphi}{\sqrt{3}}$

שטח החתך הוא: $S(\varphi) = \frac{a^2\left(\sqrt{3} - ctg\varphi\right)}{\sqrt{3}\sin\varphi}$

עבור התחום $0 < \varphi \le \varphi_c$ הפונקציה $S(\phi)$ עולה, כי $\cos\phi$ מופיע במכנה.

עבור $\varphi_c < \varphi < \pi/2$ יש לחקור את הפונקציה. לשם כך נגזור אותה:

$$S'(\varphi) = a^2 \frac{1 - \sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi}{\sqrt{3}\sin^3\varphi}$$

נחשב את נקודת הקיצון: $1 - \sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi = 0$

נשנה את המשוואה: $\sin^2\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi = 0$

נחלק ב- $\cos^2\varphi$ ונקבל: $tg^2\varphi - \sqrt{3}tg\varphi + 2 = 0$

למשוואה זו אין פתרון. הפונקציה הנגזרת חיובית בכל תחום, לכן הפונקציה $S(\phi)$ עולה בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$

סעיף 3 –

ערך צלעות המשולש AFC (ציור מס' 9): $AF = FC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4\cos^2\varphi}} = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 3tg^2\varphi}$,

לכן עבור $0 < \varphi \le \varphi_c$ יהיה $P(\varphi) = P_{\Delta AFC} = a\left(1 + \sqrt{4 + 3tg^2\varphi}\right)$

עבור $\varphi_c < \varphi < \pi/2$ יהיה היקף חתך הטרפז (המתואר בציור 10)

$P(\varphi) = P_{AMNC} = AC + MN + AM + CN$.

NL הוא גובה בטרפז. מאחר שהטרפז הוא ש״ש, הרי $LC=\dfrac{AC-MN}{2}=\dfrac{a\,ctg\varphi}{\sqrt{3}}$,

$$AM=CN=\sqrt{KE'^2+LC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\varphi}+\frac{a^2ctg^2\varphi}{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3+4ctg^2\varphi}$$

מכאן נקבל: $P(\varphi)=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-ctg\varphi+\sqrt{3+4ctg^2\varphi}\right)$

בתחום $0<\varphi\le\varphi_c$ הפונקציה $P(\phi)$ עולה, מפני שהפונקציה $tg\phi$ עולה בתחום זה.

עבור התחום $\varphi_c<\varphi<\pi/2$ נבצע גזירה: $P'(\varphi)=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sin^2\varphi}-\dfrac{4ctg\varphi}{\sin^2\varphi\,\sqrt{3+4ctg^2\varphi}}\right)$

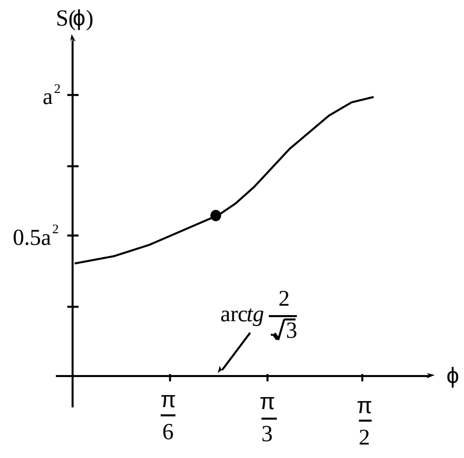
למציאת נקודת הקיצון נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל את המשוואה:

$$\sqrt{3+4ctg^2\varphi}=4ctg\varphi$$

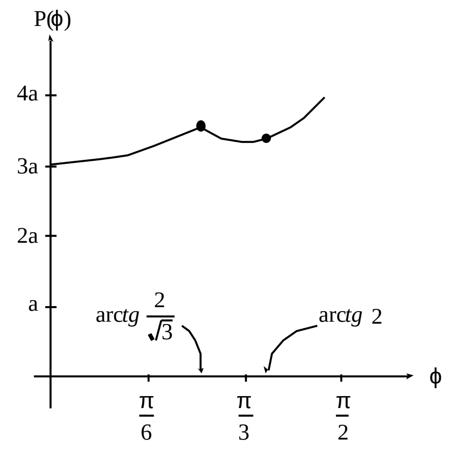
פתרונה בתחום הנ״ל $ctg\varphi=\dfrac{1}{2}$, או $\varphi=\mathrm{arc}ctg\dfrac{1}{2}=\mathrm{arc}tg2\approx63.4^0$

אפשר להראות שזוהי נקודת מינימום מקומי.

התיאור של הפונקציה $S(\phi)$ ו-$P(\phi)$ מובא בציורים מס׳ 11 ומס׳ 12.



ציור מס׳ 11



ציור מס׳ 12

הערה מתודית:

להגברת הקושי של הבעיה הנ״ל, אפשר להציע לתלמידים כאתגר, לפתור בעיה דומה ובה יחסים שונים בין מקצוע הבסיס למקצוע הצדדי של המנסרה. סביר להניח, שתלמידים מסוגלים לחקור

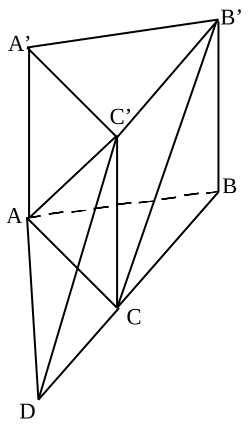
ולמצוא את היחס בין המקצועות אשר משנה את התנהגות פונקצית השטח, לבלתי מונוטונית עולה, או להיפך, לשנות את פונקצית ההיקף, כך שתעלה בכל התחום $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

משימה ו׳

מעבירים את אלכסוני הפאות הצדדיות AC' ו-CB' (הישרים מצטלבים). יש למצוא את ערך הזווית $\measuredangle(AC', CB')$ בשתי שיטות:

1. בדרך הנדסית קלסית.
2. בדרך וקטורית.

נעזר בציור מס׳ 13.



ציור מס׳ 13

סעיף 1–

נעביר ישר $C'D$ המקביל לישר CB'. ישר זה חותך את מישור הבסיס ABC בנקודה D, הנמצאת על המשך הצלע BC.

$\measuredangle(AC', CB') = \measuredangle(AC', DC') = \measuredangle AC'D$.

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ACD נקבל:

$$AD^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120^0 => AD = a\sqrt{3}$$

במשולש $AC'D$ הצלעות: $AC' = C'D = a\sqrt{2}$

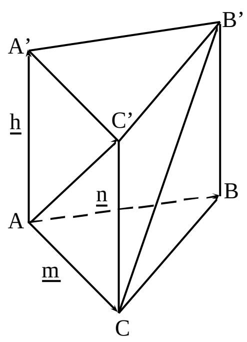
שימוש במשפט הקוסינוסים במשולש זה נותן:

$$AD^2 = (AC')^2 + (DC')^2 - 2AC'\ DC' \cos\measuredangle AC'D .$$

על-ידי הצבת ערכי הקטעים נקבל:

$3a^2 = 2a^2 + 2a^2 - 2a\sqrt{2}\ \ a\sqrt{2}\cos\measuredangle AC'D$. לכן $\cos\measuredangle AC'D = \frac{1}{4}$.

המסקנה: $\measuredangle(AC', CB') = \arccos\frac{1}{4} \approx 75.5^0$. מ.ש.ל.



ציור מס׳ 14

סעיף 2 –

נפנה לציור מס׳ 14 ונסמן: $A\vec{C} = \underline{m}$, $A\vec{B} = \underline{n}$ ו- $A\vec{A}' = \underline{h}$

$$\cos\measuredangle(AC', CB') = \frac{A\vec{C}'\ C\vec{B}'}{|A\vec{C}'|\ |CB'|}$$

בהתאם להצגת הווקטורים נרשום:

$C\vec{B}' = \underline{n} - \underline{m} + \underline{h}$, $A\vec{C}' = \underline{m} + \underline{h}$,

לכן $\cos \measuredangle\left(AC',CB'\right)=\dfrac{\left|\underline{m}\;\;\underline{n}-\underline{m}^2+\underline{n}\;\;\underline{h}+\underline{h}^2\right|}{\sqrt{\underline{m}^2+2\underline{m}\;\;\underline{h}+\underline{h}^2}\;\;\sqrt{\left(\underline{n}-\underline{m}\right)^2+2\left(\underline{n}-\underline{m}\right)\underline{h}+\underline{h}^2}}$.

כידוע, $\underline{m}\;\;\underline{h}=0$,$\underline{n}\;\;\underline{h}=0$,$\underline{m}\;\;\underline{n}=a^2\cos60^0=\dfrac{a^2}{2}$,$\underline{n}-\underline{m}=\vec{CB}$.

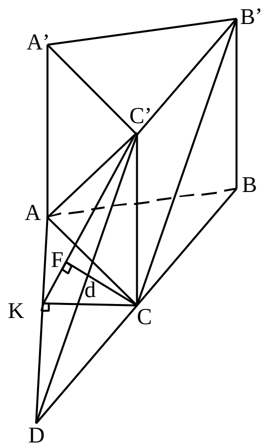
המסקנה: $\cos \measuredangle\left(AC',CB'\right)=\dfrac{\left|\dfrac{a^2}{2}-a^2+a^2\right|}{\sqrt{a^2+a^2}\;\;\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{2a^2}=\dfrac{1}{4}$,

או $\measuredangle\left(AC',CB'\right)=\arccos\dfrac{1}{4}$. מ.ש.ל.

משימה ז'

בהקשר למשימה ו', יש למצוא את המרחק $d(AC', CB')$ על-פי השיטות הבאות:

1. הנדסה קלסית.
2. אלגברה וקטורית.
3. הנדסה אנלטית



ציור מס' 15

סעיף 1 –

ידוע שהמרחק בין ישרים מצטלבים שווה למרחק בין אחד הישרים לבין מישור העובר דרך הישר השני והמקביל לישר הראשון. נעביר את הישר $C'D$ המקביל לישר CB' והחותך את מישור הבסיס ABC בנקודה D שעל המשך הצלע BC (ציור מס' 15).

המישור $AC'D$ מקביל לישר CB'. לפיכך המרחק המבוקש הוא המרחק בין הישר CB' והמישור $AC'D$, או המרחק של הנקודה C הנמצאת על הישר CB' והמישור $AC'D$.

נוריד גובה CK במשולש ACD, ונחבר C' עם K.

לפי משפט שלושת האנכים $C'K\;\;AD$, לכן $AD\;\;\left(CKC'\right)$, המישורים $AC'D$ ו-CKC' מאונכים זה לזה.

מסיבה זו, האנך CF היורד מהנקודה C למישור $AC'D$, נמצא על מישור CKC', ועקבו F נמצא על הישר KC', כלומר, $d(AC', CB') = CF$.

חישוב ערכו של d: מאחר שהמרובע $DCB'C'$ הוא מקבילית, הרי $DC=a$ ומשולש ACD הוא ש"ש.

לפיכך, ערכן של הזוויות הן: $\measuredangle ACD = 120^0$; $\measuredangle CAK = 30^0$; וערך לקטע $CK=\dfrac{a}{2}$.

משולש KCC' הוא משולש ישר-זווית שניצביו הם a ו- $\frac{a}{2}$, והקטע CF הוא הגובה ליתר.

לפי הנוסחאות לשטח המשולש $S_{\Delta KCC'} = \frac{KC\ \ CC'}{2} = \frac{KC'\ \ CF}{2}$; ובהתאם למשפט פיתגורס

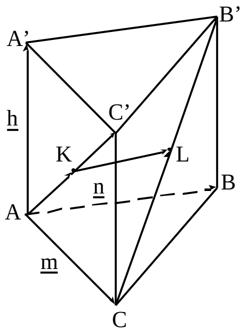
במשולש $(KC')^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, מקבלים: $CF = \frac{a\ \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$

המרחק הוא $d(AC',CB') = \frac{a}{\sqrt{5}}$. מ.ש.ל.

הערה מתודית: כדי להקל על הראייה המרחבית במשימה הנ״ל, רצוי להמחיש את דרך פתרון המשימה באופן שילווה בדגם מרחבי הבנוי מהמקצועות של המנסרה תוך כדי הוספת מישורים וישרים למנסרה.

סעיף 2 –

מרחק בין שני ישרים מצטלבים הוא אורך האנך המשותף לשני הישרים.



ציור מס׳ 16

נחפש את הווקטור $\vec{KL}$ שקצותיו נמצאים על הישרים AC' ו-CB' בהתאמה, באופן שהוא מאונך לכל אחד מהם (ציור מס׳ 16).

כבמשימה ו׳ סעיף 2, נסמן שוב: $\vec{AC} = \underline{m}$,$\vec{AB} = \underline{n}$ ו- $\vec{AA'} = \underline{h}$

ו- $\vec{AC'} = \underline{m} + \underline{h}$,$\vec{CB'} = \underline{n} - \underline{m} + \underline{h}$. היות שנקודה K נמצאת על AC', אזי $\vec{AK} = \alpha\vec{AC'}$, היות שנקודה L נמצאת על CB', אזי $\vec{CL} = \beta\vec{CB'}$.

נחפש α ו-β כך שיתקיימו תנאי הניצבות: $\vec{KL}\ \ \vec{AC'}$ וגם $\vec{KL}\ \ \vec{CB'}$.

זאת אומרת, $\vec{KL}\ \ \vec{AC'} = 0$ וגם $\vec{KL}\ \ \vec{CB'} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{KL} &= \vec{AC} + \vec{CL} - \vec{AK} = \underline{m} + \beta(\underline{n} - \underline{m} + \underline{h}) - \alpha(\underline{m} + \underline{h}) = \\ &= (1 - \beta - \alpha)\underline{m} + \beta\underline{n} + (\beta - \alpha)\underline{h} \end{aligned} \tag{1}$$

נפתור את מערכת המשוואות של תנאי הניצבות:

$$\begin{cases} (\underline{m} + \underline{h})\left[(1-\beta-\alpha)\underline{m} + \beta\underline{n} + (\beta-\alpha)\underline{h}\right] = 0 \\ (\underline{n} - \underline{m} + \underline{h})\left[(1-\beta-\alpha)\underline{m} + \beta\underline{n} + (\beta-\alpha)\underline{h}\right] = 0 \end{cases}$$

פיתוחן נותן את המשוואות:

$$\begin{cases}(1-\beta-\alpha)\underline{m}^2+\beta\,\underline{m}\cdot\underline{n}+(\beta-\alpha)\underline{h}^2=0\\ (1-2\beta-\alpha)\underline{m}\cdot\underline{n}-(1-\beta-\alpha)\underline{m}^2+\beta\,\underline{n}^2+(\beta-\alpha)\underline{h}^2\end{cases}$$

היות ש- $\underline{m}^2=\underline{n}^2=\underline{h}^2=a^2$, $\underline{m}\cdot\underline{n}=a^2\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$, אזי

$$\begin{cases}a^2\left(1-\beta-\alpha+\frac{\beta}{2}+\beta-\alpha\right)=0\\ a^2\left(\frac{1-2\beta-\alpha}{2}-1+\beta+\alpha+2\beta-\alpha\right)=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}1-2\alpha+\frac{\beta}{2}=0\\ -\frac{1}{2}+2\beta-\frac{\alpha}{2}=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{5},\ \beta=\frac{2}{5}$$

נציב את ערכי α ו-β לנוסחת הווקטור $\vec{KL}$ (נוסחה (1)) ונקבל

$$\vec{KL}=0\,\underline{m}+\frac{2}{5}\underline{n}-\frac{1}{5}\underline{h}=\frac{2}{5}\underline{n}-\frac{1}{5}\underline{h}$$

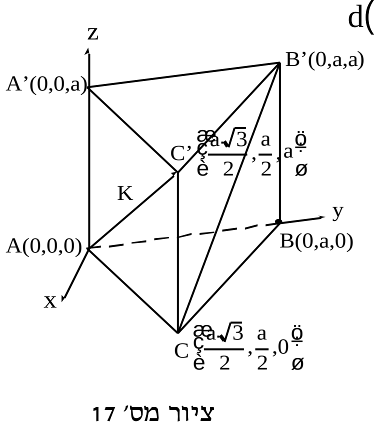
$$\left|\vec{KL}\right|^2=\left(\frac{2}{5}\underline{n}-\frac{1}{5}\underline{h}\right)^2=\frac{4}{25}a^2+\frac{1}{25}a^2=\frac{a^2}{5},\ (\underline{n}\cdot\underline{h}=0)$$

$$d(AC',CB')=\left|\vec{KL}\right|=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

סעיף 3 –

נמקם את המנסרה במערכת צירים שראשיתה בנקודה A, באופן שמקצוע AB מונח על הכיוון החיובי של הציר y, והמקצוע AA' מונח על הכיוון החיובי של הציר z.

שיעורי קדקודי המנסרה במערכת הצירים מופיעים בציור מס' 17.



ציור מס' 17