לאה אוקסמן ומשה סטופל

עוד על בניות הנדסיות יחודיות

תקציר

התחום של בניות הנדסיות, המשלב תחומי מתמטיקה שונים, הוא בעל פוטנציאל רב בפיתוח החשיבה המתמטית. ההתעמקות בפתרון משימות בנייה יחודיות, מעוררת את החשיבה הלא-קונבנציונאלית ובכך משפרת את יכולת ההתמודדות עם אתגרים שונים.

במאמר מובא לקט עשיר של משימות בנייה מורכבות, המשלבות משפטי יסוד בהנדסה עם בניות פשוטות.

המשימות סווגו לתת התחומים הבאים:

חלוקת שטחים, בניית מצולעים חסומים בתוך משולש, בניית קטעים אלגבריים, חלוקת זהב ושברים משולבים, וכן יישומי בנייה שונים.

מבוא

הפוטנציאל של בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה, למציאת פתרונות מקוריים בדרך לא-קונבנציונאלית ולגילוי יופיה של המתמטיקה, הוצג בכנס הארצי של "האגודה לקידום החינוך המתמטי בישראל".[1] ובמאמרים שונים[2-4].

ניתן לנצל בניות הנדסיות יסודיות, המסתמכות על ידע בסיסי של משפטים בהנדסה אשר מוכרים לתלמידים בכיתות ח'-ט'-י' – לבניות מסובכות יותר.

כלי השרטוט: עיפרון, מחוגה וסרגל חסר שנתות, משמשים תחליף למחשבון, באופן שהקטעים המתקבלים בבניות השונות שונים בגודלם לאלו שהיו מתקבלים כתוצאה של פעולה אריתמטית.

צורת החשיבה הדרושה לבניות ההנדסיות, שונה במהותה מהחשיבה האלגברית בשל מגבלות טכניות מיוחדות שיש להתגבר עליהן, כגון: היעדר מחשבון, כלי שרטוט ללא שנתות וכד'.

הבניות ההנדסיות המורכבות הם למעשה תוצר של תכנון מובנה, המיישם ידע בהנדסת מישור ובנוי בצורה מדורגת על בניות פשוטות. מגבירים את הקושי על-ידי הכנסת בעיות בנייה מסובכות יותר או על-ידי הגבלת אמצעי (כלי) השרטוט, כגון בניות בעזרת **סרגל בלבד.**

ההתעמקות בבעיות כאלו עשויה להעשיר את הידע במתמטיקה תוך שילוב תחומיה: אלגברה, הנדסה, טריגונומטריה.

ההתמודדות עם משימות הבנייה השונות, מעלה את רמת החשיבה והאנליזה ומתעלת את המתמודד לפתרונות מפתיעים.

במאמר זה מוצגות משימות בנייה מיוחדות, מרביתן בלתי-מוכרות, כולל הצגת דרכי-פתרון.

משימות אחדות מופיעות ללא פתרון, כשהמטרות הן להעמיד בפני הקורא אתגר לגלות את הפתרון, לעודד כתיבת בעיות בנייה דומות, לאחר צבירת ניסיון, ולהפיצן לשוחרי מתמטיקה.

תארגים: *יישומי בניות הנדסיות: חלוקת שטחים, מצולעים חסומים, קטעים אלגבריים, חלוקת הזהב, שברים משולבים.*

א. חלוקת שטחים

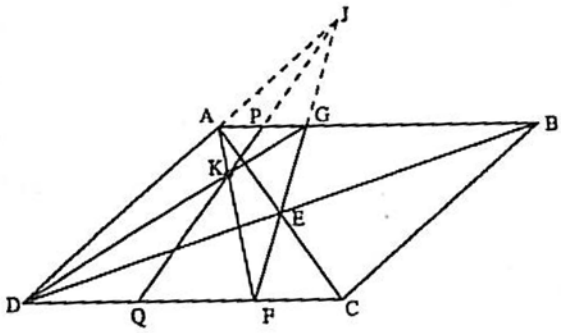
בסוג זה של בניות נדרש להעביר קו (או קווים) המשמש לחלוקה מסוימת של שטח נתון. נדגים זאת על-ידי ארבע דוגמאות יחודיות.

1. חלוקת שטח המקבילית

יש לחלק על-ידי קו ישר אחד את שטחה של מקבילית לשני חלקים. האחד הוא בעל שטח של 1/4 משטחה של המקבילית, והאחר 3/4 משטחה.

הערה: יש לבצע את הבנייה **בעיפרון ולהשתמש בסרגל חסר שנתות בלבד.**

תיאור הבנייה



ציור מס' 1

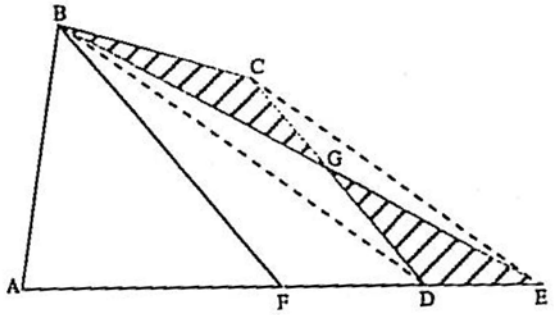
מעבירים את אלכסוני המקבילית הנחתכים בנקודה E (ציור מס' 1). דרך הנקודה E מעבירים ישר כלשהו החותך את צלעות המקבילית בנקודה F ו-G. ניתן להוכיח בקלות, שהישר FG מחלק את שטח המקבילית לשני טרפזים חופפים, כלומר, השטח של כל טרפז הוא מחצית שטחה של המקבילית. נותר לחלק את אחד הטרפזים לשני חלקים שווי שטח.

נעביר את אלכסוני הטרפז השמאלי. הם נפגשים בנקודה K.

המשכי הישרים AD ו-FG נפגשים בנקודה J. הישר המחבר את הנקודות J ו-K חותך את הצלע AB בנקודה P והמשכו חותך את הצלע DC בנקודה Q. בהסתמך על המשפט: "הישר המחבר את נקודות פגישת אלכסוני הטרפז לנקודות הפגישה של המשכי שוקי הטרפז, חוצה את בסיסי הטרפז", הרי שהנקודות P ו-Q הן אמצעי הקטעים AG ו-DF, ועל-כן הישר PQ מחלק את הטרפז AGFD לשני טרפזים שווי שטח. לכן שטח הטרפז APQD הוא רבע משטח המקבילית.

הערה: החל ממשימה זו ואילך יש לשרטט את כל הבניות בעיפרון, ולהשתמש במחוגה ובסרגל גם אם לא מצוין זאת במפורש.

2. חלוקת שטח מרובע



ציור מס' 2

דרך הקודקוד B של המרובע ABCD יש להעביר ישר באופן שיחצה את שטח המרובע הנתון (ציור מס' 2).

הערה: לצורך הבנייה מותר להשתמש בעיפרון, במחוגה ובסרגל חסר שנתות.

תיאור הבנייה

נחבר את נקודות B ו-D. דרך נקודה C נעביר ישר המקביל לישר BD. ישר זה חותך את המשך הצלע AD בנקודה E. נחצה את הקטע AE (כיצד?) ונקבל את הנקודה F – אמצע הקטע.

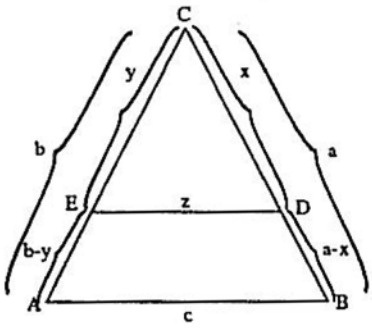
הישר BF הוא הישר החוצה את שטח המרובע.

הוכחת הבנייה

נעביר את הישר BE, החותך את הצלע CD בנקודה G. $S\,\Delta BAF = S\,\Delta BFE$ לפי המשפט: "התיכון לצלע (BF) מחלק את שטח המשולש לשני משולשים שווי שטח". נותר להוכיח ששטחו של המשולש BCG שווה לשטחו של המשולש DGE. ההוכחה במקרה זה פשוטה ומסתמכת על העובדה לפיה BCED הוא טרפז שאלכסוניו יוצרים ארבעה משולשים ששניים מהם דומים. לפיכך השטחים של שני המשולשים האחרים שווים, כיצד?

3. חלוקת משולש נתון לטרפז ולמשולש שווי-היקף

נתונות הצלעות a, b ו-c של משולש ABC. יש לבנות קו מקביל לבסיס AB באופן שהיקף המשולש שיתקבל יהיה שווה להיקף הטרפז (ציור מס' 3).



ציור מס' 3

ניתוח הבנייה

נסמן את צלעות המשולש ב-x, y ו-z.

בהצבת שוויון ההיקפים נקבל:

$$x+y+z = a-x+b-y+z+c$$

$$\Downarrow$$

$$2x+2y = a+b+c \qquad (1)$$

מדמיון המשולש שנוצר למשולש המקורי, נקבל:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = \frac{bx}{a} \qquad (2)$$

על-ידי הצבת ערכו של y לקשר (1) מתקבל:

$$2x + \frac{2bx}{a} = a + b + c \Rightarrow x = \frac{a(a+b+c)}{2(a+b)} \qquad (3)$$

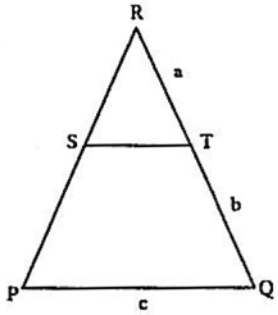
נציג את קשר (3) בדרך שונה:

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{ac}{a+b}\right) \qquad (4)$$

בקשר (4), האורך של x מורכב משני חלקים, נדגים כיצד ניתן לבנות בדרך הנדסית את הביטוי

$$\frac{ac}{a+b}$$

על אחת השוקיים של זווית שקודקודה P, מקצים את הקטע PQ=c (ציור מס'4).



ציור מס' 4

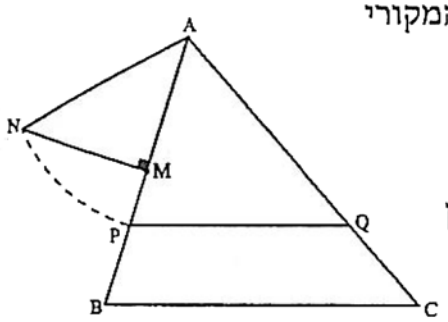
מהנקודה Q חגים קשת שאורכה a+b, החותכת את השוק השנייה של הזווית בנקודה R מסמנים על הצלע QR את הקטע QT=b. לפיכך אורכו של הקטע TR הוא a. מהנקודה T מעבירים מקביל לצלע PQ החותך את הצלע RP בנקודה S.
מדמיון המשולשים מקבלים:

$$\frac{ST}{c}=\frac{a}{a+b} \Rightarrow ST=\frac{ac}{a+b} \qquad (5)$$

מכאן ניתן בדרך הנדסית, לבנות את אורכו של הקטע x.

$$x=\frac{1}{2}(a+ST)$$

מקצים את הקטע x על הצלע CB (ציור מס' 3) באופן ש-CD=x. מעבירים דרך הנקודה D מקביל ל-AB ומקבלים את הקו ED המחלק את המשולש המקורי למשולש ולטרפז שווי היקף מ.ש.ל.



ציור מס' 5

4. חציית שטח משולש

יש להעביר ישר המקביל לבסיס AB של משולש ABC באופן שיחצה את שטחו ואת הישר PQ (ציור מס' 5).

ניתוח ותיאור הבנייה

היות ו-PQ || BC אזי המשולשים APQ ו-ABC דומים. מיחס הדמיון נקבל:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta APQ}}=\frac{AB^2}{AP^2}=\frac{2}{1}$$

כלומר, $AP=\frac{AB}{\sqrt{2}}$, צריך לבנות קטע זה.

תחילה חוצים את הקטע AB ומקבלים את נקודת האמצע שלו M. בונים משולש ישר זווית וש"ש AMN, שבו הזווית M היא בת 90°. היתר AN שווה ל- $AM\sqrt{2}$ או $AN=\frac{AB}{2}\cdot 2=\frac{AB}{\sqrt{2}}$.

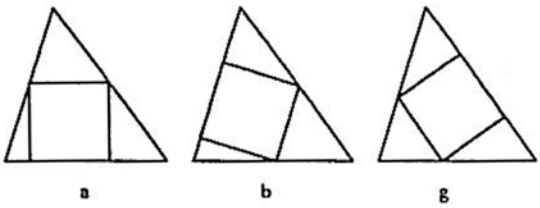
מהנקודה A חגים קשת ברדיוס AN ומתקבלת הנקודה P הדרושה.
למשימה הנ"ל יש פתרון אחד בלבד.

ב. בניית מצולעים חסומים בתוך משולש

בנושא זה נתחיל בחסימת ריבוע בתוך משולש כלשהו, בהמשך נעסוק בבניית מקבילית חסומה, ולבסוף נתאר בשתי דרכים את בנייתו של משולש ש"צ.
ניתן להראות שבניית הריבוע החסום הוא מקרה פרטי של חסימת מקבילית שאחת מזוויותיה בת 90° ויחס צלעותיה 1.

1. בניית ריבוע חסום במשולש

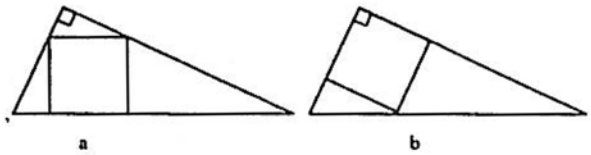
כיצד בונים ריבוע בעזרת סרגל ומחוגה בתוך משולש ABC נתון, באופן ששניים מקודקודיו על צלע אחת ושני קודקודיו האחרים על שאר שתי צלעותיו (5) (ציור מס' 6)? כמה פתרונות יש לבעיה?



ציור מס' 6

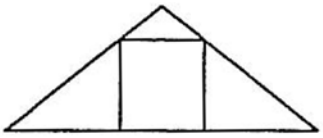
אם המשולש ABC הוא חד-זוויות, יהיו לבעיה 3 פתרונות, כמוצג בציור מס' 6.

אם המשולש הוא ישר-זווית יהיו שני פתרונות, כמתואר בציור מס' 7.



ציור מס' 7

אם המשולש קהה-זווית יהיה פתרון אחד בלבד, כמוצג בציור מס' 8.


ציור מס' 8

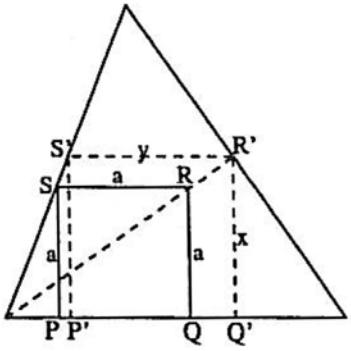
תיאור הבנייה

בונים ריבוע כלשהו PQRS שקודקודיו P ו-Q יהיו על הצלע AB, הקודקוד S על הצלע AC, והקודקוד R בתוך המשולש, כמתואר בציור מס' 9.

במשימה זו ההנחה היא ש-A ∡ חדה (בשאר המשימות הבנייה דומה).

נמשיך את הישר AR עד לחיתוכו בנקודה 'R על הצלע BC. מהנקודה 'R נוריד אנך לבסיס, החותך אותו בנקודה 'Q ונשרטט קו מקביל, החותך את הצלע AC בנקודה 'S. מהנקודה S נוריד אנך לבסיס, החותך אותו בנקודה 'P.

המלבן 'P'Q'R'S שהתקבל הוא הריבוע הנדרש.



ציור מס' 9

הוכחת הבנייה

נסמן ב-a את צלעות הריבוע PQRS וב-x ו-y את הצלעות הסמוכות של המלבן 'P'Q'R'S.

מדמיון המשולשים ARQ ו-'AR'Q נובע: $\frac{AR}{AR'} = \frac{a}{x}$

ומדמיון המשולשים ASR ו-'AS'R נובע: $\frac{AR}{AR'} = \frac{a}{y}$

ולכן $\frac{a}{x} = \frac{a}{y} \Rightarrow x = y$ המלבן שהתקבל הוא הריבוע הדרוש.

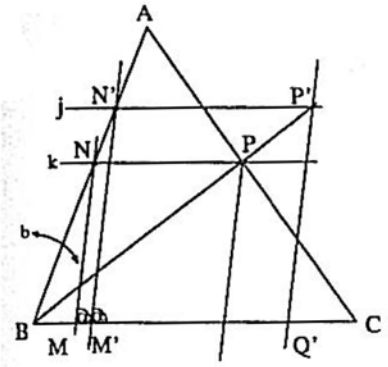
2. חסימת מקבילית במשולש

בתוך משולש נתון יש לחסום מקבילית, באופן שצלע אחת שלה תתלכד עם צלע המשולש, ושני קודקודיה הנוספים יהיו על שתי הצלעות האחרות.

המשולש הנתון הוא ABC ויש לחסום את המקבילית MNPQ (ציור מס' 10).

הנתונים של המקבילית הם:

1. הזווית החדה שלה α (∡NMQ=α)
2. היחס בין צלעותיה $\left(\frac{NP}{NM}=\frac{m}{n}\right)\frac{m}{n}$



ציור מס' 10

תיאור הבנייה והוכחה

על הצלע AB נבחר נקודה כלשהי 'N ונעביר את הקטע 'N'M (M' על הצלע BC) כך שהזווית בינו לבין BC תהיה α (כיצד מבצעים זאת?). אחר-כך נעביר דרך הנקודה 'N ישר j המקביל ל-BC.

על ישר זה נסמן נקודה 'P כך ש- $\frac{N'P'}{N'M'}=\frac{m}{n}$.

נעביר 'P'Q מקביל ל-'N'M. התקבלה המקבילית 'N'P'Q'M הדומה למקבילית המבוקשת. לקבלת המקבילית החסומה, נחבר בישר את הנקודות B ו-'P. ישר זה, חותך את הצלע AC בנקודה P. דרך הנקודה P נעביר ישר k, המקביל ל-BC והחותך את הצלע AB בנקודה N, וישר ℓ המקביל לקטע 'N'M והחותך את הצלע BC בנקודה Q. המקבילית NPQM היא המקבילית הדרושה. אפשר להוכיח בקלות על-פי דמיון משולשים כי:

$$\frac{NP}{NM}=\frac{m}{n}$$

הערה: יש לשים-לב, שבניית המקבילית החסומה אפשרית רק אם ∡B<α (אם ∡B>α יהיה מיקומה של הנקודה M משמאל לקודקוד B, ותתקבל מקבילית לא חסומה).

3. **בניית משולש ש"צ חסום במשולש**

דרך א':

על-סמך המשימה הקודמת אפשר לחסום משולש ש"צ במשולש נתון ABC. בונים מקבילית חסומה בעלת הנתונים: $\frac{NP}{NM}=1$, ∡NMQ=60°. המקבילית המתקבלת היא מעוין ואחת מזוויותיו היא זווית חדה בת 60°, לפיכך המשולש NPQ הוא משולש ש"צ כנדרש.

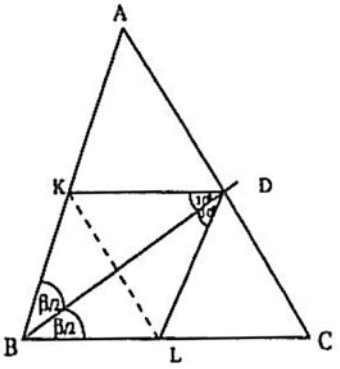
באותה דרך ניתן לחסום עוד שני משושלים ש"צ: צלע של משולש אחד תתלכד עם הצלע AB של המשולש הנתון, וצלע של משולש אחר תתלכד עם הצלע AC.

הערה: בניית משולש שווה-צלעות חסום במשולש נתון אפשרית, מפני שמשולש NPQ נמצא תמיד בתוך משולש ABC.

דרך ב':

נעביר חוצה-זווית B ונקבל ישר BD (ציור מס' 11). נבנה את זוויות BDK ו-BDL שאחת מהן

בת 30°. המרובע BKDL שהתקבל הוא דלתון (למה?) והזווית שלו D היא בת 60°. לכן משולש KDL הוא ש"צ כנדרש.
מובן, שניתן לבנות עוד שני משולשים ש"צ אחרים החסומים במשולש זה; פעם על-פי בניית חוצה-זווית A ופעם על-פי חוצה-זווית C.



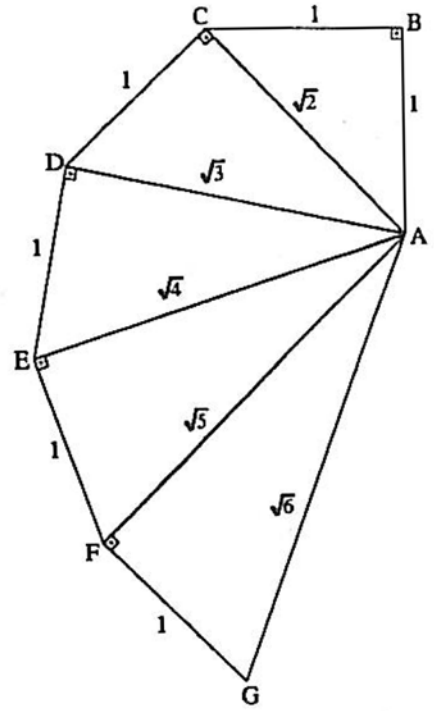
ציור מס' 11

ג. בניות של קטעים אלגבריים

באמצעות קטעים נתונים a ו-b, המשמשים כניצבים של משולש ישר-זווית, ניתן לבנות את היתר x שאורכו $\sqrt{a^2+b^2}$. אם אחד הקטעים a הוא היתר של משולש ישר-זווית והקטע השני b הוא אחד הניצבים,
הרי אורכו של הניצב השני יהיה $\sqrt{a^2-b^2}$.

1. "מכונה" לבניית קטעים שאורכיהם הם שורשים של מספרים שלמים

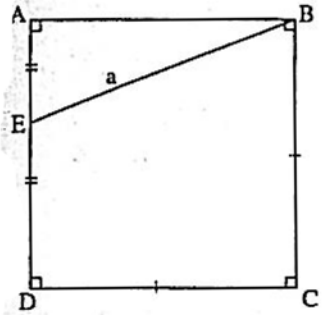
בציור מס' 12, מוצג משולש ישר-זווית ושווה שוקיים ABC ($\measuredangle B=90^\circ$), שאורכי ניצביו 1. על-סמך משפט פיתגורס, אורך היתר שלו AC הוא $\sqrt{2}$. בקודקוד C בונים אנך ל-AC ומקצים עליו קטע CD=1. אורכו של $AD=\sqrt{3}$. בקודקוד D בונים אנך ל-AD ומקצים עליו קטע ED=1. אורכו של $AE=\sqrt{4}$. וכך ממשיכים הלאה ומקבלים קטעים $AF=\sqrt{5}$, $AG=\sqrt{6}$ וכו'.



ציור מס' 12

אם מעוניינים, לדוגמה, לקבל את הקטע $a\sqrt{19}$ של קטע a, ניתן לקצר את התהליך ולהתחיל ממשולש שאורכי ניצביו $4a=a\sqrt{16}$, ו-a, ומכאן בשלושה שלבים להגיע ל-$a\sqrt{19}$. באותו אופן, משתמשים בשני ניצבים: 5a ו-2a לקבלת $a\sqrt{29}$.

למציאת החלקים ה-$\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{5}}$ וכו' של קטע נתון a, רושמים את הקטעים המבוקשים בצורה זו: $\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{3}}{3},\frac{a\sqrt{5}}{5}$ וכו'. את הקטעים $a\sqrt{2},a\sqrt{3},a\sqrt{5}...$ ניתן לקבל בעזרת ה"מכונה". את החלק ה-n – י' של כל קטע ניתן לקבל באחת מהדרכים שהוצגו בשני מאמרים קודמים[4,3] או באמצעות משפט חוצה-זווית או באמצעות משפט טלס, בעניין קטעים מקבילים החוצים שוקי זווית.



ציור מס' 13

להלן מספר משימות המבוססות על בניות אלו.

1.1. לבנות ריבוע ששטחו גדול פי 5 משטחו של ריבוע נתון.

1.2. לבנות ריבוע ששטחו 1/3 משטחו של ריבוע נתון.

1.3. יש לבנות ריבוע כאשר נתון אורך הישר a, המחבר את קודקוד הריבוע לאמצע הצלע הנגדית שלו (ציור מס' 13).

בניות שונות של קטע שאורכו מחושב לפי נוסחה F(a,b,c,...) ו- a,b,c,... קטעים נתונים, מופיעה במאמר קודם*. מכלל הבניות המופיעות בו נציין את הבנייה של קטע x שאורכו $\sqrt{a \cdot b}$. הבנייה מבוססת על בניית חצי-מעגל שקוטרו a+b, ובניין אנך לקוטר בנקודת החיבור בין שני הקטעים. גודלו של האנך הוא הקטע המבוקש (הגובה ליתר הוא הממוצע ההנדסי של היטלי הניצבים).

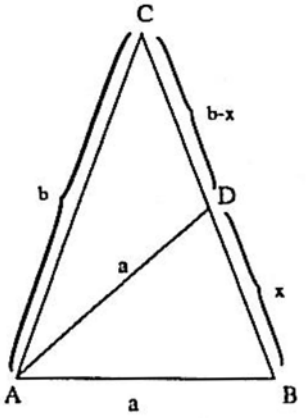
על בנייה זו מבוססות שתי הבניות המובאות להלן (ללא ניתוח הבנייה).

1.4. לבנות ריבוע ששטחו שווה לשטח מלבן נתון.

1.5. לבנות ריבוע ששטחו שווה לשטח משולש נתון.

2. בניית קטעים $\frac{a^2}{b}$ ו- $\frac{b^2 - a^2}{b}$ על-פי הקטעים a ו-b (b>a)

תיאור הבנייה וניתוחה



ציור מס' 14

מקצות הקטע AB=a חגים קשתות באורך b ומקבלים משולש שווה-שוקיים ABC (CA=CB=b) (ציור מס' 14).

מהנקודה A חגים קשת באורך החותכת את הצלע CB בנקודה D.

אפשר להוכיח בנקל כי $\Delta CAB \sim \Delta ADB$

מדמיון המשולשים נקבל: $\frac{x}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b}$

בהתאמה הקטע CD יהיה: $CD = b - x = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}$

ד. הדגמה להוכחת אי-שוויונים אלגבריים באמצעות בנייה הנדסית

הנושא בחלקו הוצג בשני מאמרים קודמים*, כהדגמה לשילוב תחומים במתמטיקה וכהבלטה, שהדרך הגיאומטרית לעיתים פשוטה יותר להוכחת אי-שוויונים אלגבריים.

נדגים את הוכחת מערכת אי-השוויונים שלהלן באמצעות הגדלים החיוביים a ו-b.

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

תיאור הבנייה והוכחה:

על קו ישר ℓ נסמן את הנקודה O ומימין לה את הנקודות A ו-B, באופן ש-OA=a, OB=b ו-b>a (ציור מס' 15).

נסמן ב-S את אמצע הקטע AB. נבטא את אורכו של הקטע OS באמצעות a ו-b,

$$OS = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

על קטע AB, כעל קוטר, נבנה מעגל ונעביר לו את המשיקים OP ו-OQ היוצאים מנקודה O (P ו-Q נקודות ההשקה). לפי המשפט: "המשיק והחותך יוצאים מאותה נקודה", נקבל,

$$OP^2 = OA \cdot OB = ab \Rightarrow OP = \sqrt{ab} \qquad (2)$$

נעביר את המיתר PQ החותך את הישר ℓ בנקודה C ($\measuredangle C = 90^\circ$). המשולש OPS הוא ישר-זווית ו-PC אנך ליתר שלו, לפיכך מקבילים: $OP^2 = OC \cdot OS$

ובאמצעות קשרים 1 ו-2 מקבלים:

$$ab = OC \cdot \frac{a+b}{2} \Rightarrow OC = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \qquad (3)$$

נבנה רדיוס BE המאונך ל-AB, ובעזרת משפט פיתגורס והקטעים הידועים נבטא את אורכו של OE:

$$OE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow OE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (4)$$

(5) OP<OS (יתר וניצב במשולש ישר-זווית).

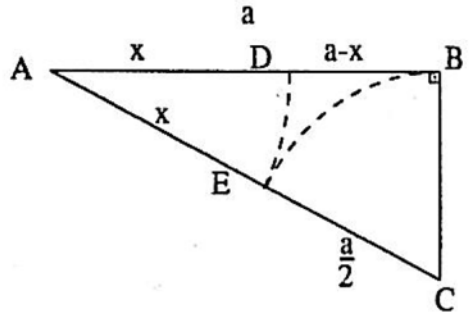
(6) OS<OP (יתר וניצב במשולש ישר-זווית).

(7) OS<OE (יתר וניצב במשולש ישר-זווית).

משלושת האי-שוויונים האחרונים (5-7) נקבל:

(8) OC<OP<OS<OE

נציב למערכת אי-השוויונים הזו את הערכים של שוויונים (1-4) ונקבל את אי-השוויון המבוקש, $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



ציור מס' 16

ה. חלוקת זהב ושברים משולבים

1. חלוקת זהב של קטע

נתון AB שאורכו a מחולק לשני חלקים שאורכיהם x ו-a-x, המקיימים יחס זה: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

(ציור מס' 16)

הפתרון ובנייתו

על-פי היחס הנ"ל מקבלים את המשוואה הריבועית $x^2 + ax - a^2 = 0$ ערכו של היחס,

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ נקרא יחס זהב.

לקבלת הקטע x נבנה קטע BC מאונך ל-AB

שאורכו $\frac{a}{2}$.

אורכו של היתר AC במשולש ABC הוא $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

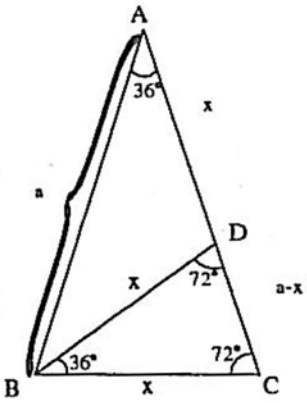
בעזרת מחוגה נחוג מהנקודה C קשת שאורכה $\frac{a}{2}$ ונקבל את הנקודה E. חישוב פשוט מוכיח, שאורכו של הקטע AE הוא הקטע x הדרוש,

$$AE = AC - EC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = \frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

בעזרת מחוגה נחוג מהנקודה A את הקשת AE ונקבל את הנקודה D , נקודה זו מקיימת את יחס החלוקה הדרוש. חלוקה כזאת מכונה "חלוקת זהב"[6].

התיאוריה של פרופורציה בין גדלים שונים הייתה מוכרת ביוון הקדומה. בכתביו של אוקלידס מוזכר יחס הזהב על-סמך עבודותיהם של יוונים שקדמו לו. הוא השתמש ביחס הזהב לבניית מצולעים בעלי 5 צלעות, 10 צלעות, 12 צלעות, 20 צלעות[6].

את השם "יחס זהב" נתן ליאונרדו דה-וינצ'י. במאות ה-15 וה-16 השתמשו ביחס הזהב בתחום האמנות והאדריכלות. גם היום מוצרים רבים בעלי פאות בצורת מלבן, ממדי המלבן קרובים ליחס הזהב (ספרים, מחברות, תבניות אפייה וכד'[7]). "יחס הזהב" מכונה גם יחס הרמוני.



ציור מס' 17

2. בניית משולש ש"ש בעל שוק באורך a חווית ראש בת 36°

ניתוח הבנייה

מעבירים את חוצה-זווית הבסיס B ומתקבל משולש שווה-שוקיים BCD (ציור מס' 17), הדומה למשולש ABC. נסמן את BC ב-x.

מדמיון המשולשים מתקבל הקשר: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$.

על-ידי חילוץ x נקבל את ערכו: $x = \frac{a\sqrt{5}-a}{2} = a\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$

ניתן לבנות בקלות את האורך של x (תיאור הבנייה בתרגיל ה.1)
ולכן בניית המשולש הדרוש היא פשוטה ביותר.

3. שברים רצופים או שברים משולבים בהקשר ליחס הזהב

מבוא:

יחס בין שני מספרים אפשר לבטא בצורה מסוימת הנקראת "שבר רצופי" או "שבר משולב".
נתבונן בדוגמה:

$$\frac{61}{27} = 2+\frac{7}{27} = 2+\frac{7}{\frac{27}{7}} = 2+\frac{1}{3+\frac{6}{7}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{6}}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}$$

הצורה

$2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}$ נקראת :"שבר רצופי" או "שבר משולב".

קיימת הוכחה מתמטית, שיחס בין שני מספרים שלמים (בדוגמה שלעיל היחס בין המספרים 61 ו-27) אפשר תמיד לבטא בצורה של שבר משולש, וכי קיימת צורת ביטוי יחידה[6,5].

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots q_n + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

לשון אחר, כל מספר רציונלי אפשר לבטא בצורה זו אם n הוא מספר סופי, וכך גם קבוצת המספרים $q_1, q_2, \ldots q_n$.

אם נרצה לבטא מספר אי-רציונלי בצורה של שבר משולב, התהליך לקבלת המספר q_i הוא אינסופי והשבר המשולב מורכב מאין סוף שברים.

נתבונן בדוגמא של $\sqrt{2}$, הידוע כמספר אי-רציונלי:

$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{x_1}$ נחלץ את x_1 ונקבל, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ נרשום את x_1 בצורה זו:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$$

ונקבל: $x_2 = \frac{1}{x_1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

כלומר $x_1=x_2$ וכך ניתן להמשיך ולקבל

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}}$$

ולפיכך נכון לבטא את $\sqrt{2}$ בצורה זו:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}} \qquad (1)$$

נוכיח את שוויון (1) כך:

תחילה נסמן $x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}$

נקבל $x = \frac{1}{2+x}$ או את המשוואה הריבועית $x^2+2x-1=0$ שפתרונה החיובי הוא $x = \sqrt{2}-1$, כלומר, $1+x=\sqrt{2}$ מ.ש.ל. נחשב את ערכו של השבר המשולב האינסופי

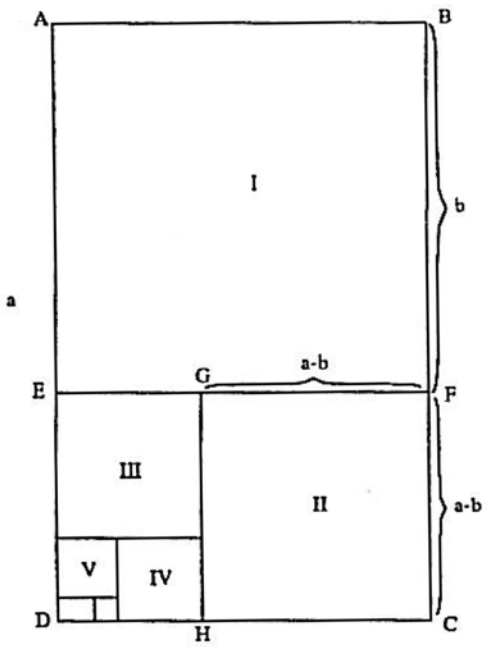
$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

למטרה זו נסמן $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$, אזי $x = 1 + \frac{1}{x}$ ומכאן, הפתרון החיובי של המשוואה

הריבועית $x^2-x-1=0$ הוא $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, כלומר $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$ הוא יחס הזהב.

ניתן לתאר בדרך גיאומטרית את יחס הזהב הנתון בצורה של שבר משולב אינסופי בעזרת מלבן זהב (היחס בין אורכי צלעותיו הוא יחס הזהב), ששטחו שווה לסכום של אינסוף ריבועים החסומים בו.

בציור מס' 18, מתואר מלבן ABCD. מידות צלעותיו a ו-b הן: $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ו-$b=1$.



ציור מס' 18

נעביר במלבן את הקו EF כך שיתקבל ריבוע I (ABFE) שצלעו b=1. המלבן שנותר EFCD הוא בעל הצלעות האלה:

$b=1$ ו-$a-b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ אם נחשב את

היחס בין צלעותיו $\frac{b}{a-b}$ נקבל $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, כלומר, שוב התקבל מלבן זהב.

במלבן זה נחסום את ריבוע II (ריבוע GFCH) שצלעו a-b.

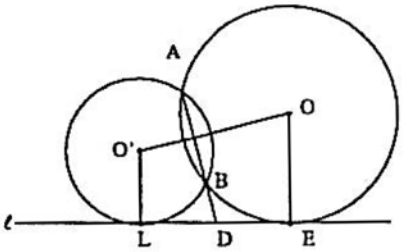
נותר שוב המלבן EGHD, שהוא מלבן זהב. נחסום את ריבוע III, וכך נמשיך בבניית ריבועים חסומים. מתקבלת סידרה אינסופית של ריבועים חסומים במלבן המקורי. סכום שטחי הריבועים שווה לשטח המלבן.

$$S\,ABCD=a\cdot b=1\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ו. יישומי בניות

1. בניית מעגל העובר דרך שתי נקודות ומשיק לישר

דרך הנקודות A ו-B יש להעביר מעגל באופן שישיק לישר נתון ℓ (ציור מס' 19).



ציור מס' 19

ניתוח ותיאור הבנייה

נניח שמעגל, שמרכזו O, עובר דרך שתי הנקודות A ו-B ומשיק לישר ℓ בנקודה E.

לביצוע המשימה נמצא את אורך המשיק DE. D היא נקודת החיתוך של המשך הישר B והישר הנתון ℓ. נסמן: DE=x, AD=a ו-BD=b.

לפי המשפט: "מכפלת החותך למעגל בחלקו החיצוני – שווה לריבוע אורך המשיק", נקבל:

$$x^2 = a \cdot b \text{ או } x^2 = \pm\sqrt{a}b$$

(את הקטע $x = \sqrt{a}b$ יודעים לבנות).

בסימנים ± מסמנים שני פתרונות.

הפתרון שבו הסימן (+) הוא הפיתרון לימין הנקודה D (מעגל שמרכזו O) והפתרון שבו הסימן (-) הוא הפתרון לשמאל

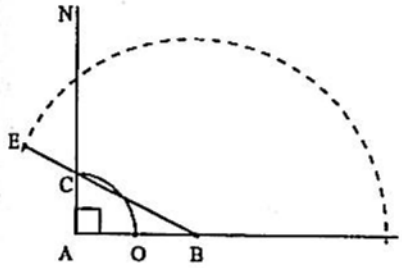
הנקודה D (מעגל שמרכזו O', $LD^2 = AD \cdot BD$).

הפתרון בדרך האלגברית קל יותר מזה שבדרך הגיאומטרית.

2. מציאת נקודה המקיימת קשר אלגברי

על המשך קטע אופקי AB יש למצוא מימין לנקודה B, נקודה M, המקיימת את הקשר האלגברי

$BM^2 = AM \cdot AB$ (ציור מס' 20).



ציור מס' 20

ניתוח ותיאור הבנייה

נסמן: BM=x, AB=a ונקבל את המשוואה: $x^2=a(x+a)$ או $x^2-ax-a^2=0$. למשוואה זו קיימים שני פתרונות ממשיים, נציג אותם דרכים:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \qquad (1)$$

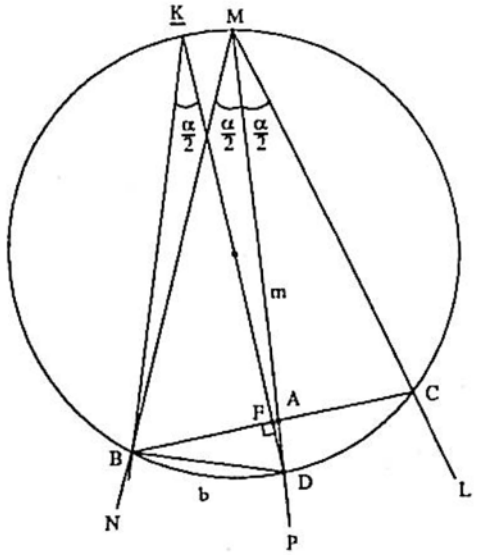
$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm a\sqrt{5}) \qquad (2)$$

(הפתרון שבו הסימן (+) מתקיים אם הנקודה M נמצאת מימין לנקודה B)

בהתאם לצורה (1) נבנה בנקודה A אנך AN לישר AB. מהנקודה A נחוג מעגל בקשת $AO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ ונקבל את הנקודה C על האנך AN. לפי משפט פיתגורס:

$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. נאריך את הקטע BC בתוספת $EC = \frac{a}{2}$. על-כן אורכו של EB יהיה x_1. מהנקודה B נחוג קשת ברדיוס BE ונקבל את הנקודה M.

לפי צורה (2) נבנה את הקטע $a\sqrt{5}$ (בעזרת "המכונה" לבניית שורשים של מספרים שלמים, סעיף ג'1 במאמר). נאריך את הקטע ב-a ונחצה אותו. הקטע שיתקבל הוא המרחק BM.



ציור מס' 21

3. בניית קטע בתוך שוקי זווית

נתונה זווית ונקודה על חוצה-הזווית שלה. יש להעביר ישר דרך נקודה זו כך, שנקודות החיתוך שלו ושוקי הזווית יקצו קטע באורך נתון (בעיית פפה).
תהא הזווית LMN (קטנה מ-180°), ונקודה A על חוצה הזווית שלה MP (ציור מס' 21).

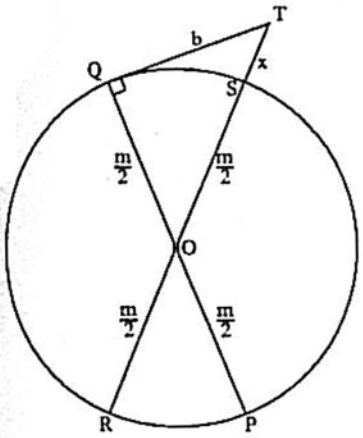
ניתוח הבעיה

נניח שנפתרה הבעיה. נסמן את הזווית הנתונה $\measuredangle LMN=\alpha$ ואת הקטע המבוקש $BC=a$. נבנה את המעגל החוסם את משולש MBC. נתונה הנקודה A, והנקודה D היא נקודת החיתוך של חוצה הזווית MP והמעגל החוסם.
נחבר את נקודות B ו-D. על-סמך הנתון: זוויות היקפיות נשענות על אותה הקשת, מתקבלת המשוואה:

$$\measuredangle DBC=\measuredangle BMD=\measuredangle DMC=\frac{\alpha}{2}$$

משווין הזוויות הנ"ל מקבלים: משולשים BMD ו-BAD דומים.
מדמיון המשולשים נובע הקשר: $BD^2=AD\cdot DM$ נסמן: $MA=m$ (נתון מקום הנקודה A), $BD=b$ ו-$AD=x$, נציב זאת לפי קשר הדמיון ונקבל $b^2=(x+m)x$.
לביצוע משימת הבנייה יש למצוא את האורך של הקטע AD (כלומר את x) על-פי מציאת אורכם של הקטעים m ו-b.
נעביר את הקוטר DK החותך את הקטע הדרוש BC בנקודה F. גם משולשים KBD ו-BFD דומים, וזווית BFD היא בת 90°, ולכן $BF=FC=\frac{a}{2}$ (קוטר מאונך למיתר – חוצה אותו).

כיוון שבמשולש ישר-הזווית BFD ידוע $BF=\frac{a}{2}$ ו-$\measuredangle FBD=\frac{\alpha}{2}$ ניתן לבנות אותו ולקבל את האורך b.



ציור מס' 22

תיאור שלבי הבנייה

1. בונים את אורך הקטע b כמתואר בסוף הקטע הקודם.
2. בונים מעגל שקוטרו QP=m (ציור מס' 22).
3. בונים משיק למעגל בנקודה Q ומקצים עליו את הקטע QT=b.
4. מחברים את הנקודה T עם מרכז המעגל O. ישר זה חותך את המעגל בנקודה S, והמשכו חותך את המעגל בנקודה R.
5. לפי המשפט הקושר את אורך המשיק עם החותך וחלקו החיצוני מקבלים את אורך הקטע TS: x(TR=x+m (למה?)

חוזרים לציור הקודם מבצעים את השלבים באים:

1. מהנקודה A, מקצים על המשך חוצה-הזווית את הקטע x (לפי ציור מס' 22) ומקבלים את הנקודה D.
2. מהנקודה D חגים קשת ברדיוס b, החותכת את השוק של הזווית המקורית MN בנקודה B.
3. מהנקודה B חגים קשת ברדיוס a, החותכת את השוק ML בנקודה C – הקצה האחר של הקטע BC הוא הדרוש.

סיכום

המאמר הוא המשך למאמרים קודמים העוסקים בנושא בניות הנדסיות. ייחודו של המאמר מתבטא בהצגת מגוון משימות עשיר. במשימות משלבות משפטי יסוד גיאומטריים עם בניות הנדסיות פשוטות, ומפעילות דרכי חשיבה שונות. הסוגיות שהוצגו במאמר הן: מכונה לבניית שורשים רבועיים של מספרים שלמים וקטעים נתונים; בנייה הנדסית פשוטה להוכחת מערכת אי-שוויונים אלגבריים, והמושג יחס זהב וזיקתו לשבר משולב.

מראי מקומות

1. סטופל, מ' ואוקסמן, ר' (1995). "בניות הנדסיות בעזרת סרגל", במסגרת הכנס הארצי של "האגודה לקידום החינוך המתמטי בישראל", **בוליסין הכנס**, בנייני האומה, ירושלים.
2. סטופל, מ' ואוקסמן, ר' (1996). "בניות גיאומטריות על-ידי סרגל בלבד", **עלון על"ה, 18.**
3. סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (1997). "שילוב תחומים בפתרון בעיות מתמטיות", **שנתון אמי"ת**, רשת מוסדות חינוך בישראל.
4. אוקסמן, ל' (1997). "יישום בניות הנדסיות בתחומי אלגברה", **שנתון שאנן – המכללה הדתית לחינוך**, חיפה.
5. אליפות בתי-הספר במתמטיקה, תשנ"ו, הפקולטה למתמטיקה, היחידה לנוער שוחר מדע וטכנולוגיה, הטכניון – המכון הטכנולוגי לישראל, חיפה.
6. Miller, W. & Clason, R, (1994). "Golden Triangles, and Pentagorams", **The Mathematics Teacher, 87**, 5.
7. בלס, ג' (1990). "חתך זהב באומנות", **מחשבות, 59.**
8. לובה, ע' (1996). "חתך זהב", **עלון על"ה, 18.**