אליפסה, פרבולה והיפרבולה, כחתכים קוניים

תקציר

במסגרת העשרת הלימודים, בהנדסה אנליטית ובהנדסת המרחב, מובא במאמר זה, המושג "חתכים קוניים", הנוצרים מחיתוך מישורים עם מעטפת חרוט מעגלי אינסופי. נתנה הוכחה הנדסית מקורית לצורת העקומות המקיפות את מישורי החיתוך והמהוות מקומות גיאומטריים מוכרים מלימודי הנדסה אנליטית.

מבוא

בשנים האחרונות, קיבלו לימודי הנדסת המרחב תנופה מסוימת עם שילוב הנושא: "וקטורים" בתוכנית הלימודים של הרמה המוגברת, כפי שמופיע בספרי הלימוד המתאימים[1,2]. בעיות רבות בתחום הנדסת מרחב נפתרות בקלות על-ידי שימוש בווקטורים ובכך מבליטים את יופיה של המתמטיקה. יחד עם זאת, הנדסת המרחב לא תפסה עדיין את מקומה ואת ההיקף הראוי בו היא צריכה להילמד. הסיבה העיקרית לכך, היא, הטענה שתלמידים רבים מתקשים בראייה מרחבית ועל-כן אינם מסוגלים להתגבר על חלק ניכר של ההוכחות והתרגילים שבתחום. הטענה נכונה, אך היא למעשה "בריחה" מהתמודדות ומהאתגר שמאחוריה. המחשה באמצעים שונים ותרגול רב, יש בהם לשפר ולפתח, במידה משמעותית, את יכולת הראייה המרחבית כבתחומי לימוד אחרים בהם פותחו כישורי התלמיד: אמנויות היצירה (ציור, פיסול, מוסיקה), כתיבה יצירתית, ספורט וכד'. סקירה מקיפה על מחקרים הקשורים באימון ובראייה מרחבית, מופיע במאמר[3].

ראייה מרחבית מפותחת, חשובה לכל אלו המתכננים ללמוד או לעסוק בתחומי ההנדסה (בניין, ארכיטקטורה, מכונות, אווירונאוטיקה), אמנות, ואף לפרט, המעוניין לעצב את המרחב שבסביבתו הקרובה.

מקובל, שהטיפול במרחב מסוים נעשה על-ידי חתכים שונים שלו הממחישים ומבליטים פרטים חשובים המאפיינים אותו.

כדוגמה, ניתן להביא תעשיין מזון, שעסק ביצור גבינה צהובה בתבנית שצורתה חרוט. בבואו לשווק את הגבינה, הוא ביצע בה, בעזרת סכין, חתכים שונים והתקבלו מישורי חיתוך בעלי צורות גיאומטריות שונות.

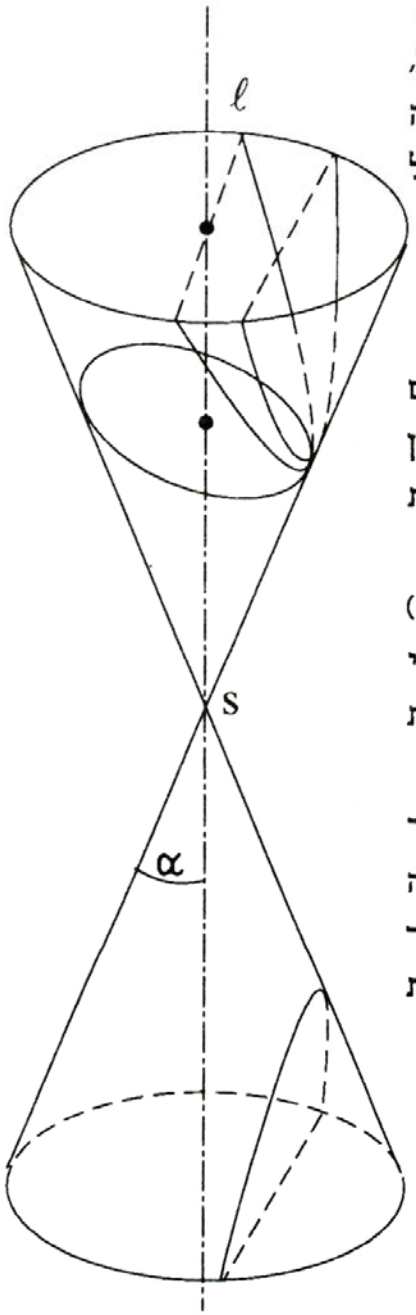
תארנים: *חתכים קוניים, מישורי חיתוך, מקומות גיאומטריים.*

החתכים השונים המתקבלים בחרוט מהווים את הבסיס לנושא: "חתכים קוניים", שהוא אחד מהפרקים בהנדסה אנליטית; שחוקר, עושה ומבליט את התכונות של המקומות ההנדסיים: אליפסה, היפרבולה ופרבולה.

"חתכים קוניים", הוא נושא המשלב וקושר הנדסת מרחב והנדסה אנליטית ונותן לתלמידים מבט רחב על שני התחומים וזאת ללא חריגה מתוכנית הלימודים, אלא להבנת המושג, להעשרה והעמקה נוספת.

במאמר זה, ניתנת הגדרה של חרוט מעגלי אינסופי, והוכחה הנדסית פשוטה לצורות הגיאומטריות של עקומות הנוצרות מחיתוך מישורים שונים עם מעטפת החרוט. ההוכחה בדרך אנליטית מסובכת יותר ומחייבת שליטה בהנדסה אנליטית מרחבית.

יש לציין, שהנושא אינו מופיע בספרי הלימוד של תלמידי התיכון, להוציא אזכור באחד מהספרים הישנים[4], אך מופיע הספרים ברמה אקדמית[6,5]. הוכחה בעזרת וקטורים, לצורות הגיאומטריות של חתכי החרוט ניתן למצוא במאמר 7.



ציור מס' 1

הגדרת חרוט מעגלי אינסופי

נתונים שני ישרים הנחתכים בנקודה מסוימת, הקבועה במקום (קדקוד). שומרים על ישר אחד קבוע והשני מסתובב סביבו, באופן שהקדקוד נותר במקומו והזווית בין הישרים נשארת קבועה בעת הסיבוב.

כתוצאה מסיבוב הישר, מתקבל משטח **חרוטי** (מעטפת החרוט) **מעגלי אינסופי**. לישר הקבוע קוראים **ציר החרוט** ולכל מצבי הישר השני קוראים **הקווים היוצרים של החרוט** כשנקודת החיתוך שלהם נקראת **קדקוד**.

משטח החרוט מורכב משני חלקים המחוברים זה לזה בקדקוד החרוט. נסמן ב-α את הזווית בין ציר החרוט לקו היוצר, כנראה בציור מס' 1. נחתוך מחרוט זה מספר מישורים, שאינם עוברים דרך הקדקוד. הזווית β, שבין מישור החיתוך וציר החרוט קובעת את צורת החתך בהתאם למשפט הבא.

משפט

1. אם $\beta=\frac{\pi}{2}$ – צורת החתך מעגל.
2. אם $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ – צורת החתך אליפסה.

3. אם $\alpha > \beta$ – צורת החתך היפרבולה.
4. אם $\alpha = \beta$ – צורת החתך פרבולה.

בספרים העוסקים בהיסטוריה של התפתחות המתמטיקה, מצוין שמשפט זה היה ידוע כבר בסוף המאה ה-15, אך ההוכחה שלו ניתנה לראשונה בתקופה מאוחרת יותר (מתי?).

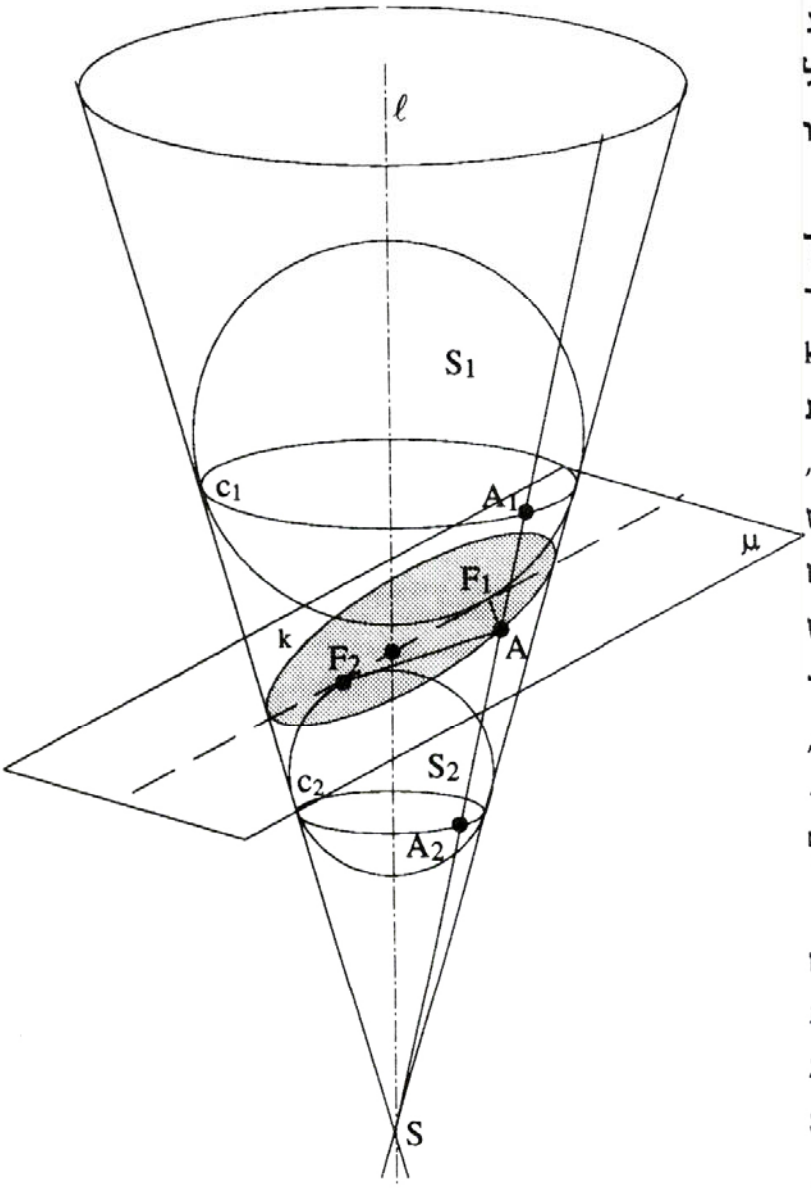
החתכים השונים מתוארים בציור מס' 1.

(סימון: נקודות מסומנות באותיות גדולות, ישרים באותיות קטנות ומישורים באותיות יווניות).

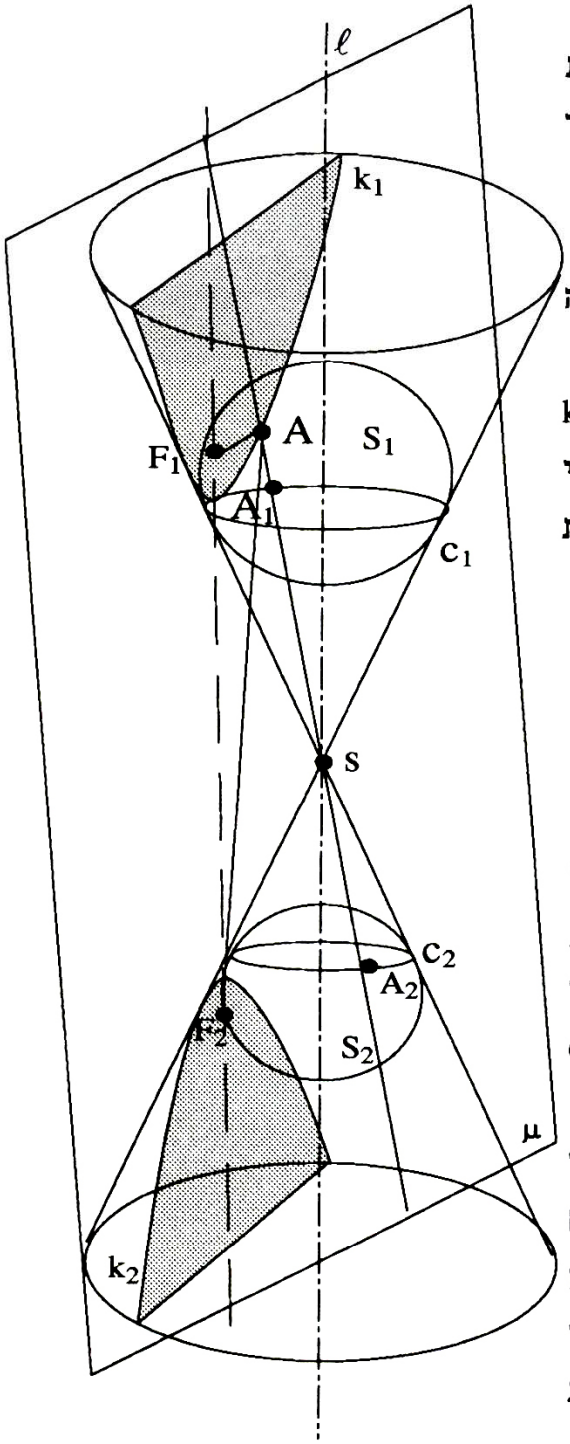
הוכחה

1. **במקרה הראשון** המשפט נובע מההגדרה של חרוט כל נקודה על קו היצר מתארת מעגל שמישורו מאונך לציר הסיבוב.
2. **במקרה השני** מישור μ חותך את הקווים היוצרים מצד אחד של הקדקוד. נוכיח שעקום k החיתוך של המישור עם מעטפת החרוט, הוא אליפסה. למטרה זו, נבצע בניית עזר. נחסום בחרוט שני כדורים S_1 ו-S_2, המשיקים לקווים היוצרים של החרוט ולמישור החיתוך μ; כדור אחד מעל המישור וכדור אחד מתחתיו, כנראה בציור מס' 2. נסמן ב-F_1 וב-F_2 את נקודות ההשקה של הכדורים עם מישור החיתוך.

נבחר נקודה כלשהי A על העקום k ונוכיח שהסכום AF_1+AF_2 הוא גודל קבוע שאינו תלוי בבחירת הנקודה. נעביר את הקו היוצר SA אשר משיק למעטפות הכדורים בנקודות A_1 ו-A_2, הנמצאות על המישורים המעגליים, c_1 ו-c_2 בהתאמה, הניצבים לציר החרוט.



ציור מס' 2



ציור מס' 3

AF_1 ו-AA_1 הם שני משיקים היוצאים מנקודה אחת לאותו כדור ועל-כן הם שווים זה לזה. אותו הדבר נכון לגבי AF_2 ו-AA_2 ביחס לכדור השני.

מכאן נובע: $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$.

מאחר שהמרחק A_1A_2 – המרחק בין נקודות ההשקה הנמצאות על המעגלים c_1 ו-c_2, הוא קבוע לכל הקווים היוצרים, הרי שצורת העקום k היא אליפסה בהתאם להגדרתה כמקום הגיאומטרי של נקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא גודל קבוע.

3. **במקרה השלישי,** המישור μ חותך שני חלקים נפרדים ממעטפת החרוט ומתקבלות שתי עקומות חיתוך k_1 ו-k_2, שיש להוכיח שהן שני הענפים של היפרבולה. נבצע בניית עזר: נחסום שני כדורים S_1 ו- S_2 המשיקים למעטפת החרוט, למישור μ ונמצאים משני צדי קדקוד החרוט (ציור מס' 3). כבמקרה 2, נסמן את נקודות ההשקה F_1 ו-F_2 של הכדורים עם מישורי החיתוך והמעגליים ההשקה c_1 ו-c_2 בהתאמה עם מעטפת החרוט.

נבחר נקודה כלשהי A על אחת העקומות (בציור מס' 3 על העקומה k_1) ונוכיח שההפרש $|AF_2 - AF_1|$ הוא גודל קבוע שמשמעותו שהתקבלה היפרבולה בהתאם להגדרתה: היפרבולה היא מקום גיאומטרי של נקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא גודל קבוע.

נעביר את הקו היוצר SA ונסמן ב-A_1 ו-A_2 את נקודות החיתוך עם המעגלים c_1 ו-c_2 בהתאמה.

גם הפעם כבמקרה 2 קל להראות ש: $AF_2 = AA_2$, $AF_1 = AA_1$ (משיקים לכדור היוצאים מאותה נקודה) ולכן:

קבוע $= AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$, מ.ש.ל.

4. **במקרה הרביעי** המישור μ מקביל לאחד מקווי היוצר של החרוט ולכן חותך רק חלק אחד ממנו. נוכח שעקום החיתוך k הוא פרבולה.

לשם כך, נחסום כדור משיק למעטפת החרוט ולמישור μ (ציור מס' 4). נסמן ב-F את נקודת ההשקה של הכדור למישור μ, נסמן ב-c את מעגל ההשקה של הכדור למעטפת החרוט,

ונסמן ב-γ את המישור בו נמצא המעגל c, מישור הניצב לציר החרוט ושגם אותו חותך המישור μ. הישר b הוא ישר החיתוך בין המישורים μ ו-γ.

נבחר נקודה כלשהי A על העקומה k ונעביר דרכה את הקו היוצר SA. כדי שצורת העקום היא פרבולה, יש להוכיח שהמרחק AF שווה למרחק הנקודה A מישר קבוע במישור μ. נוכיח שישר זה הוא b.

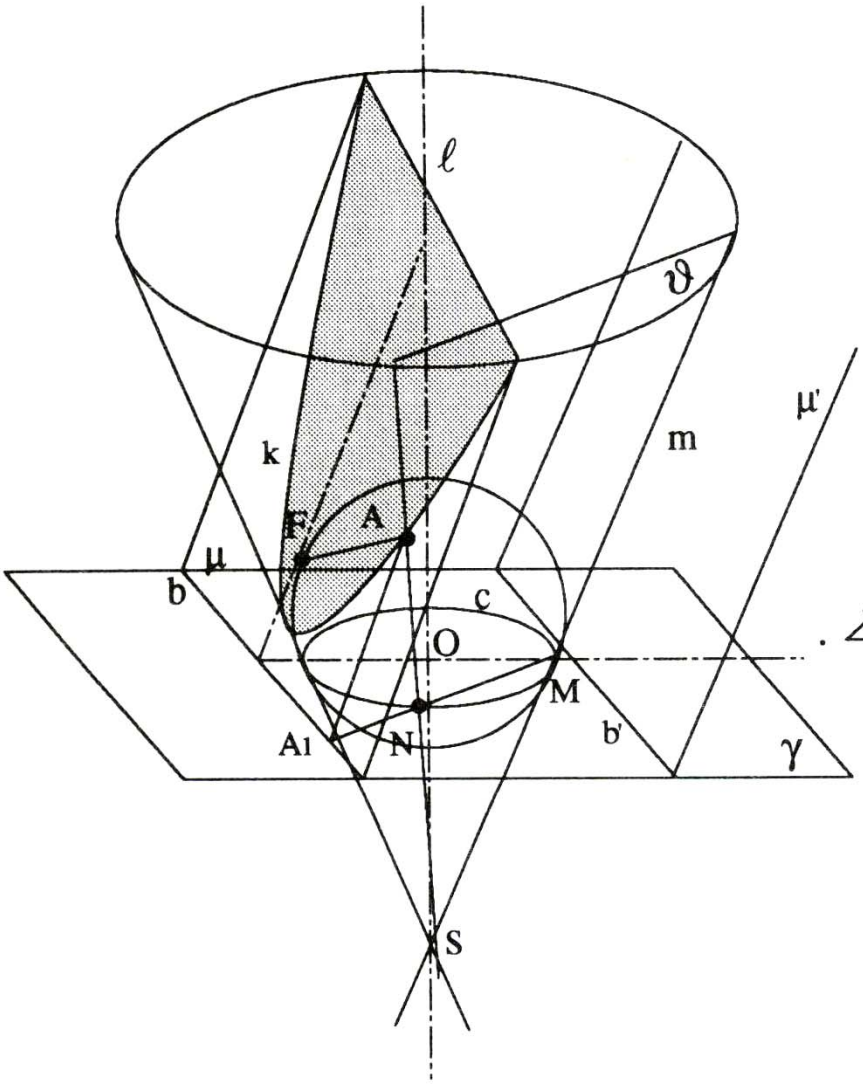
ההוכחה מורכבת משלושה שלבים:

שלב א'

נסמן ב-m את הקו היוצר המקביל למישור μ. דרך m נעביר את המישור μ' המקביל למישור μ. מישור זה, חותך את המישור γ בישר b' המקביל לישר b (שני מישורים מקבילים החותכים מישור שלישי). נסמן ב-M את נקודת ההשקה של הישר b' עם המעגל c.

שלב ב'

נסמן ב-N את נקודת החיתוך של הקו היוצר AS עם המעגל c.



ציור מס' 4

(1) $AF=AN$

(שני משיקים לכדור היוצאים מנקודה אחת).

נבנה מישור ϑ העובר דרך שני הקווים היוצרים m ו-AS. מישור זה (ϑ), חותך את המישור μ כשישר החיתוך שלהם AA_1 (ציור מס' 4), מקביל לישר m ולכן,

(2) $\measuredangle AA_1N = \measuredangle SMN$.

משולש SMN הוא שווה שוקיים, ולכן

(3) $\measuredangle ANA_1 = \measuredangle SNM = \measuredangle SMN$.

מקשרים (2) ו-(3) נובע, כי

(4) $\measuredangle AA_1N = \measuredangle ANA_1$

ולכן

(5) $AA_1 = AN$

יחד עם קשר (1) מקבלים $AF = AA_1$.

שלב ג'

נותר להוכיח ש-AA_1 הוא המרחק מנקודה A לישר b, או במלים אחרות, יש להוכיח כי $AA_1 \perp b$.

ישר b' הוא משיק למעגל c במישור γ לכן $b'OM$ (נקודה O מרכז המעגל c). הישר b' מאונך גם לציר ℓ של החרוט, אזי הוא מאונך גם לישר m. קודם הוכחנו ש-$b \parallel b'$ ו-$AA_1 \parallel m$. מזה נובע כי $AA_1 \perp b$ מ.ש.ל.

סיכום

במאמר זה הוצג המושג "חתכים קוניים" וניתנה הוכחה הנדסית לצורתם הגיאומטריות של העקומים המקיפים את החתכים, תוך יצירת קשר בין החומר הנלמד בהנדסה אנליטית לזה של הנדסת מרחב. ניתן להעמיק נושא זה על-ידי השלמתו בהוכחה אנליטית וכן טיפול במישורי חיתוך של גופים הנדסיים אחרים.

מראי מקומות

1. גורן, ב' (1993). **וקטורים (4 ו-5 י"ל)**. תל-אביב, הוצאת המחבר.
2. טור, י' (1992). **וקטורים, מטריצות ומספרים מורכבים**. עומר, הוצאה לאור שרה בץ.
3. בן-חיים, ד' (תשמ"ז). ניתוח כושרם של תלמידים ל"ראות" תיבות הבנויות מקוביות קטנות והשפעת ההוראה עליהם, **עלון למורי המתמטיקה, א**(1).
4. גינצבורג, א' (1964). **גיאומטריה אנליטית**, מהדורה שלישית, חיפה, הוצאת 20 בע"מ, עמודים 138-139; 207-217.
5. Courant R. & Robbins H.(1948), **What is Mathematics?,** (an elamentary approach to ideas and methods), Oxford Univ. Press, New York.
6. Pontrjagin L.S. (1987), **Method Coordinat,** Publishing house, "Nauka", Moskva, (in Russian).
7. קורן, מ' (1990). חתכי החרוט, **על"ה, 7**, עמ' 59.