אנה פרוסק

בניית קשרים אינטגרטיביים בתהליך הוראת המתמטיקה באמצעות פתרון בעיה אחת בדרכים שונות

לעיתים הרבה יותר יעיל לפתור בעיה אחת בשלוש דרכים שונות מאשר לפתור שלוש או ארבע בעיות שונות. כי כאשר פותרים בעיה אחת בדרכים שונות אפשר לגלות על ידי השוואה מה היא הדרך הקצרה והיעילה יותר. ועל-ידי כך נצבר הניסיון.

(Sawyer, 1966, p. 224)

תקציר

המאמר מציג שיטה המאפשרת לתלמידים ללמוד מתמטיקה כמקצוע הוליסטי באמצעות פתרון בעיה אחת בדרכים שונות. בגישה זו ניתנות דוגמאות רבות לבעיות מתמטיות ומוצגות דרכים שונות לפתרונותיהן, הקשורות לתחום מתמטי אחד או לענפי מתמטיקה שונים. מתוארת המתודיקה של גישה המפתחת יצירתיות בחשיבה המתמטית. המאמר מסביר את השינויים הנדרשים לפי גישה אינטגרטיבית שיש להכניס בהכנה של הסטודנטים המקבלים חינוך פדגוגי בתחום של חינוך מתמטי.

מילות מפתח: *פתרון בעיה בדרכים שונות; מתמטיקה כמקצוע הוליסטי; קשרים אינטגרטיביים; חשיבה מתמטית; יצירתיות מתמטית; הוראת עמיתים.*

מבוא: הרלוונטיות של הנושא לתלמידים ולמורים

מתמטיקה היא תחום רחב והוליסטי הכולל מגוון נושאים. ספרות המחקר העוסקת בהוראת המתמטיקה מדגישה את החשיבות בהכרת התלמידים את הטווח הרחב של הנושאים המרכיבים את מקצוע המתמטיקה ואת הקשרים ביניהם.

נמצא שעיסוק בקשרים בין תחומים מתמטיים בונה בקרב התלמידים ראיה של מתמטיקה כמדע המשלב מספר תחומים ולא כאוסף של נושאים בודדים (House & Coxford, 1995). כדי להבין לעומק בעיה ספציפית, על התלמיד לחבר בין תחומים שונים במתמטיקה (Borasi, 1992; Stupel, & Ben-Chaim, 2013), וזהו אחד העקרונות הבסיסיים בחינוך המתמטי המודגש בסטנדרטים של ה-NCTM (2000).

החיפוש של תלמידים אחר דרכים שונות לפתרון בעיה אחת הוא אחת הדרכים להשיג מטרה זו. הדיון בריבוי פתרונות לבעיה אחת הוא נושא שמעסיק את קהילת העוסקים בחינוך מתמטי (למשל, אלבום-כהן וקופר, 2015; כץ וכץ, 2013; לייקין, 2006). מקובל לקשור בין היכולת לפתור בעיה בכמה דרכים שונות ליצירתיות מתמטית של תלמידים (למשל Ervynck, 1991; Leikin, 2009; Silver, 1997), שכן יכולת זו מעידה על חשיבה מתבדרת (Kwon, Park, & Park, 2006). סילבר (Silver, 1997) טען כי אפשר לפתח יצירתיות מתמטית בקרב כלל התלמידים (ולא רק אצל תלמידים מחוננים) באמצעות הצגת פעילויות מתמטיות מתאימות. הוא ציין שיצירתיות מתמטית מאופיינת בשלוש תכונות מרכזיות: שטף (יצירת רעיונות מרובים או פתרונות מרובים לבעיה נתונה); גמישות (מציאת פתרונות המבוססים על רעיונות שונים); חדשנות (חקר פתרונות שונים לבעיה ויצירה של פתרון חדש). הוא סבר שעיסוק בבעיות שאפשר לפתור אותן בכמה דרכים, מפתח תכונות אלה. זה קורה כאשר התלמידים מוצאים דרכים חדשות ולא שגרתיות לפתרון בעיה שאפשר לפתור אותה באמצעות אלגוריתמים סטנדרטיים (Sriraman, 2005), ובמהלך הדיון בשיעור הם מנתחים, משווים ומכלילים את המאפיינים הייחודיים של שיטות פתרון למיניהן (Silver, 1997). לייקין (Leikin, 2009) מציעה להעריך יצירתיות מתמטית של תלמידים באמצעות משימות שדורשות פתרון בדרכים שונות, ומציינת שבאמצעות השוואת מרחב הפתרונות האישי (מוגדר כאוסף הפתרונות שתלמיד יוצר בתגובה לבעיה נתונה) למרחב הפתרונות הקולקטיבי (מוגדר כשילוב הפתרונות שיוצרת קבוצה של תלמידים) אפשר להעריך את מידת המקוריות של הפתרונות של כל תלמיד ותלמיד בהתאם לממדי השטף והגמישות.

פיתוח הרגלי פתרון בעיות בדרכים שונות מקדם חשיבה מתמטית ברמות גבוהות, ואפשר להשתמש בפתרונות שונים כדי לקשר ידע בתחומים שונים במתמטיקה וכך לחזק את הידע בכל אחד מתחומים אלה (Leikin & Dinur, 2007).

שונפלד (Schoenfeld, 1988) מציין כי ברוב ספרי הלימוד בארץ, בעיות מתמטיות מאורגנות על פי נושאים מתמטיים שנלמדים בתוכנית הלימודים, לכן תלמידים רבים 'יודעים בדיוק' לאיזה תחום מתמטי הבעיה שייכת, וחושבים שלכל בעיה אפשר למצוא פתרון 'אחד ויחיד'. נוסף על כך, הניסיון מלמד שכאשר פותרים בעיות בדרך אחת בלבד, התלמידים מוגבלים למטרה היחידה – למצוא את התשובה הנכונה, אך במקרה שהם מתבקשים למצוא ריבוי פתרונות לבעיה אחת, הם מנסים למצוא את הפתרון היפה ביותר, המקורי והחסכוני. תהליך זה דורש מהתלמידים להשתמש בעובדות תאורטיות מתמטיות ובשיטות וטכניקות מגוונות, ולנתח אותן מנקודת מבט יישומית ולבחון את מידת התאמתן לסיטואציה המתוארת בבעיה. בדרך זו ירכשו התלמידים ניסיון מתמטי אישי.

הלמידה המשמעותית מראה את הכיוון של יצירת קשרים אינטגרטיביים בתהליך ההוראה כעיקרי בתוכנית לימודי מתמטיקה בבתי ספר, ומדגישה כי אחת הדרכים להשגת מטרה זו היא חיפוש אחר דרכים שונות לפתרון אותה בעיה בידי התלמידים. הרלוונטיות של הנושא מתחזקת מפני שכיום בבחינות הבגרות במתמטיקה בישראל אין הגבלה על השימוש בנושאים מתמטיים בפתרון בעיות, וכל נושא שנלמד יכול לשמש את התלמיד ככלי לפתרון בעיה מכל סוג (למשל, מותר לתלמיד לפתור את הבעיה בנושא "הנדסת המרחב" בעזרת וקטורים, או את הבעיה הגאומטרית בעזרת טריגונומטריה וכדומה). זאת ועוד, הדרישה ללמידה משמעותית חלה לא רק על כיתות התיכון, אלא גם על בתי הספר היסודיים וחטיבות הביניים. לדוגמה, יאקל וקוב (Jackel & Cobb,

1996) ממליצים להשתמש בגישה זו החל מבית הספר היסודי, והם מדגישים את חשיבות הדיון בשאלה מהם פתרונות דומים ומהם פתרונות שונים מבחינה מתמטית. לטענתם, הדיון בשאלה זו בגיל צעיר מעודד חשיבה מתמטית ברמה גבוהה.

אוריינטציה לבניית קשרים אינטגרטיביים בין פרקים שונים בהוראת מתמטיקה של בית הספר נועדה להכניס שינויים בהכנת הסטודנטים הלומדים חינוך מתמטי, כי "טיפוח יצירתיות מתמטית באמצעות משימות שדורשות מהתלמידים לפתור בעיות בדרכים שונות תלוי, במידה רבה, בנכונות המורים" (שריקי, 2015, עמ' 134). מסמך הסטנדרטים של NCTM (2000) מדגיש את תפקידו המיוחד של המורה במציאת משימות מתמטיות מקשרות, אך מציין כי חיפוש אחר בעיות כאלה דורש מהמורים זמן רב ויוזמה מיוחדת. לטענתם של לייקין ועמיתיה (Leikin, Levav-Waynberg, Gurevich, & Mednikov, 2006), יישום ושילוב של פתרון בעיות בדרכים שונות במהלך ההוראה אינו פשוט למורה, ואחת הסיבות לכך היא ש"תמיד קיימת התלבטות 'מה יותר יעיל: לפתור ארבע בעיות כל אחת בדרך אחת או לפתור בעיה אחת בארבע דרכים שונות.' רק אחרי שמנסים רואים את התשובה" (Leikin et al., 2006, p. 12). [נציין בסוגריים שמתמטיקאים גדולים כבר נתנו את התשובה על שאלה זו, ראו לדוגמה פוליה (Pólya, 1957), סוויער (Sawyer, 1966) ועוד.] סיבה נוספת לקושי של המורים לשלב בהוראתם חיפוש אחר ריבוי פתרונות לבעיה אחת טמונה בנטייתם ללמד באופן דומה לדרך שבה הם עצמם למדו מתמטיקה כתלמידי בית הספר, כאשר מטרתם המרכזית בלימודי מתמטיקה הייתה להצליח במבחנים סטנדרטיים שבדרך כלל אינם בודקים חשיבה או הבנה מתמטית, אלא ידע טכני המבוסס על שינון של חוקים ואלגוריתמים (Hall, Fisher, Musanti, & Halquist, 2006; Shriki, 2013).

כיוון שכך, מומלץ בהוראת המתמטיקה במכללות לחינוך לעסוק בנפרד בנושא "פתרון בעיה אחת בדרכים שונות". ככלל, נושא זה משלים את הנושאים הנלמדים בקורסים מתמטיים שבהם הסטודנטים מתאמנים בחיפוש פתרונות שונים בתחום מתמטי אחד, כמו (שיטות) דרכי פתרון הנוגעות לתחומים שונים של המתמטיקה, והם אוספים רעיונות מעניינים וחדשים לתוך "ארגז הכלים הדידקטיים". בתום הקורסים הסטודנטים נדרשים לפתור את אחת הבעיות המוצעות במבחן בשתי דרכים שונות. בקורסים "דידקטיקה של הוראת מתמטיקה" ו"פיתוח חשיבה מתמטית" (קורסים למורים-סטודנטים הלומדים לתואר ללימודים מתקדמים [M.A.]), נכלל גם נושא "אינטגרציה בין תחומים שונים במתמטיקה ודרכי הוראה מותאמות".

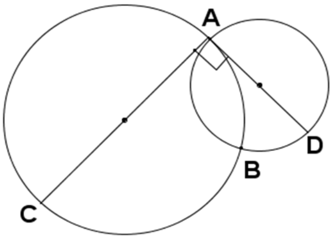
מתודיקה ודוגמאות

פתרון בעיות מתמטיות בדרכים שונות מפתח יכולות רבות וחשובות אצל התלמיד, כולל היכולת לחזות את התוצאה ואת היכולת לחפש בחוכמה את הנתיב הנכון בתנאים המורכבים של הבעיה. המורה צריך לשאוף להביא לידי כך שהתלמיד שקרא את המשימה ועדיין לא עשה שום פעולה, ילמד להבחין בין הדרך שאינה מתאימה ובין זו שמתאימה לפתרון הבעיה. מיומנות כזו מתפתחת בתהליך של מציאת פתרון לאותה בעיה בדרכים שונות. זו הסיבה לכך ש"מורה טוב חייב להבין שלא ניתן למצות כל בעיה עד הסוף. השקפה זו עליו להנחיל לתלמידיו" (Pólya, 1973).

דרכים שונות לפתרון בעיה אחת באמצעות חומר של הנושא שבשפתו הבעיה מנוסחת

הרעיון של גישה זו הוא שבעיה אחת ספציפית עוברת מנושא לנושא ו"מלווה" את התלמידים כאשר הם לומדים נושאים שונים במתמטיקה בבית הספר (נכנה זאת "הבעיה הנלווית").

בכל נושא הנלמד בעיה זו נפתרת בעזרת חומר מתמטי (מושגים, משפטים, נוסחאות) הקשורים לנושא הזה. להלן דוגמה לבעיה כזו, שהוצעה בבחינת הבגרות בכיתה י' בנושא גאומטריה אוקלידית.



איור 1: שרטוט הנתון בשאלה

<u>הבעיה</u>: שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B כך שקוטריהם AC ו-AD מאונכים אחד לשני (ראו איור 1). הוכח כי $AB^2=CB\cdot BD$.

המטרה שהוצבה לפני התלמידים הייתה למצוא את המספר המרבי של דרכי פתרון שונות לבעיה זו. לכל דרך יש מחבר ששמו בהכרח נרשם על הלוח בכיתה. חיפוש מאורגן זה עבור דרכי פתרון חדשות אפשר לנו לחזור על הנושא הנלמד, ליישם אותו ולחזק את הבנתו. במהלך השיעור התקיים תהליך של הוראת עמיתים שבאה לידי ביטוי בחילופי הרעיונות וצבירה של רעיונות חדשים, שעלו מדרכי פתרון מגוונות שמצאו התלמידים. בתהליך של לימוד גאומטריה מצאו התלמידים יותר מעשר דרכים שונות לפתרון בעיה זו.

בטבלה 1 להלן ניתנים הסברים קצרים לכמה מהן, בציון של נושא השיעור שדנו בו בבחינת דרך לפתרון, בניות עזר נדרשות והרעיון המרכזי של הדרך שבחרו בה. (בלי ספק, נוסף לדרכי פתרון המוצגות בטבלה, יש אחרות מעניינות לא פחות.)

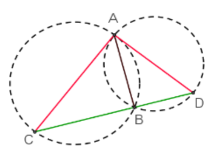
בקורס הגאומטריה האוקלידית בנושא "דרכים שונות לפתרון בעיה אחת" התבקשו הסטודנטים למצוא דרכים רבות ככל האפשר לפתרון של בעיה זו, לנתח את הפן הדידקטי ואת הספציפיות של הוראתן ולהשוות ביניהן.

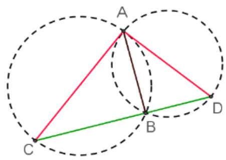
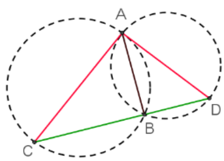
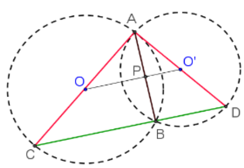
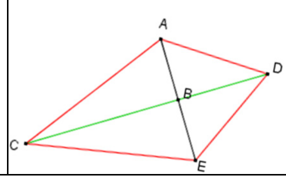
פתרון של הבעיה

הקדמה משותפת לכל הדרכים שהוצגו בטבלה 1:

תחילה נוכיח כי שלוש נקודות C, B, D נמצאות על ישר אחד (נשתמש במשפט על זווית היקפית במעגל הנשענת על הקוטר), ומכאן נובע כי קטע CD הוא יתר במשולש ישר זווית ΔCAD.

טבלה 1: דרכי פתרון שונות לאותה בעיה בעזרת נושאים גאומטריים שונים

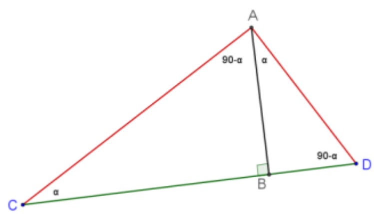
מספר דרך הפתרון	נושא של שיעור (נושא חדש או חזרה על החומר)	שרטוט ובניות עזר	רעיון מרכזי של דרכי הפתרון והדרכה בפתרון הבעיה
1	משולשים דומים	מיתר משותף AB, קטעים CB ו-BD 	**1.** מוכיחים דמיון משולשים ישרי זווית ΔABD ו-ΔCBA. **2.** רושמים פרופורציה עבור צלעות מתאימות במשולשים דומים, ועל פי תכונתה (כפל באלכסון) מקבלים את הנדרש.

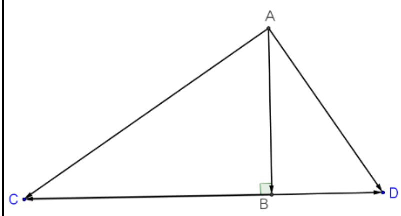
מספר דרך הפתרון	**נושא של שיעור (נושא חדש או חזרה על החומר)**	**שרטוט ובניות עזר**	**רעיון מרכזי של דרכי הפתרון והדרכה בפתרון הבעיה**
2	משפט על משיק וחותך לאותו מעגל היוצאים מאותה נקודה שמחוץ למעגל	מיתר משותף AB, קטעים CB ו-BD 	**1.** על פי משפט על משיק וחותך ביחס למעגל הגדול $AD^2 = CD \cdot BD$ **2.** על פי משפט פיתגורס ΔABD $AB^2 + BD^2 = AD^2$ **3.** מציבים 1 ב-2, ומעבירים BD^2 לאגף ימין ומוצאים גורם משותף BD. **4.** מחליפים את ההפרש CD-BD ב-CB.
3	משפט פיתגורס	מיתר משותף AB, קטעים CB ו-BD 	**1.** רושמים משפט פיתגורס עבור ΔABD ו-ΔCBA ומחברים את השוויונות בהתאמה. **2.** מחליפים בשוויון המתקבל על פי משפט פיתגורס ב-ΔACD $AD^2 + AC^2 = CD^2$ **3.** מציבים $CB + BD = CD$ ומשתמשים בנוסחת כפל מקוצר ריבוע של סכום $(CB + BD)^2$ ומפשטים את הביטוי המתקבל.
4	משפט על גובה ליתר במשולש ישר זווית. משפט על קטע אמצעים במשולש	קטע מרכזים OO′. מיתר משותף AB. קטעים CB ו-BD 	**1.** על פי משפט על גובה ליתר במשולש ישר זווית ΔOAO′ נקבל: $AP^2 = OP \cdot O'P$ **2.** משתמשים במשפט על קטע אמצעים במשולש ΔABC וגם במשולש ΔABD: $OP = \frac{1}{2}CB\ ;\ O'P = \frac{1}{2}BD$ **3.** מוכיחים כי $AP = \frac{1}{2}AB$ **4.** מציבים את הסעיפים 2 ו-3 בסעיף 1 ומקבלים את הנדרש.
5	משפט על קטעים פרופורציוניים הנוצרים על שני המיתרים הנחתכים בתוך המעגל	בניית ΔCED שהוא סימטרי ל-ΔCAD ביחס לציר הסימטריה CD (סימטריה קווית). 	**1.** משתמשים במשפט על קטעים פרופורציוניים הנוצרים על שני המיתרים הנחתכים בתוך המעגל: $CB \cdot BD = AB \cdot BE$ **2.** מכיוון ש- $BE = AB$ מציבים AB במקום BE בסעיף 1 ומקבלים את הנדרש.

דרכים שונות לפתרון בעיה אחת, בשימוש של ענפי המתמטיקה האחרים (לא גאומטריה אוקלידית)

התלמידים חזרו לבעיה זו במהלך לימוד של נושאים שונים במתמטיקה, ובכל נושא הדרך שבה הם פתרו אותה, הייתה קשורה לתוכן של הנושא הנלמד. להלן טבלה 2 שמציגה דרכים נוספות לפתרון אותה בעיה, ודרכים אלה מגייסות כלים מתחומים מתמטיים שונים, כגון גאומטריה אנליטית (שיטת קואורדינטות), טריגונומטריה במישור (שיטה טריגונומטרית) וגם וקטורים (שיטה וקטורית).

טבלה 2: דרכי פתרון שונות לאותה בעיה בעזרת תחומים מתמטיים שונים

שם הדרך	שרטוט	רעיון והדרכה לפתרון
דרך של גאומטריה אנליטית		**1.** ממקמים את ΔACD במערכת הצירים כך שנקודה B תתלכד עם ראשית הצירים, ציר ה-Y יעבור דרך גובה AB. מסמנים את שיעורי הקודקודים: $A\ (0,\ y),\ C\ (-x_2,\ 0),\ D\ (x_1,\ 0),\ B\ (0,\ 0)$ **2.** ΔCAD הוא משולש ישר זווית, לכן מכפלת השיפועים של הניצבים AC ו-AD שווה ל (-1), כלומר $m_{AD} \cdot m_{AC} = -1$ **3.** נחשב את השיפועים של ניצבים: $m_{AC} = \frac{y}{x_2}\ ;\ m_{AD} = \frac{y}{-x_1}$ **4.** מכפילים את השוויונות של סעיף 3 בהתאמה: $y^2 = x_1 \cdot x_2$ מכיוון ש- $y=\|AB\|,\ x_1=\|BD\|,\ x_2=\|BC\|$ מקבלים את הנדרש.
דרך טריגונומטרית		**1.** מוכיחים כי $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAD$ **2.** במשולש ישר זווית ΔABC מבטאים את AB $AB = CB \cdot \tan\propto$ **3.** במשולש ישר זווית ΔABD מבטאים את AB $AB = BD \cdot \cot\propto$ **4.** מכפילים בהתאמה את השוויונות של סעיפים 2 ו-3, ומשתמשים בזהות $\tan\propto \cdot \cot\propto = 1$ ומקבלים את הנדרש.

שם הדרך	**שרטוט**	**רעיון והדרכה לפתרון**
דרך וקטורית		1. וקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ מאונכים, לכן מתקיים $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 2. במשולשים ישרי זווית ΔABC ו- ΔABD על פי כלל המשולש מתקיים $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ 3. מציבים את הנוסחאות של סעיף 2 בסעיף 1, פותחים את הסוגרים ושמים לב ש- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ אז נקבל $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 4. משתמשים בהגדרת מכפלה סקלרית ושמים לב שזווית בין $\overrightarrow{BC}$ לבין $\overrightarrow{BD}$ שווה ל-180°, ומקבלים את הנדרש.

הניסיון מראה שכאשר תלמידים או סטודנטים פותרים בעיה מסוימת בדרכים שונות, הם מבינים יותר לעומק את הייחודיות של דרך זו או אחרת, ואת יתרונותיה וחסרונותיה לעומת תוכן הבעיה. בשיעור משווים בין דרכי פתרון שונות לפי קריטריונים שקבעו המורה והתלמידים ביחד, ואף לפעמים נערכות תחרויות כדי לגלות איזו דרך יפה, חדשה, מקורית, אלגנטית, מעניינת, קצרה ביותר וכדומה.

במהלך החיפוש של דרך פתרון חדשה הלומדים מגדירים מה הוא "נושא העוזר" (למשל, נושא "וקטורים" בטבלה 2) ומה הוא "נושא המקור" (נושא "גאומטריה" בטבלה 2). במקום הבעיות "הנלוות" לתלמידים בלימוד של נושאים שונים, אפשר להשתמש במשפטים מתמטיים (למשל, תלמידים יכולים להוכיח את משפט פיתגורס בכיתות שונות ובדרכים שונות בהתאם לתחום מתמטי הנלמד בשיעור).

בתחילת הלימוד של הנושא המתמטי הבא, **בשיעור הראשון בנושא חדש**, כל תלמיד מקבל גיליון עם בעיות ומשפטים הקשורים לנושאים המתמטיים שנלמדו בעבר, ואותם אפשר לפתור בעזרת הנושא החדש. בעיות ומשפטים בגיליון מסווגים לפי שייכות לנושאים שתלמידים למדו קודם לכן. כמובן, בשלב זה התלמידים אינם יודעים כיצד לפתור אותם בעזרת המנגנון של הנושא החדש, אך הם יכולים לראות שהנושא החדש הוא נושא מסייע ("נושא העוזר"), שכן הוא משמש כלי מתמטי לפתרון בעיות מנושאים אחרים (בין השאר, להוכחת משפטים שכבר ידועים לתלמידים מהעבר בדרך אחרת). הדבר מחזק את המוטיבציה של התלמידים ללמוד כלי מתמטי חדש. במהלך הקניית הנושא אנו חוזרים לבעיות שבגיליון, תהליך זה מעלה את תחושת המסוגלות של התלמידים כאשר הם מתמודדים בהצלחה עם פתרונותיהן בעזרת הנושא הנלמד. לדוגמה, טבלה 3 מציגה את הבעיות שתלמידים מוזמנים ללמוד בשיעור הראשון בנושא "וקטורים", וכמו כן את נושאי המקור (תחום המתמטיקה שמשתייכים אליו בעיה או משפט).

טבלה 3: דוגמאות לשאלות מנושאים מתמטיים שונים שאפשר לפתור אותן בעזרת וקטורים

תחום מתמטי	דוגמאות לבעיות ומשפטים
הנדסת המישור	הוכח כי במעוין אלכסונים ניצבים זה לזה. הוכח כי כל תיכוני המשולש נחתכים בנקודה אחת, המחלקת כל אחד מהם ביחס של 2:1. הוכח משפט על זווית היקפית במעגל. הוכח משפט על קטע אמצעים במשולש ובטרפז.
טריגונומטריה במישור	הוכח משפט הקוסינוסים. במשולש ABC נתון: $AB=c,\ AC=b,\ \angle BAC=\alpha$. חשב את אורך התיכון לצלע BC.
הנדסת המישור	חישוב זווית בין שני ישרים במרחב. הוכח משפט על ניצבות ישר למישור: אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו, אז הוא מאונך למישור כולו. הוכח משפט על שלושת האנכים: ישר העובר במישור דרך עקבו של משופע ומאונך להיטלו של המשופע במישור זה, מאונך גם למשופע.
מספרים מרוכבים	נתונים שני משולשים ABC ו-MNP. שיעורי קודקודיהם הם מספרים מרוכבים a, b, c ו- m, n, p בהתאמה. הוכח: אם מתקיים $\frac{c-a}{b-a}=\frac{p-m}{n-m}$ אז המשולשים דומים.
גאומטריה אנליטית	בריבוע ABCD קודקוד A (7,1) וקודקוד הנגדי לו C (-1,5). מצא שיעורים של שאר הקודקודים.

נתבונן בדוגמה של "עזרה הדדית" בין התחומים המתמטיים האלה: מספרים מרוכבים וטריגונומטריה אנליטית המאפשרת למורה ולתלמידים להשתמש בכלים של נושא אחד לצורך פתרון בעיות בנושא השני.

מספרים מרוכבים מסייעים לטריגונומטריה

בלמידת הנושא "חזקה של מספר מרוכב" תלמידים מתבקשים להוכיח את הנוסחאות של סינוס וקוסינוס של זווית כפולה (או זווית משולשת וכדומה) המוכרות להם מתחום של טריגונומטריה שנלמד בעבר. לדוגמה נוכיח את הנוסחאות עבור $\sin(2\alpha)$ וגם עבור $\cos(2\alpha)$. למטרה זו נבטא את הריבוע של מספר מרוכב $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ בשתי דרכים שונות – על פי נוסחת כפל מקוצר ריבוע של סכום ועל פי משפט דה-מאובר (de Moivre), ונשווה בין התוצאות המתקבלות.

לפי נוסחת ריבוע של סכום נקבל:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2i\cos\alpha\sin\alpha \quad (1)$$

בעזרת משפט דה-מואבר נקבל:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) \quad (2)$$

שני מספרים מרוכבים בצורה אלגברית שווים כאשר חלקיהם ממשיים ומדומיים שווים

בהתאמה. מכאן אחרי השוואת אגפים ימנים של שוויונות (1) ו-(2) נקבל את הנוסחאות המבוקשות עבור זווית כפולה:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

הנוסחאות האלה נמצאות בשימוש נרחב בתחום של טריגונומטריה, ובדרך כלל בתחום זה מוכיחים אותן בעזרת הצבת $\alpha = \beta$ בנוסחאות האלה:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

בדומה באמצעות שימוש בנוסחת כפל מקוצר עבור חזקה שלישית של סכום ושימוש במשפט דה-מואבר עבור חזקה שלישית של מספר מרוכב, נקבל את הנוסחאות לסינוס וקוסינוס של זווית משולשת. דוגמה זו מראה לתלמידים את יישומו של משפט דה-מואבר, בפרט בטריגונומטריה אנליטית (אגב להוכחת משפט דה-מואבר ראוי להשתמש בשיטת אינדוקציה מתמטית). בדוגמה לעיל טריגונומטריה הייתה "נושא המקור" ומספרים מרוכבים – "נושא העוזר".

טריגונומטריה מסייעת למספרים מרוכבים

התלמידים מתבקשים לתקן שגיאות בכתיבת צורה טריגונומטרית של מספרים מרוכבים האלה:

$$1)\ z = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2)\ z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$3)\ z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

בכל אחת מדוגמאות מוצגות כאן נמצאת שגיאה מסוג שונה: בדוגמה 1 – סימן מינוס רשום לפני ערך מוחלט של מספר מרוכב; בדוגמה 2 – סימן מינוס בין חלק ממשי לחלק מדומה; בדוגמה 3 – זוויות שונות בתוך סינוס וקוסינוס. להלן פתרון של דוגמה 1 שבו נשתמש בתכונת אי-זוגיות של פונקציה סינוס וגם בנוסחאות רדוקציה להלן:

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} \quad \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}.$$

$$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

בניגוד למקרה הקודם, כאן טריגונומטריה הייתה "נושא העוזר" ומספרים מרוכבים – "נושא המקור".

פתרון בעיה בדרכים שונות כמבוא ללימוד של נושא חדש

לפני שמתחילים ללמוד נושא מתמטי חדש, תלמידים מתבקשים לפתור בעיה שבדרך כלל אופיינית לאותו תחום. עדיין בלי לשלוט בכלי חדש לפתרון בעיה זו, התלמידים מחפשים דרכים לפתור אותה בעזרת הנושאים שנלמדו כבר, ושיטות אלה נידונות ומנותחות בשיעור. במעבר לנושא חדש, אנו חוזרים שוב לאותה בעיה ופותרים אותה באמצעות כלי חדש. גישה זו מאפשרת לתלמידים להבין את המשמעות ואת היישום של נושא חדש, כמו לגלות ולהעריך את היתרונות שהוא מספק לפתרון בעיות. לדוגמה, לפני למידת הנושא "פתרון בעיות ערך קיצון מילוליות" קיבלו תלמידים משימה לפתור בעיה זו: "מבין כל המלבנים החסומים במשולש ישר זווית שיש להם זווית ישרה משותפת עם המשולש, מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר".

להלן אחת השיטות לפתרון בעיה זו שהציעו התלמידים, המשלבת שתי דרכים: דרך קואורדינטות ודרך גאומטרית.

<u>פתרון</u>: נמקם את המשולש ישר זווית בעל ניצבים a ו- b במערכת הצירים קרטזית כך שקודקוד של זווית ישרה יתלכד עם ראשית הצירים O (0,0) וניצבים יעברו על הצירים (ראו איור 2). אז נקודת אמצע של יתר היא $A\ (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. נתבונן במלבן כלשהו עם קודקודיו O (0,0), $B\ (\frac{a}{2}+x, \frac{b}{2}-y)$ החסום במשולש הנתון כך שיש להם זווית ישרה משותפת.

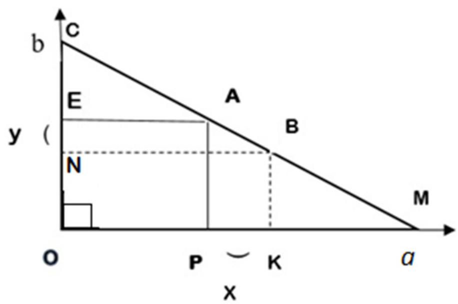
מדמיון משולשים ΔCNB ו- ΔCEA נובע: $\frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{b}{2}+y}{\frac{b}{2}}$ או $1+\frac{2x}{a} = 1+\frac{2y}{b}$, מכאן נובע $y=\frac{b}{a}x$.

שטח מלבן ONBK שווה ל- $S = (\frac{a}{2}+x)(\frac{b}{2}-y) = (\frac{a}{2}+x)(\frac{b}{2}-\frac{b}{a}x) = \frac{ab}{4}-\frac{b}{a}\ x^2$

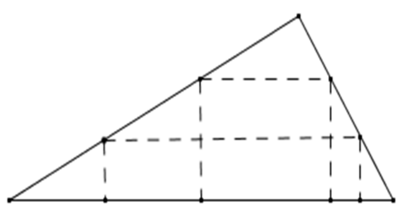
שטח מלבן כלשהו החסום במשולש הנתון לא גדול מ- $\frac{ab}{4}$, לכן הערך המקסימלי שטח מקבל עבור x=0. כלומר קודקודיו של המלבן המבוקש הם אמצעי ניצבים של המשולש הנתון.

אחרי שאלה זו התבקשו תלמידים לפתור שאלה כללית יותר: "איך לקבל (לחתוך) מתוך פיסת משולש של קרטון את המלבן בעל שטח הגדול ביותר?" (ראו איור 3).

הפתרונות שמצאו התלמידים הכילו בדיקות ניסיוניות של היפותזות, ניתוח התוצאות, הוכחה מתמטית קפדנית, והם השתמשו בגאומטריה, טריגונומטריה ואפילו בשיטת "קיפול משולש נייר" (כפי שקראה לה התלמידה שפתרה את הבעיה בעזרת קיפולי נייר).



איור 2: מלבן ומשולש בעלי זווית ישרה משותפת



איור 3: מלבנים החסומים במשולש

פתרון בדרכים שונות של בעיות עתיקות ובעיות הקשורות להיסטוריה של מתמטיקה

לעיתים קרובות בשיעורי מתמטיקה נפתרות בעיות עתיקות, שחיברו מתמטיקאים ידועים, ולפיכך ניתנת לתלמידים הזדמנות לחפש דרכים שונות לפתרונות, ובהן הדרך שבה המתמטיקאי עצמו פתר את הבעיה. לדוגמה, כאשר לומדים את הנושא "סדרה חשבונית", תלמידים מתבקשים לפתור את הבעיות שחיברו ופתרו פיתגורס ותלמידיו. להלן דוגמה לאחת מהן:

> הוכיחו כי סכום של מספר כלשהו של מספרים אי-זוגיים טבעיים עוקבים, החל ממספר אחד, שווה לריבוע המדויק של מספר טבעי, וכך שהמספר הטבעי הזה שווה למספר המחוברים בסכום (כלומר $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, וכן הלאה).

באסכולה הפיתגוריאנית פתרו את הבעיה הזו בדרך גאומטרית בעזרת "שיטת הגנומונים" (Chistyakov, 1978), שבה היחידה (מספר 1) הייתה מיוצגת בצורה של ריבוע, ומספרים אי-זוגיים עוקבים הבאים בצורה של גנומונים, כלומר צורות דמויות "ר", המורכבות ממספר אי-זוגי של ריבועים (יחידות) (ראו איור 4). התלמידים התבקשו לנחש ולהסביר את הדרך שבה פתרו פיתגורס ותלמידיו את הבעיה, ואז למצוא דרך אחרת לפתור אותה ולהשוות בין הדרכים. בעבודה זו נוצרו קשרים אינטגרטיביים בין הגאומטריה לאלגברה, והתלמידים השתמשו בתוכן של הנושא הנלמד – הוכחה מתוך שימוש בנוסחאות של סכום סדרה חשבונית.

דוגמה נוספת היא בעיה שחיבר מתמטיקאי אנגלי, ג'ון ואליס (John Wallis): "הראו בדרך אלגברית ובדרך גאומטרית שבין כל המלבנים בעלי אותו היקף, המלבן בעל שטח הגדול ביותר הוא ריבוע".

אפשר להפוך את הבעיה הזו ל"בעיה נלווית" ולדון בה כמה פעמים: להציע אותה לתלמידים לפני למידת הנושא חדו"א, ואחר כך לחזור אליה ולפתור בעזרת הנגזרת.

דרך אלגברית: נסמן ב-p מחצית ההיקף של המלבן, x – אחת מצלעותיו. שטח המלבן:

$$S = x(p-x)$$

$$x^2 - px + S = 0$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}$$

ברור ש-x יהיה מספר ממשי רק כאשר $S \le \frac{p^2}{4}$ והערך הגדול ביותר עבור S שווה ל- $\frac{p^2}{4}$.

הדבר מתקיים עבור $x = \frac{p}{2}$.

כלומר מבין כל המלבנים בעלי אותו היקף, הריבוע הוא בעל שטח הגדול ביותר.

דרך גאומטרית: נבנה חצי מעגל שקוטרו שווה ל-p (מחצית ההיקף של המלבן) (ראו איור 5).

נסמן על הקוטר נקודה M כך ש-MB=x אז AM=p-x.

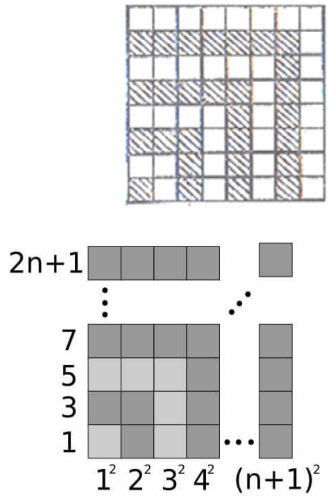
מנקודה M נבנה אנך MC לקוטר AB.

CM – גובה ליתר במשולש ישר זווית ACB, לכן מתקיים :

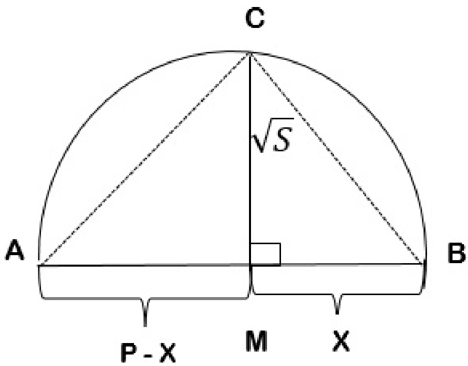
$(p-x)\,x=S$

ברור ששטח יקבל ערך הגדול ביותר כאשר אורך של קטע CM יהיה שווה לרדיוס של מעגל, כלומר עבור $S=\frac{p^2}{4}$.

במקרה זה $p-x=x$, כלומר $x=\frac{p}{2}$ ומלבן הנתון הוא ריבוע.



איור 4: גנומונים של פיתגורס ושטחים של ריבועים מתאימים



איור 5: דרך גאומטרית לפתרון בעיה של ואליס

"שיעור של בעיה אחת"

ידוע שהיכולת לפתור את הבעיות המתמטיות היא אחד האינדיקטורים העיקריים של רמת ההתפתחות המתמטית של התלמיד ושל רמת בקיאותו בחומר הלימוד (רחמני, 2007). לשם הטמעה טובה יותר של יכולת לפתור בעיות מגוונות אצל התלמידים ולמען פיתוח של חשיבה ויצירתיות מתמטית, מומלץ לבצע את "השיעור של בעיה אחת" – זהו סוג של שיעור שבו מתבצע חיפוש אחר דרכים שונות לפתרון בעיות מגוונות. בשיעור זה יש לתלמיד הזדמנות למצוא את דרכו הייחודית או האישית לפתרון, כלומר את הדרך שמובנת לו, ובאמצעותה הוא יכול לבטא את עצמו היטב. בשיעורים של פתרון בעיה אחת בדרכים שונות, הבעיה אינה עוד רק דוגמה לתאוריה, אלא היא נתפסת גם כאובייקט עצמאי, כאמצעי לפיתוח יכולות החקר של התלמידים. את חשיבותו ותועלתו של שיעור זה קובעים תפקידיו העיקריים להלן :

* **תפקיד דידקטי** : מציאת דרך רציונלית יותר לפתרון בעיה, רכישת השליטה של שיטות עיקריות לפתרון הבעיה, הפיכת הידע לשיטתי (כיוון שפתרון הבעיה בדרכים השונות דורש שימוש במערך הידע שנרכש קודם), ההיווצרות של כישורי למידה ומיומנויות כלליות (למשל,

היכולת לנתח חומר קריאה [ניסוח מילולי של הבעיה], לארגן את הרישומים ואת כתיבה נכונה של דרך הפתרון, ביצוע עבודות בכתב).

* **תפקיד מפתח**: הפיתוח של חשיבה מתמטית (ניכר בחיפוש אחר דרכים שונות לפתרון, הערכה ביקורתית של דרכים אלה כדי להפיק את הדרך היעילה ביותר), גמישות (אי שגרתיות) המוח (זה ניכר במהירות האוריינטציה בתנאים החדשים, ביכולת לראות ולגלות את החדש במה שכבר ידוע, להבחין במשמעות שמופיעה בסמוי), יצירתיות (מתבטאת, בפרט, בפיתוח הדמיון הדוחק את התלמיד להמציא ולחפש עוד ועוד את הדרכים החדשות לפתרון), מיומנויות בקרה עצמית (כי צריך להגיע לאותה תשובה בכל הדרכים לפתרון שנמצאו לבעיה אחת), עצמאות בחיפוש אחר דרכי פתרון.
* **תפקיד חינוכי**: חינוך של תכונות אישיות של תלמידים (חריצות, תכליתיות, מסירות, התמדה, דיוק), חינוך לעניין לנושא הנלמד. בשיעור זה מתפתחת אישיות שמסוגלת לחשוב בעצמה, לעמוד על דעתה, למצוא דרך לצאת מהמצבים שנוצרים, ובעתיד להבין טוב יותר את החיים ואת האנשים. השיעור הזה לא משאיר אף תלמיד אדיש. עבור חלק מן התלמידים שיעורים אלה הם "גלגל הצלה" בעולם המורכב של מקצוע המתמטיקה, ועבור אחרים זו הזדמנות לגלות עולם של יופי וחן במקצוע האהוב. יש שיראו בהם הזדמנות לפיתוח היצירתית במתמטיקה, ויש שיראו בהם הזדמנות ליצירת מערכת יחסים חברתיים עם עמיתיהם בכיתה ועם מורה. חיפוש דרכי פתרון מגוונות שאינן סטנדרטיות עבור התלמידים מציף הזדמנויות להעמיק במתמטיקה, וכך אנו עוזרים לכל תלמיד למצוא נישה לביטוי עצמי בנושא.

ניסיון ההוראה מלמד שהפתרון של אותה בעיה בדרכים שונות משתלב בטבעיות בתהליך של העברת השיעור בפתרון בעיות. ב"שיעור של בעיה אחת" יש צורך לבחור בעיה זו, שבפתרונה אכן היה שימוש בהיקף גדול של התאוריה. היישום השיטתי של גישה זו משמש תרומה ניכרת להוראת פתרון בעיות ויוצר סביבה תומכת לפעילות יצירתית, אלתור ואי שגרתיות של חשיבת התלמידים. בה בעת תהליך הלמידה הופך להיות עניין חי ואמצעי למימוש עצמי יצירתי, ולא מסתכם בשינון של כללים ומשפטים משעממים, ולכן לימוד המתמטיקה הופך להיות לא מטרה בפני עצמה, אלא אמצעי בדרך ההתפתחות האישית.

סיכום: תפקידה של הגישה "הבעיה היא אחת – דרכי פתרונה רבות"

הגישה מפתחת:

- חשיבה מתמטית יצירתית: התלמידים מוצאים דרכים שונות מאלה שלמדו בעבר, מציגים ומסבירים את הפתרונות שלהם בכיתה, משכנעים תלמידים אחרים באשר לנכונות הפתרון, מנתחים וחוקרים פתרונות שונים.
- גמישות בחשיבה מתמטית: מתוך פיתוח תכונה זו בקרב התלמידים, המורים עצמם חייבים להיות גמישים בתהליך ההוראה.
- ידע מתמטי ומיומנות פדגוגית של המורה: המורים עצמם לומדים ומפתחים יצירתיות מתמטית בעזרת גישה זו.

- שיטה דידקטית שבה הבעיה שנפתרת פעמים רבות בדרכים שונות, הופכת לכלי של המורה ולאובייקט מתמטי הנחקר מהיבטים שונים.
- הסתכלות על המתמטיקה כתמונה משולבת כוללת אחת – "פזל", שבה כל מרכיב הוא תחום מסוים במתמטיקה. ההבנה שכל נושא שנלמד אינו קיים "עבור עצמו", אלא קשור קשר הדוק עם נושאים אחרים, הנושאים "משתמשים" אחד בשני ו"עוזרים" אחד לשני.
- תחושה של יופי במתמטיקה הנובעת מניתוח והשוואת דרכי פתרונות לפי קריטריונים שונים, כגון קיצור, קומפקטיות, מקוריות, אלגנטיות, חידוש וכדומה.
- תכונות אישיות חיוניות: תחכום והתמדה בחיפוש של דרך חדשה לפתרון, דיוק וקפדנות בעת רישומה כדי להסבירה לתלמידים אחרים ולמורה, היכולת לנמק ולשכנע בבחירה והתאמה של הדרך, ביקורתיות כלפי דרך הפתרון שהמציאו התלמיד עצמו, תלמידים אחרים או המורה, וכמו כן גם דמיון – תכונה החשובה לתכנון העבודה ולחיפוש אחר פתרונות אופטימליים בחיים.
- תפיסה והבנה של משמעותו ויישומו של כל נושא הנלמד ככלי מתמטי המסייע בפתרון בעיות מנושאים אחרים, ומתוך כך – שינוי בתפיסת המתמטיקה ובהסתכלות עליה. זה ניכר במשוב של תלמידת כיתה י':

> *התחלתי לחשוב אחרת [...] מה למדתי מחיפוש ריבוי פתרונות לבעיה אחת? פתיחת החשיבה והראש והיכולת לחקור, לנתח ולהסתכל על אובייקט מתמטי מכמה כיוונים. הגישה הזו סיפקה לי את החופש והביטחון לזרום עם המחשבה [...] זה מה שאפשר לי להיות יצירתית.*

> *הבנתי שמתמטיקה היא לא אוסף תרגילים שרק מחכים שאני אפתור אותם, אלא עולם שלם, חי, מעניין, מרתק ופתוח ולא הכול ידוע מראש. יש בעולם הזה מקום למחשבה פרטית ולביטוי אישי וליצירתיות.*

לסיכום, נציין כי **גם בבעיה אחת בלבד** קיים פוטנציאל דידקטי עשיר לפיתוח חשיבה מתמטית ויצירתיות של תלמידים, ולכן בניית קשרים אינטגרטיביים בתהליך ההוראה באמצעות פתרון בעיה אחת בדרכים שונות צריך להפוך למרכיב בלתי נפרד מתוכנית לימודי מתמטיקה בבתי ספר.

רשימת מקורות

אלבוים-כהן, א' וקופר, ג' (2015). פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים. **על"ה**, **51**, 19-14.

כץ, י' וכץ, מ' (2013). פיתוח חשיבה מתמטית של תלמידים בפתרון בעיות מילוליות. **על"ה**, **48**, 36-30.

לייקין, ר' (2006). על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות. **על"ה**, **36**, 14-8.

רחמני, ל' (2007). ניתוח סיפורי חשבון, ככלי לפיתוח החשיבה המתמטית. **מספר חזק 2000**, **13**, 27-24.

שריקי, ע' (2015). היצירתיות – פנים רבות לה. בתוך א' גזית וד' פטקין (עורכים), **יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות** (עמ' 96-19). תל-אביב: מכון מופ"ת.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Chistyakov, V. (1978). *Old problems in elementary mathematics*. Minsk: Vysheyshaya shkola. (in Russian).

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Netherland: Kluwer Academic Publisher.

Hall, L. D., Fisher, C., Musanti, S., & Halquist, D. (2006). Professional development in teacher education: What can we learn from PT3? *Tech Trends, 50*(3), 25-31.

House, P. A., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). *Connecting mathematics across the curriculum*. Reston, Va.: NCTM.

Jackel, E., & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review, 7*(1), 51-61.

Leikin, R., Levav-Vineberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics, 28*(1), 1-22.

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 328-347.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pólya, G. (1973). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Garden City, NY: Doubleday Anchor Books.

Sawyer, W. W. (1966). *A path to modern mathematics*. Harmondsworth: Penguin Books.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational Psychologist,* 23(2), 145-166.

Shriki, A. (2013). A model for assessing the development of students' creativity in the context of problem posing. *Creative Education, 4*(7), 430-439.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(2), 129-161.