אבי סיגלר, ג'וני אוברמן ומשה סטופל

משימות וחידות להגברת מוטיבציה ופיתוח החשיבה בלימודי חשבון ומתמטיקה

תקציר

בקורסים אקדמיים של פרחי הוראה שעסקו בפיתוח החשיבה המתמטית ובתורת המספרים, הוצגו לסטודנטים מגוון רחב של חידות ומשימות, כדי שהם עצמם יעבירו את זה בכיתותיהם בזמן העבודה המעשית. אכן, הקורס זכה למשוב טוב מאוד של הסטודנטים, בציון שגם התלמידים הביעו התעניינות והנאה מהפעילות. מוצגות חמש מהפעילויות, וכן תוצאות של מחקר זוטא על שילוב חידות ומשימות בהוראה הפרונטלית, והתרומה שלהן להישגים של לימוד המתמטיקה ושיפור האקלים הכיתתי.

מילות מפתח: *פיתוח החשיבה המתמטית; חידות ומשימות להעשרה מתמטית; תכונות של מספרים טבעיים וראשוניים; שברים מצריים; משוואות דיופנטיות.*

הקדמה

במרוצת הדורות, משימות חידות ותשבצים מספקים אתגרים אינטלקטואלים. בעידן זה ההתמודדות עם אתגרים כאלו מונעת הן בדחף פנימי והן בהבטחת פרסים יקרי ערך מטעם חברות שיווק ונותני חסות באמצעי התקשורת: הכתובה, המילולית והחזותית. כך הולך ומתרחב קהל היעד והמתמודדים לצד גיוון הסגנונות, הנושאים, התחומים, וכן היופי והעומק של החידות.

האדם סקרן מטבעו, ויש לו את הנכונות וההנאה להתמודד התמודדות עצמאית או תחרותית עם אתגרים למיניהם. הניסיון הנרכש בהתמודדות תורם לפיתוח החשיבה והעמקתה וכך מעניק כלים ומתווה דרך ללימוד תחומי דעת שונים.

לימודי המתמטיקה הם דוגמה קלסית לתחום לימודי מובנה, המבוסס על פתרון בעיות ותרגילים ברמות שונות של חשיבה, תוך יישום ידע וביצוע אנליזה מעמיקה.

שימוש בחידות, בבעיות שונות ובמשחקי מתמטיקה נוסה בכל מיני מסגרות של לימוד המקצוע: בקורסים אקדמיים לפרחי הוראה במתמטיקה, בחוגי מדע והעשרה לתלמידים מצטיינים, וכן

בעת ההוראה הפרונטלית של מתמטיקה שבה הם שולבו מדי פעם בפעם לגיוון והעשרה של תהליך ההוראה. חשוב לציין ששילובם במינון קטן בהוראה הפרונטלית עורר עניין רב בקרב התלמידים ומקצתם הצטרפו לחוגים של שוחרי מתמטיקה וחובביה, ואף נעשו "מכורים" לפתרון חידות ושעשועים בתחומי המתמטיקה ובתחומים אחרים. במהלך פתרון החידות מתגלות יכולות שונות של תלמידים: חשיבה מקורית, יצירתיות, חשיבה אינטואיטיבית, דרך חשיבה המשלבת תחומים שונים ופיתוח דרכי פתרון לא קונבנציונליות. חשוב לציין שההתמודדות עם חידות ובעיות מסייעת לגלות את העושר, היופי והחוכמה הגלומים במתמטיקה.

רשימת מקורות מופיעה בסוף המאמר. חידות ומשימות אפשר למצוא בספרים רבים, וכן באתרי אינטרנט. חלק מהחידות והמשימות עוברות מדור לדור, ועל כן לעיתים הן חסרות מקומות מידע.

תוצגנה ארבע משימות שניתנו לפרחי הוראה במתמטיקה הן לחינוך היסודי והן לחינוך העל- יסודי כהעשרה בקורסים אקדמיים של תורת המספרים ופיתוח החשיבה המתמטית. אפשר לתת את המשימות החל מילדים בני 14-15 וכלה במבוגרים בכל גיל.

המשימות ניתנו לאחר שנלמדו הנושאים האלה:

- המספרים הטבעיים, המספרים הזוגיים והאי-זוגיים, המספרים הראשוניים.
- פעולות במספרים טבעיים, מנה ושארית, פירוק מספר למכפלות של מספרים ראשוניים עם מעריכים טבעיים.
- כללי החלוקה.
- המחלק המשותף הגדול בשאר לזוג מספרים.

במשימות במספרים טבעיים למספר השלם ישנה חשיבות רבה כי כל פתרון שאינו מספר שלם אינו מתאים. לדוגמה: אם השאלה היא "כמה תלמידים השתתפו בטיול?", התשובה חייבת להיות מספר שלם. עם זה במשימות יכולים להיות מרכיבים שאינם מספרים שלמים.

משימה מס' 1

יהלומן עשיר שאהב מאוד את כל בניו, כתב בצוואתו להוריש את היהלומים כך:

הבן הבכור יקבל יהלום אחד ועוד 1/7 ממה שנשאר.

הבן השני יקבל שני יהלומים ועוד 1/7 ממה שנשאר.

הבן השלישי יקבל שלושה יהלומים ועוד 1/7 ממה שנשאר.

וכך הלאה: כל בן יקבל מספר יהלומים לפי מיקומו הסידורי (רביעי, חמישי, שישי וכדומה) ועוד 1/7 ממה שנשאר.

כיוון שאהב את כל בניו במידה שווה הוא הבטיח בצוואתו שכל אחד מהם יקבל מספר שווה של יהלומים.

כמה יהלומים הוריש היהלומן לבניו? כמה בנים היו לו? כמה יהלומים קיבל כל בן?

פתרון המשימה

מאחר שאין לחלק יהלום בודד לחלקים, הרי שלאחר שהבן הבכור קיבל יהלום אחד, יתרת

היהלומים צריכה להתחלק ב-7 ללא שארית. מכאן שהביטוי המציין את המספר N – מספר היהלומים שהוריש צריך להיות בדרך N=7n+1.

מכאן שהמספרים שיכולים אולי להתאים הם כל המספרים שלאחר חיסור של 1 מהם יתחלקו ל-7 ללא שארית. לפיכך המספרים שיכולים להתאים לכך הם המספרים האלה: 8, 15, 22, 29, 36, 43... אלו מספרים שלאחר נתינת יהלום אחד לבן הבכור היתרה מתחלקת ל-7 ללא שארית. יש לבדוק שלאחר שהבן השני יקבל 2 יהלומים היתרה תתחלק ל-7.

לאחר שהתלמידים בודקים אחד אחרי השני את המספרים האפשריים הם מגלים שמספר היהלומים שהוריש היה 36, והיו לו 6 בנים וכל אחד קיבל 6 יהלומים.

פירוט החלוקה לכל בן מופיע בטבלה 1:

טבלה 1

המספר הסידורי של הבן	מספר היהלומים שקיבל לפי מספרו	ה-1/7 שקיבל משאר היהלומים	סך כל היהלומים שקיבל
1	1	5	6
2	2	4	6
3	3	3	6
4	4	2	6
5	5	1	6
6	6	0	6

כפי שרואים מהטבלה מספר היהלומים שקיבל כל בן לפי מספרו הסידורי ועוד ה-1/7 שקיבל משאר היהלומים, הוא 6 יהלומים.

פיתוח המשימה

1. האם אפשר לשאול את השאלה עם קבלת חלק אחר מהשארית, נניח 1/8 באופן שבתחילת כל חלוקה כל בן יקבל מספר יהלומים כמספרו הסידורי? במקרה זה התשובה תהיה שהיהלומן הוריש 49 יהלומים ולכל אחד משבעת בניו הוא הוריש 7 יהלומים.
2. מכאן רואים שאפשר להגיע להכללה עבור ירושה של N= nΛ2 יהלומים, החלוקה לכל בן מהשארית תהיה 1/(n+1). יחד עם היהלומים שיקבל לפי מספרו הסידורי, יקבל כל בן n יהלומים.
3. פיתוח המשימה למקרה כללי שבעיה זו היא מקרה פרטי שלה מפני שמספר הבנים כמספר היהלומים שקיבל כל בן.

יהא נתון שהיהלומן מוריש N יהלומים. לכל בן הוא מוריש A יהלומים ויש לו B בנים $(A > B)$.

המצב ההתחלתי הוא $N = A \times B$.

כלל החלוקה:

הראשון מקבל תחילה A-B+1 יהלומים ועוד 1/(A+1) ממה שנשאר. חשבון פשוט מראה שהוא מקבל סך הכול A יהלומים.

השני מקבל תחילה A-B+2 יהלומים ועוד 1/(A+1) ממה שנשאר. חשבון פשוט מראה שגם הוא מקבל סך הכול A יהלומים.

הבן ה-k מקבל תחילה A-B+k יהלומים ועוד 1/(A+1) ממה שנשאר. גם החשבון מראה שגם הוא מקבל סך הכול A יהלומים, וכך נמשכת החלוקה.

כדוגמה נניח שהיהלומן הוריש 32 יהלומים ויש לו 4 בנים, ולכן כל אחד יקבל 8 יהלומים. טבלה מספר 2 מראה את דרך חלוקת היהלומים לכל בן.

טבלה 2

המספר הסידורי של הבן	מספר היהלומים שקיבל לפי מספרו	ה-9/1 שקיבל מיתרת היהלומים	סך כל היהלומים שקיבל
1	5	3	8
2	6	2	8
3	7	1	8
4	8	0	8

כאשר ליהלומן יש A בנים ולכל אחד הוא מוריש A יהלומים, זה המקרה הפרטי כפי שמופיע בשאלה המקורית ומחייב שמספר היהלומים שהשאיר, הוא ריבוע של מספר שלם.

משימה 2

קבוצת חיילים הגיעה למסדר המפקד.

כשניסו להעמיד אותם בשלוש שורות נשאר אחד מחוץ לשורות.

כשניסו להעמיד אותם בארבע שורות נשארו שניים מחוץ לשורות.

כשניסו להעמיד אותם בחמש שורות נשארו שלושה מחוץ לשורות.

כשניסו להעמיד אותם בשש שורות נשארו ארבעה מחוץ לשורות.

כמה חיילים הגיעו למסדר המפקד?

פתרון המשימה

מחפשים את המספר n שבחלוקתו ב-3 נותן שארית 1 ובחלוקתו ב-4 נותן שארית 2 וכך הלאה. מתחילים ברישום המספרים שנותנים את השארית המתאימה:

שארית 1:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 ,34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, <u>58</u>, 61,..

שארית 2:

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, <u>58</u>, 62, 66,...

שארית 3:

8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73,...

שארית 4:

10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70,....

יש לשים לב לכך שקבוצת המספרים שנותנת את אותה שארית משמשת סדרה חשבונית ולכן קל לכתוב את הסדרות האלה.

כשמחפשים את המספר שנותן את כל ארבעת השאריות הדרושות, מוצאים שהוא 58. כלומר, למסדר המפקד הגיעו 58 חיילים.

הערה: הסדרה הכי פשוטה של מספרים היא הסדרה שבחלוקה ל-5 נותנת שארית 3, וזאת משום שספרת האחדות שלהם היא 3 או 8. מסדרה זו אפשר לנפות את כל המספרים המתחלקים ב-3 ללא שארית: ,8.....,48, 38, 28, 18, ובכך להקטין את קבוצת המספרים ולבדוק בפרט את יתרת המספרים כשברור שמספרים כגון ..,38, 33, 23, 13 אינם מתאימים מבחינת השארית המתקבלת מחלוקה ב-6.

המשך המשימה

האם 58 חיילים היא התשובה היחידה?

התשובה כמובן שלילית. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של המספרים 3, 4, 5, 6 היא 60 לכן הוספת $60n$ (n - מספר טבעי) למספר 58 תיתן קבוצה של מספרים העונה על השאלה ...,178 ,58, 118.

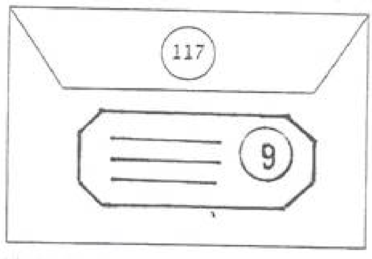
כעת המקום לשאול: אם על מגרש המסדרים יכולים להסתדר לכל היותר 320 חיילים, מהו המספר המרבי של חיילים שהשתתפו במסדר לפי הנתונים?

התשובה כמובן 298.

משימה דומה לזו שהוצגה היא השאלה: מי הוא המספר הקטן ביותר שעם חלוקתו בכל אחד מהמספרים: 2, 3, 4, 5, 6, 7 נותן את אותה שארית 1. התשובה היא 421. הכפולה הקטנה ביותר המשותפת לכל המחלקים הנ"ל היא 420, ולכן מספר בתוספת 1 ייתן את השארית 1 עבור אחד מהמחלקים.

משימה 3

יש 12 מעטפות ועליהן המספרים 110 ועד כולל 121. יש להכניס לתוך המעטפות 12 מכתבים הממוספרים מ-1 ועד 12, כך שהמספר שעל המעטפה יתחלק (ללא שארית) במספר שעל המכתב. המקור למשימה מופיע בספרו של גזית (2002). ראו איור 1.



איור 1

פתרון המשימה

מפרקים את כל אחד מהמספרים שעל המעטפות למכפלות של מספרים ראשוניים עם מעריכים טבעיים. פעולה זו מאפשרת לקבוע על פי הפירוק כמה מחלקים יש לכל מספר, ולאחר מכן רושמים אותם כפי שמופיע בטבלה 3.

טבלה 3

המחלקים של המספר	מספר המעטפה
1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110	110
1, 3, 37, 111	111
1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112	112
1 ,113	113
1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114	114
1, 5, 23, 115	115
1, 2, 4, 29, 58, 116	116
1, 3, 9, 13, 39, 117	117
1, 2, 59, 118	118
1, 7, 17, 119	119
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	120
1, 11, 121	121

ברור שרק מחלקים שערכם בתחום רלוונטיים לפתרון המשימה.

לאחר הפירוק של כל אחד מהמספרים ורישום המחלקים שלהם נגלה בקלות את דרך השיבוץ:

- המספר 113 הוא מספר ראשוני, ולכן לתוך המעטפה שלו אפשר להכניס רק את המכתב שמספרו 1 (נשאר לשבץ 11 מכתבים).
- המספר 118 מתחלק רק ל-2 (כי מכתב מס׳ 1 הוכנס למעטפה 113), ולכן למעטפה זו מכניסים את מכתב מס׳ 2 (נשאר לשבץ 10 מכתבים).

- המספר 121 מתחלק רק ל-1 ו-11 (המכתב 1 כבר הוכנס למעטפה 113), ולכן למעטפה זו יוכנס המכתב 11 (נשאר לשבץ 9 מכתבים).
- לפי אותו הסבר המכתב שמספרו 3 יוכנס למעטפה שמספרה 111 (נשאר לשבץ 8 מכתבים).
- כמו לעיל, המכתב שמספרו 5 יוכנס למעטפה 115.
- מאחר שמכתבים 1 ו-2 כבר הוכנסו למעטפות, את מכתב 4 יש להכניס למעטפה 116.

כך ממשיכים הלאה בניתוח האפשרויות שמספר קטן לאחר ש-6 מכתבים כבר הוכנסו למעטפות. השיבוץ הסופי מופיע בטבלה 4.

טבלה 4

מספר המעטפה	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110
מספר המכתב	11	12	7	2	9	4	5	6	1	8	3	10

הקדמה למשימות 4 ו-5

בעיות הקשורות לשברים המצריים ירושת השייח וחלוקת חבל

השברים המצריים

צורתם $\frac{1}{n}$ כאשר n מספר טבעי. הם נקראים גם ״שברי יחידה״. המצרים השתמשו רק בשברי יחידה, כאשר היוצא מן הכלל היה השבר $\frac{2}{3}$. המתמטיקאי סילבסטר הוכיח בשנת 1880 שכל שבר בין 0 ל-1 אפשר להציגו כסכום של ״שברים מצריים״ (שברי יחידה) שונים.

משימת 4: חלוקת ירושת הגמלים

זו בעיה ידועה מאוד, וכאן מוצגת הרחבה שלה:

עשיר בגמלים השאיר צוואה מוזרה: ״את 17 הגמלים שלי יש לחלק בין שלושת בני בדרך הזו: הבכור יקבל $\frac{1}{2}$ מהגמלים, הבן האמצעי יקבל $\frac{1}{3}$ מהגמלים והבן השלישי, בן הזקונים, יקבל $\frac{1}{9}$ מהגמלים״.

שוד ושבר – כולם התרעמו על חלוקה לא מתאימה. ״איך מחלקים 17 גמלים ל-2?!״, אמר הבכור. ״אני אקבל $8\frac{1}{2}$ גמלים?״ טענות דומות היו לשני הבנים האחרים.

במקום עבר תושב חכם רכוב על גמל. הוא שמע את תלונות הבנים ופתר את הבעיה כך: הוא צירף את הגמל שלו ל-17 הגמלים שירשו הבנים, ואז הבן הבכור קיבל $18\cdot\frac{1}{2}=9$ גמלים, הבן השני

קיבל $6=\frac{1}{3}\cdot 18$ גמלים, והבן הצעיר קיבל $2=\frac{1}{9}\cdot 18$ גמלים. ביחד: $9+6+2=17$. נשאר גמל אחד שהוחזר ליועץ החכם. כולם היו מרוצים. כל אחד קיבל מספר שלם של גמלים שהיה גדול מהחלק המקורי לפי רוח הצוואה: 9 גמלים במקום $8\frac{1}{2}$, 6 גמלים במקום $5\frac{2}{3}$ ו-2 גטפסיםמלים במקום $1\frac{8}{9}$.

פתרון התעלומה ברור: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}<1$.

להלן דיון מתמטי על השאלה:

מחפשים שלושה שברים מצריים $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ($a<b<c$), כך ש- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{N-1}{N}$ (1), כאשר המספר הטבעי N מתחלק בכל אחד מהמספרים: a , b , c.

בשאלה המקורית היה נתון: $a=2$, $b=3$, $c=9$ ו- $N=18$.

מקרה פרטי 1

יהיו: $a=2$, $b=3$. יש למצוא פתרונות אחרים ל- c ו- N לפי משוואה (1).

אם מציבים $N=18$, אז מקבלים $c=9$, שזה פתרון הבעיה המקורית.

אם מציבים $N=7$, אז מקבלים $c=42$, ואכן: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}=\frac{6}{7}$

עבור $N=12$, מקבלים $c=12$, ואכן: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

אם מציבים $N=24$, מקבלים $c=8$, ואכן: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{23}{24}$

מקרה פרטי 2

יהיו $a=2$, $b=4$. מהם ערכיהם של c ו- N?

המשוואה במקרה זה:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=\frac{N-1}{N} \quad \Rightarrow \quad c=4+\frac{16}{N-4}$$

אם $N=20$, אז $c=5$ ומקבלים: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$

אם $N = 12$, אז $c = 6$ ומקבלים: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

אם $N = 8$, אז $c = 8$ ומקבלים: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

רואים שאפשר להרחיב את הבעיה של חלוקת הגמלים, כאשר הפתרון מקיים את משוואה (1), עבור a ו- b קבועים, והשאלה היא מהם ערכיהם של c ו- N המתאימים בפתרון משוואה דיופנטית.

אפשר להרחיב את הבעיה למקרה של חלוקה לארבעה בנים, כאשר לדוגמה: $a = 2$, $b = 3$, $c = 8$, ויש למצוא את ערכיהם של d ו- N המקיימים את המשוואה:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{d}=\frac{N-1}{N}$$

ממשוואה זו נקבל: $d = 24+\frac{576}{N-24}$, $N = 24+\frac{576}{d-24}$.

אם $d = 25$ אז $N = 600$, ומקבלים: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{25}=\frac{599}{600}$

אם $d = 26$ אז $N = 312$, ומקבלים: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{26}=\frac{311}{312}$

כמובן שאפשר לקבל פתרונות רבים אחרים כמספר המחלקים של המספר 576 שהוא 21.

על פי המוסבר לעיל אפשר לבנות שאלה אלטרנטיבית:

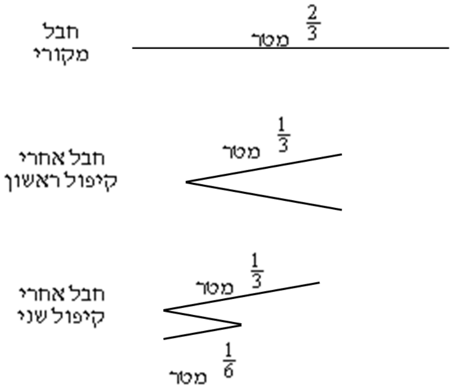
למוריש יש 599 כבשים ובצוואתו כתוב: "הבכור מקבל $\frac{1}{2}$, השני $\frac{1}{3}$, השלישי $\frac{1}{8}$ והרביעי $\frac{1}{25}$ מהכבשים. כמה כבשים יקבל כל אחד?" ההמשך דומה לשאלה המקורית.

משימה 5: חלוקת חבל

נתון חבל באורך $\frac{2}{3}$ מטר ומספריים לגזירה. אין סרגל או סרט מדידה.

המשימה: "תן לי $\frac{1}{2}$ מטר של חבל".

הפתרון



שלב א׳: מקפלים את ה-$\frac{2}{3}$ מטר לשני חלקים שווים ומקבלים $\frac{1}{3}$ מטר.

שלב ב׳: את החלק שאורכו $\frac{1}{3}$ מטר מחלקים לשני חלקים שווים ומקבלים $\frac{1}{6}$ מטר, כנראה באיור.

את החלק שאורכו $\frac{1}{6}$ מטר גוזרים ומקבלים $\frac{1}{2}$ מטר כנדרש.

להלן בעיה דומה מאוד:

אורך החבל הוא $\frac{4}{7}$ מטר, ומבקשים לחתוך אותו לקבל $\frac{1}{2}$ מטר.

$\frac{1}{14}$ מטר $\rightarrow$ קיפול + $\frac{1}{7}$ $\rightarrow$ קיפול + $\frac{2}{7}$ $\rightarrow$ קיפול + $\frac{4}{7}$ מטר

ומכאן גוזרים: $\frac{1}{2} = \frac{4}{7} - \frac{1}{14}$.

הכללת הבעיה

נתון חבל שאורכו $\frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$ מטר, וכן מספריים (k – מספר טבעי).

איך אפשר להגיע לחבל שאורכו $\frac{1}{2}$ מטר?

הוכחת הטענה

$\frac{1}{2(2^k - 1)} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} - \frac{1}{2}$, לכן:

$\ldots$ קיפול + $\frac{2^{k-3}}{2^k - 1}$ $\rightarrow$ קיפול + $\frac{2^{k-2}}{2^k - 1}$ $\rightarrow$ קיפול + $\frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$

ואחרי k קיפולים מקבלים חלק שאורכו $\frac{1}{2(2^k - 1)}$.

את החלק הזה חותכים ומקבלים: $\frac{1}{2} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} - \frac{1}{2(2^k - 1)}$

דוגמה אחרת היא חבל שאורכו $\frac{64}{127}$ מטר, ויש להגיע לחבל שאורכו $\frac{1}{2}$ מטר, או $\frac{1}{4}$ מטר או $\frac{1}{2^n}$ מטר (n מספר טבעי). התשובה מתקבלת בדרך דומה.

מחקר זוטא

מורה מנוסה לימד מתמטיקה בשתי כיתות מקבילות של תלמידים בגיל 14. שתי הכיתות היו בעלות אותו חתך ופוטנציאל של אוכלוסייה. בסוף שנת הלימודים, ממוצע הציונים של התלמידים בכיתה הראשונה היה 8.07 ובכיתה השנייה 8.19. בשנת הלימודים שאחריה (התלמידים בני 15) בכל קבוצה נשארו למעלה מ-85% מהתלמידים. כך שיש מקום להניח שחתך התלמידים מבחינת הפוטנציאל נשאר בכל כיתה זהה לשנה הקודמת. המורה שהמשיך ללמד באותן הכיתות, התבקש לבצע מחקר זוטא בכיתה השנייה על התרומה של שילוב חידות ומשימות לצד הוראה הפרונטלית של החומר השוטף. מתוך 6 ש״ש של לימוד מתמטיקה, אחת לשבוע, בהיקף של 20 דקות, הציג המורה לתלמידים שתי חידות/משימות כאתגר לפתרון למי שמעוניין, מתוך הדגשה שאפשר לשתף עמיתים, הורים ובני משפחה במציאת הפתרונות, וכן שכעבור שבוע יוצגו הפתרונות בידי התלמידים בכיתה, ובמידה שאף אחד לא הצליח לענות, הוא עצמו יציג את הפתרונות. המורה דאג שפעילות נוספת זו לא תפגע בהספק, ברמת הלימוד והידע של החומר השוטף.

אכן כ-40% מתלמידי ההקבצה גילו עניין והתמדה בפתרון החידות כשכמה מהם, מתוך הנאה, הפיצו את החידות/משימות לסביבתם הקרובה. היו אף כמה תלמידים מחוץ להקבצה שבכל פעם ביקשו לדעת אילו חידות/משימות נתן המורה. לדברי המורה והתלמידים, לפעילות זאת הייתה השפעה חיובית על האקלים בשיעורי המתמטיקה. בסוף שנת הלימודים ממוצע הציונים במתמטיקה בקבוצה הראשונה (29 תלמידים) היה 8.12 ובקבוצה השנייה (32 תלמידים) היה 8.41 שיפור קל אך ניכר שיש לזקוף לאווירה הטובה שעטפה את הפעילות הלימודית ונוצרה לאחר פעילות החידות.

קבוצה של 10-8 סטודנטים בהכשרת מורים צפו ב-2 שיעורי מתמטיקה בכל אחת מהכיתות בבתי הספר של המורה והם התבקשו לדרג בסולם 5-1 את האווירה הלימודית (האקלים הלימודי) בכל כיתה. המרכיבים לדירוג היו השתתפות פעילה של תלמידים במהלך השיעור ואף הראת עניין בקרב התלמידים. בכיתה ללא החידות והמשימות הדירוג הממוצע היה 3.82, ואילו בכיתה עם שילוב החידות הדירוג היה 4.21 שהיה אכן פער ניכר. בדרך כלל ציינו הסטודנטים שגם אותם עניינו החידות שהציג המורה.

סיכום

מהבחינה הדידקטית החשיבות של מאמר זה היא מבחינת התרומה הרב-כיוונית שלו:

- התמודדות עם בעיות מילוליות.
- הכרת שיטות פתרון של בעיות מילוליות ובהן פתרון משוואות דיופנטיות.
- הכרת המושג ״השברים המצריים״.
- בעיות עם ערך ממשי מחיי היום-יום.
- יכולת להרכיב בעיות מוחשיות.
- שילוב חלקי של חידות ומשימות בשיעורי המתמטיקה תורם להגברת ההישגים

במתמטיקה ולשיפור האקלים הלימודי.

רשימת מקורות

גזית, א' (2002). **מת לחשוב 10!** חולון: יסוד.

סטופל, מ' (1997). משימות ושעשועי מתמטיקה כאמצעי ליצירת הנעה והשבחת לימודי המקצוע. **שאנן, ג**, 149-163.

סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (1998). חידות, בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד. **על"ה, 22**, 71-76.

סטופל, מ' (1999). הצגת משימות ככלי להגברת מוטיבציה ופיתוח החשיבה בלימודי חשבון ומתמטיקה. **שאנן**, **ה**, 169-180.

סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (2000). מספרים ראשוניים המופיעים במשימות ובבעיות מתמטיקה. **שאנן**, **ו**, 193-209.

סטופל, מ' (2000). עוד על משימות ושעשועי מתמטיקה – מכלול בעיות וחידות. **שנתון "אמי"ת"**, 23-37.

סטופל, מ' (2002). **לקט משימות, חידות ושעשועי מתמטיקה להנאה, להעשרה וכאתגר חשיבתי**. חיפה: מכללת שאנן.

חריר, ש' וסטופל, מ' (2003). משימות חקר בעולם המספרים השלמים. **מספר חזק 2000**, 6, 16-19.

סטופל, מ' וחריר, ש' (2004). התמודדות עם משימות מיוחדות של סדרות, מספרים שלמים, ריבועי מספרים שלמים, מספרים ראשוניים ומספרים מֻרכבים. **שאנן**, **ט**, 403-419.

סטופל, מ' וחריר, ש' (2005). כללי החילוק ותכונות המספרים הטבעיים – ככלי להוכחה ופתרון משימות במספרים שלמים. **שאנן**, **י**, 253-277.

סטופל, מ' והר-שפר, ג' (2006). ההסבר האלגברי למשימות ומשחקי חשבון מפתיעים. **מספר חזק 2000**, **12**, 11-17.

סטופל, מ' והר-שפר, ג' (2007). משחקי אסטרטגיה ככלי לפיתוח החשיבה. **מספר חזק 2000**, **14**, 42-47.