

## תכונות גאומטריות מפתיעות המתקבלות לאחר הפיכתו של מרובע כלשהו לסריג

### תקציר

המאמר מציג חקר תכונות מעניינות שקיימות במרובע קמור כלשהו עם התפתחותו לסריג בעל שורות ועמודות המורכבות מתת-מרובעים. התכונות המיוחדות נשמרות לאורך השורות והעמודות. בין התכונות שנמצאו ראוי לציין את שימור שטח יחסי, השטחים של תת-המרובעים של כל שורה או עמודה שמשמשים סדרה חשבונית, קטעים מיוחדים השווים באורכם ומקבילים זה לזה.

חקר התכונות בוצע בעזרת תכנה גאומטרית ממוחשבת (D.G.S.), שאפשרה חקירה דינמית בשינוי מספר השורות והעמודות, גרירת קדקודים של המרובע המקורי, ובדיקה מיידית של השפעתם.

הובאו והוכחו משפטי עזר ולכל תכונה ניתנה הוכחה פורמלית ברמה המתאימה ליכולת ולרמת הידע של תלמידי החטיבה העליונה.

**מילות מפתח:** משימת חקר; שילוב טכנולוגיה בחקר מתמטי; תכונות מיוחדות של מרובע; תכונות מיוחדות של סריג.

### הקדמה

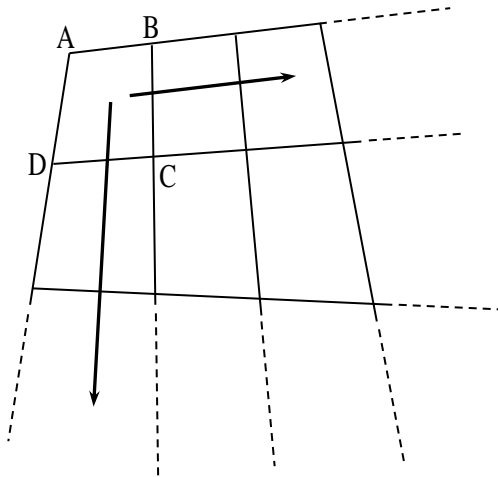
מחקרים שנעשו בשנים האחרונות על תכונות מיוחדות הקיימות בצורות גאומטריות שונות בעזרת כלים מתמטיים (Fraivert, 2016; Stein, Grover, & Henningsen, 1996), כלי שרטוט ושימוש בטכנולוגיה ממוחשבת, הניבו תוצאות מפתיעות המציגות את יופייה של המתמטיקה ובמיוחד של הגאומטריה האוקלידית והעניקו תנופה ומוטיבציה להעמקת המחקר בעיקר בקרב אנשי החינוך המתמטי ופרחי ההוראה שלהם (Hegedus, 2005; Josefsson, 2014; Segal, Stupel, & Oxman, 2015; Stupel & Oxman, 2014).

מאמר זה עוסק בחקר תכונות מיוחדות ומפתיעות המתגלות במרובע כלשהו עם הפיכתו לסריג בעל  $m \times n$  מרובעים. הוצגו המקרים הפרטיים ונעשתה הכללה למקרה הכללי.

פעילות החקר נעשתה עם פרחי הוראה בקורס שעסק בשילוב טכנולוגיה ממוחשבת להוראת מתמטיקה. הוכנו יישומוני ג'אוג'ברה לחקר התכונות וחלק מההוכחות המוצגות הוכנו בידי הסטודנטים. במחקרים רבים נוכל למצוא מידע על החשיבות של שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת (Connor, & Moss, 2007; Mariotti, 2013; Stupel & Oxman, 2014; Takači, Stankov, & )

(Milanovic, 2015).

### ממרובע לסריג



איור 1:  
התרחבות ממרובע לסריג

ממרובע ABCD שמספק את התא הראשוני, עוברים למרובע בעל N שורות ו-M עמודות, כנראה באיור 1. המבנה החדש שצורתו מרובע והנקרא סריג, מתקבל מהמרובע המקורי.

### הגדרת מושג הסריג (באנגלית grid או lattice)

מרובע קמור כלשהו כשמחלקים זוג צלעות נגדיות שלו, כל צלע ל-n חלקים שווים ומחברים בישרים את נקודות החלוקה המתאימות ובזוג הצלעות הנגדיות חוזרים על אותה פעולה באמצעות חלוקת הצלעות ל-m חלקים שווים ומחברים אותם בקווים ישרים מתקבל סריג המורכב מ- $m \times n$  מרובעים. אפשר גם לקחת את

המרובע המקורי ולהרחיב כלפי חוץ בשני כיוונים כנראה באיור 1.

במאמר זה מתואר חקר תכונות גאומטריות ייחודיות הקיימות בסריג המתפתח.

### משפט עזר 1

כשמחברים בישרים אמצעי צלעות נגדיות במרובע כלשהו ABCD, סכום השטחים של זוג מרובעים נגדיים שווה לסכום השטחים של הזוג השני של מרובעים נגדיים (איור 2).

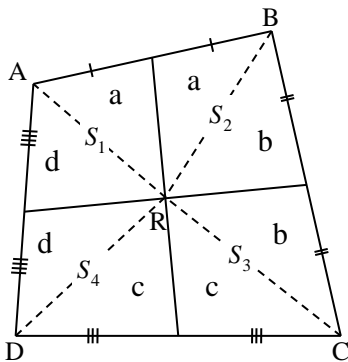
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

הוכחת המשפט היא בסגנון ללא מילים על פי התכונה שתיכון במשולש מחלק את שטחו לשני משולשים שווים

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = a + b + c + d$$

להדגמת התכונה שסכום השטחים של המרובעים הנגדיים תמיד שווה למחצית שטח המרובע ABCD נבנה יישומון

גיאוגיברה שבו אפשר לגרור את כל אחד מהקדקודים של המרובע ABCD, ועבור כל מיקום של הקדקודים (כולל מרובע קעור) מופיעים על צג המחשב סכומי השטחים של המרובעים הנגדיים.



איור 2:  
סכום שטחים של מרובעים נגדיים

**לינק ליישומון 1:**

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/3238811>

**משפט 1**

במרובע כלשהו ABCD חילקו זוג צלעות נגדיות לשלושה חלקים שווים וחיברו אותם בקווים ישרים, כנראה באיור 3 ( $AM=MN=NB$  ,  $DP=PQ=QC$ ).

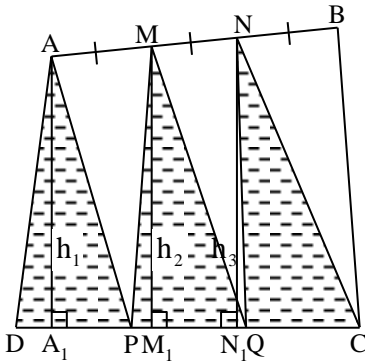
התקבלו שלושה מרובעים ששטחיהם:

$$S_1 = S_{\square AMPD}$$

$$S_2 = S_{\square MNQP}$$

$$S_3 = S_{\square NBCQ}$$

יש להוכיח שהשטחים הללו מהווים סדרה חשבונית, כלומר:  $S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2$ .



**איור 3:**  
חישוב שטחי המרובעים

**הוכחה**

מהנקודות A, M ו-N מורידים אנכים לישר DC. מכאן מקבלים שהמרובע  $ANN_1A_1$  הוא טרפז ישר-זווית שבסיסיו  $h_1 = AA_1$  ו-  $h_3 = NN_1$ , ובו  $h_2 = MM_1$  הוא קטע אמצעים, ולכן:  $h_1 + h_3 = 2h_2$ . היות ובסיסי המשולשים שווים באורכיהם:  $DP = PQ = QC$ , הרי ששטחי המשולשים המקווקים באיור 3 מקיימים:  $2S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle NCQ}$ . כלומר שטחי המשולשים מהווים סדרה חשבונית. באותה דרך מוכיחים

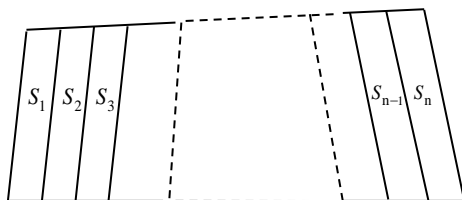
$$\text{ש-} 2S_{\triangle MNQ} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle NBC}$$

$$\text{משני הקשרים נובע ש-} S_1 + S_3 = 2 \cdot S_2.$$

**מסקנה ממשפט 1**

אם מחלקים שתי צלעות נגדיות של מרובע כל אחת ל-N קטעים שווים-אורך, מקבלים "סורג" מסדר  $N \times 1$  כמתואר באיור 4.

השטחים של מרובע זה  $S_1, S_2, \dots, S_n$  משמשים סדרה חשבונית.



**איור 4:**  
שטחי המרובעים המרכיבים את הסריג

ההוכחה מסתמכת על משפט 1 שבו הוכח קשר של סדרה חשבונית בין שטחו של מרובע כלשהו בסדרת המרובעים לסכום השטחים של המרובע שמימינו והמרובע שמשמאלו.

כאשר  $N$  מספר אי-זוגי, השטח של המרובע האמצעי ביחס לשטח המרובע המקורי הוא  $\frac{1}{N}$ .  
 כאשר  $N$  מספר זוגי, יש שני מרובעים במרכז המרובע המקורי. סכום השטחים שלהם ביחס לשטח המרובע המקורי הוא  $\frac{2}{N}$ .

להדגמת תכונה זו הוכן יישומון הכולל זוג סרגלים אחד עבור  $N$  אי-זוגי ואחד עבור  $N$  זוגי שבהם אפשר לשנות בסרגל את ערכו של  $N$  ולקבל את השטח היחסי של המרובע האמצעי (או שני המרובעים האמצעיים). כמובן שממבט ראשון התוצאה מפתיעה, אך חשיבה עמוקה מראה שזוהי תכונה של סדרה חשבונית.

**לינק ליישומון 2:**

<https://www.geogebra.org/material/simple/id/3238991>

**הערה:** יישומון 2 ישמש גם להדגמת התכונה של משפט 5 שבהמשך.

**משפט 2**

נתון מרובע ABCD שבו:

$$S_3 \geq S_1, S_4 \geq S_2, \text{ כנראה באיור 5.}$$

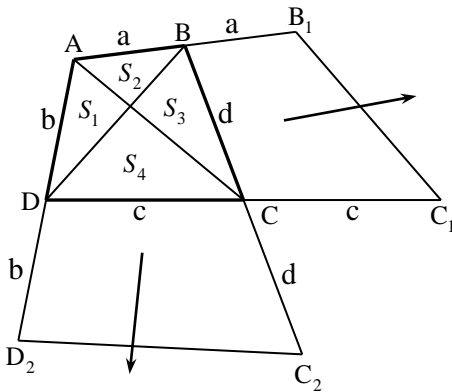
מאריכים את צלעות המרובע כאורכם כלפי חוץ ומתקבלות הנקודות:

$$B_1, C_1, C_2, D_2.$$

אזי מתקיים:

$$S_{\Delta BB_1C_1} - S_{ABCD} = 2 \cdot (S_3 - S_1)$$

$$S_{DCC_2D_2} - S_{ABCD} = 2 \cdot (S_4 - S_2)$$



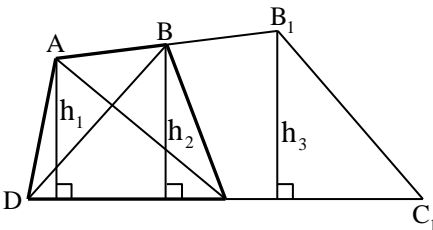
איור 5:  
הצגת חישוב השטחים

**הוכחה**

מעתיקים את המרובע  $AB_1C_1D$  ומורידים בו את

הגבהים  $h_1, h_2, h_3$ , כנראה באיור 6.

$$DC = CC_1 = c$$



איור 6:  
הצגת חישוב השטחים

תכונות גאומטריות מפתיעות המתקבלות לאחר הפיכתו של מרובע כלשהו לסריג

$$S_{BCC_1B_1} - S_{ABCD} = \underbrace{(S_{\Delta BCB_1} - S_{\Delta ABC})}_{AB = BB_1 \text{ כי } = 0} + (S_{\Delta CB_1C_1} - S_{\Delta ADC}) =$$

$$= S_{\Delta CB_1C_1} - S_{\Delta ADC} = \frac{c \cdot (h_3 - h_1)}{2}$$

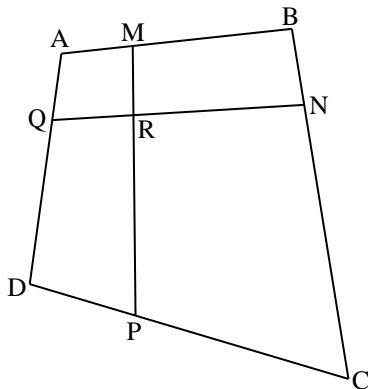
כיוון ש-  $2h_2 = h_1 + h_3$  (לפי קטע אמצעים בטרפז), אזי:  $h_3 = 2h_2 - h_1$ , ולכן:

$$S_{BCC_1B_1} - S_{ABCD} = c \cdot (h_2 - h_1) = [(S_3 + S_4) - (S_1 + S_4)] \cdot 2 = 2 \cdot (S_3 - S_1)$$

$$S_{DCC_2D_2} - S_{ABCD} = 2 \cdot (S_4 - S_2) : \text{ באותה הדרך מקבלים:}$$

## מסקנה 2

התא הראשוני ABCD כאיבר ראשון בסדרה קובע את ההפרש של הסדרה החשבונית בכיוון אופקי (ימינה) או בכיוון אנכי (כלפי מטה). בהתרחבות "ימינה" הפרש הסדרה הוא  $(S_3 - S_1)$  ובהתרחבות כלפי מטה ההפרש הוא  $2 \cdot (S_1 - S_2)$ .



איור 7:  
חישוב קואורדינטות בסריג

## משפט 3

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = \alpha : \text{ במרובע ABCD נתון:}$$

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = \beta$$

הקטעים MP ו-QN נחתכים בנקודה R, כנראה באיור 7.

$$\frac{MR}{RP} = \beta : \text{ אזי קיים:}$$

$$\frac{QR}{RN} = \alpha$$

## הוכחה

מסמנים ב-  $x_A, x_B, x_C, x_D$  את קואורדינטות ה- $x$  של קדקודי המרובע ABCD, ובאמצעותן נבטא את קואורדינטות ה- $x$  של הנקודות M, P, Q, N.

$$x_M = \frac{x_A + \alpha x_B}{\alpha + 1}, \quad x_P = \frac{x_A + \alpha x_C}{\alpha + 1}, \quad x_Q = \frac{x_A + \beta x_D}{\beta + 1}, \quad x_N = \frac{x_B + \beta x_C}{\beta + 1}$$

כעת מחשבים את קואורדינטת ה- $x$  של הנקודה  $R_1$  המחלקת את MP ביחס

$$\frac{MR_1}{R_1P} = \beta \text{ ומקבלים:}$$

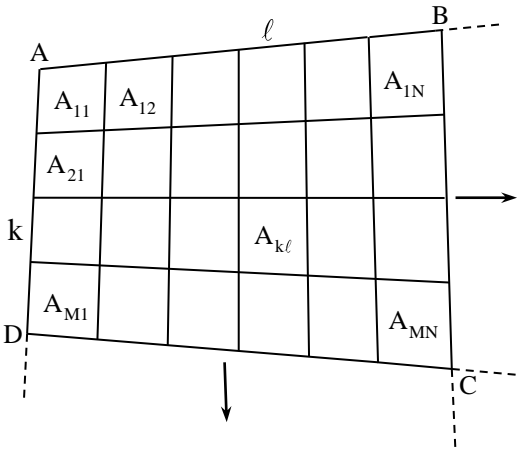
$$x_{R_1} = \frac{x_M \cdot 1 + x_P \cdot \beta}{\beta + 1} = \frac{x_A + \alpha x_B + \beta x_D + \alpha \beta x_C}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}$$

בדומה מחשבים את הקואורדינטה של הנקודה  $R_2$ , המחלקת את הקטע QN ביחס

$$.x_{R_2} = x_{R_1} \cdot \frac{QR_2}{R_2N} = \alpha$$

כלומר  $R_1$  ו- $R_2$  מתלכדים לנקודה R.

באותה הדרך מוכיחים שגם  $y_{R_2} = y_{R_1}$ .



איור 8:  
השטחים המרכיבים את הסריג

### מסקנה 3

כשמחלקים במרובע ABCD את הצלעות הנגדיות AB ו-CD ל-M חלקים שווים, ואת הצלעות הנגדיות AD ו-BC ל-N חלקים שווים, מתקבל סריג כמתואר באיור 8.

כל "מוט" אופקי ב"סורג" מחולק ל-M חלקים שווים, וכל "מוט" אנכי ב"סורג" מחולק ל-N חלקים שווים. אפשר לומר שה"תא" בפינה השמאלית למעלה (ליד הקדקוד A) "התנפח" למרובע ABCD, שהוא סריג מסדר  $N \times M$ .

### משפט 4

ה"תאים" בסריג הנראה באיור 8 מוספרו בהתאם לשורה k ולעמודה l, ושטח התא המתאים סומן ב- $A_{kl}$ . אזי:

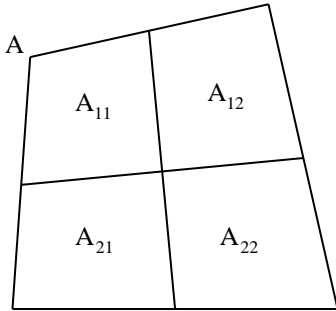
(א) שטח התאים בכל שורה משמשים סדרה חשבונית,

כאשר ההפרש הקבוע בכל שורה שווה.

(ב) שטחי התאים בכל עמודה משמשים סדרה חשבונית,

כאשר ההפרש הקבוע בכל העמודות שווה.

**הוכחה ל-(א) ו-(ב)**



איור 9:  
השטחים של תת-מרובע

באיור 9 נראים ארבעת התאים ליד קדקוד A. על-פי משפט עזר 1, מתקיים:

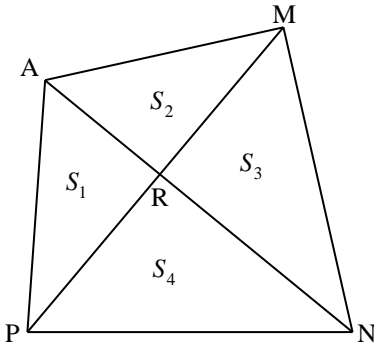
$$A_{12} + A_{21} = A_{11} + A_{22}$$

מקשר זה נובע ש-  $A_{12} - A_{11} = A_{22} - A_{21}$ , לכן סעיף (א) הוכח.

כמו כן נובע מהקשר כי:

$$A_{21} - A_{11} = A_{22} - A_{12}$$

ולכן סעיף (ב) הוכח.



איור 10:  
השטחים של תת-מרובע

לפי משפט 2, ההפרש הקבוע  $D_1$  בכל שורה הוא:

$$D_1 = 2 \cdot (S_3 - S_1)$$

וההפרש הקבוע בכל עמודה הוא:

$$D_2 = 2 \cdot (S_4 - S_2)$$

כנראה באיור 10, המציג בהגדלה את ה"תא"  $A_{11}$ .

**משפט עזר 2**

במרובע  $A_{11}$  נפגשים האלכסונים בנקודה R.

אזי:  $D_1 = D_2$  אם ורק אם R היא נקודת אמצע האלכסון PM.

**הוכחה**

$$D_1 = D_2 \Rightarrow S_3 - S_1 = S_4 - S_2 \Rightarrow S_3 + S_2 = S_1 + S_4$$

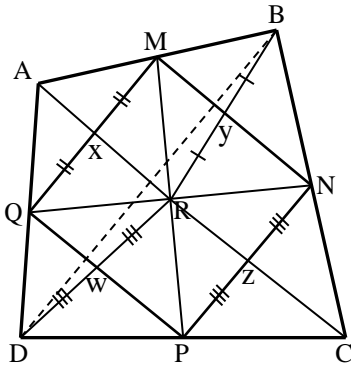
מכאן נובע:  $S_{\Delta APN} = S_{\Delta AMN}$ . מאחר שלשני המשולשים יש בסיס משותף, אז הגבהים שלהם

מהקדקודים M ו-P לבסיס AN שווים, ולכן:  $MR = RP$ .

**מסקנה 4**

אם  $D_1 = D_2$  לכל  $1 \leq k \leq N$  ו-  $1 \leq \ell \leq M$ , בכל "תא"  $A_{k\ell}$  אחד האלכסונים נחצה על

ידי האלכסון השני, כלומר התכונה  $PR = RM$  מתפשטת לכל התאים כי התא  $A_{kl}$  נבנה מהתא  $A_{11}$ .



איור 11:  
תכונה בסריג של  $2 \times 2$

### תכונה בסריג של $2 \times 2$

המרובע ABCD חולק לסורג של  $2 \times 2$  כאשר המרובע ("תא")  $A_{11}$  (איור 11) מקיים את התנאי שהאלכסון AR חוצה את האלכסון QM (כלומר  $D_1 = D_2$ , כנראה באיור 11).

### משפט עזר 3

בנתונים אלו האלכסון AC עובר דרך הנקודה R וחוצה את האלכסון BD.

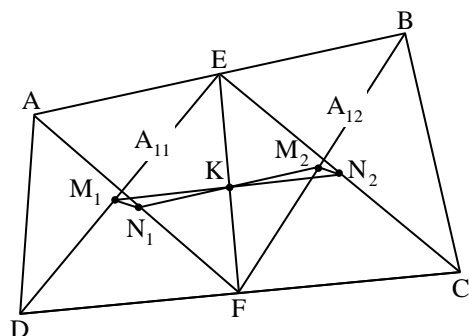
### הוכחה

במסקנה 4 הוכח שאם בתא  $A_{11}$  קיימת התכונה  $D_1 = D_2$ , הרי היא קיימת בכל תא  $A_{kl}$ . לכן במקרה זה הנקודות X, Y, Z, W הן אמצעי הקטעים QM, BR, NP, ו-RD בהתאמה, כנראה באיור 12. המרובע QMNP הוא מקבילית (חיבור אמצעי צלעות של מרובע) ו-RC ו-RA מקבילים גם הם ל-MN, ולכן הנקודות A, R, C, ומצאות על קו ישר. מכאן נובע שגם BD נחצה על ידי AC (הקטע AR שהוא חלק מ-AC חוצה את QM ולכן גם את BD).

### מסקנה 5

התכונה שב- $A_{11}$  אחד האלכסונים נחצה על ידי השני מועברת הלאה לכל סריג חלקי מסדר  $2 \times 2$ . מכאן אפשר להגיע להכללה שעבור כל סריג מסדר  $N \times N$  (סריג ריבועי) אם התא  $A_{11}$  הוא בעל תכונה  $D_1 = D_2$ , אחד מאלכסוניו חוצה את השני, אז התכונה מועברת לכל תת-סריג ריבועי.





איור 12:  
קטעים מקבילים ושווים באורכם

## משפט 5

ABCD הוא סורג מסדר  $1 \times 2$  המורכב מהתאים  $A_{11}$  ו- $A_{12}$ , כנראה באיור 12. תהינה  $M_1$  ו- $N_1$  נקודות האמצע של האלכסונים ED ו-AF ו- $M_2$  ו- $N_2$  נקודות האמצע של האלכסונים BF ו-EC של תא  $A_{12}$ .

אזי קיים:

$$M_1N_1 = M_2N_2 \quad (\text{א})$$

$$M_1N_1 \parallel M_2N_2 \quad (\text{ב})$$

**הערה:** אם ABCD טרפז, אזי כל ארבעת הנקודות  $M_1, N_1, M_2, N_2$  נמצאות על אותו קו ישר.

## הוכחה

$N_1M_2$  הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle AFB$ , ולכן:

$$N_1M_2 \parallel AB \quad (1)$$

$N_1M_2$  חוצה את EF בנקודה K (תכונה של קטע אמצעים) ונחצה על-ידי EF, ולכן:

$$N_1K = KM_2.$$

באותה דרך, הקטע  $M_1N_2$  הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle DEC$ , וגם הוא חוצה ונחצה על ידי EF באותה נקודה K, ולכן  $N_2K = M_1K$ .

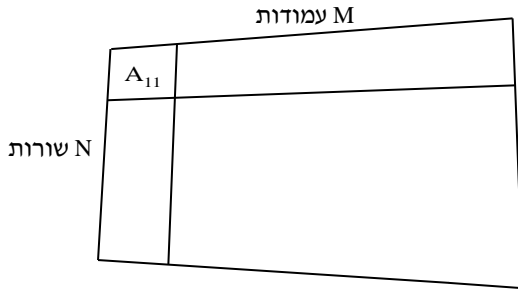
מכאן נובע שהמרובע  $M_1N_1N_2M_2$  הוא מקבילית, ולכן:

$$M_1N_1 \parallel M_2N_2 \quad \text{וגם} \quad M_1N_1 = M_2N_2$$

ביישומון 2 נראה שהקטעים המחברים את נקודות האמצע של אלכסוני כל תת-מרובע, שווים באורכיהם ומקבילים זה לזה.

### מסקנה 6

בכל תת-סריג מסדר  $1 \times 1$  של סריג מסדר  $M \times N$  נשמר המרחק בין אמצעי אלכסונו. כמו כן כל הקטעים המחברים את אלכסוני תת-סריג מסדר  $1 \times 1$ , מקבילים זה לזה.



איור 13 : נקודות אמצע של אלכסוני סריג

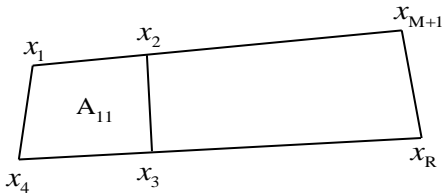
### משפט 6

בסורג מסדר  $N \times M$  (איור 13), יהא  $k$  המרחק בין אמצעי האלכסונים של המרובע  $A_{11}$ .

אזי המרחק  $K$  בין אמצעי האלכסונים של הסורג  $N \times M$  הוא  $M \cdot N \cdot k$ .

### הוכחה

לצורך ההוכחה, נתמקד בסורג בעל שורה אחת:  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1M}$ , כאשר שיעורי ה- $x$  של קדקודי המרובע  $A_{11}$  מסומנים כמתואר באיור 14.



איור 14 : שיעור אמצע קטע בתת-מרובע של סריג

מחשבים את ערכי שיעורי הקדקודים  $x_R$  ו- $x_{M+1}$  בעזרת שיעורי הקדקודים  $x_1, x_2, x_3$  ו- $x_4$ .

כפי שהוכח,  $x_1, x_2, \dots, x_{M+1}$  מהווים סדרה חשבונית שהפרשה  $x_2 - x_1$ .

$$\text{לכן: } x_{M+1} = Mx_2 - (M-1)x_1$$

$$\text{וכנ"ל: } x_R = Mx_3 - (M-1)x_4$$

שיעורי מרכז האלכסון המחבר את הקדקוד  $x_4$  עם הקדקוד  $x_{M+1}$  הוא:

$$x_1 = \frac{x_4 + Mx_2 - (M-1)x_1}{2}$$

באותה דרך, שיעור ה- $x$  של אמצע האלכסון השני הוא:

תכונות גאומטריות מפתיעות המתקבלות לאחר הפיכתו של מרובע כלשהו לסריג

$$x_{II} = \frac{x_1 + Mx_3 - (M-1)x_1}{2}$$

מכאן מקבלים:

$$(x_I - x_{II})^2 = \left( \frac{Mx_4 + Mx_2 - Mx_3 - Mx_1}{2} \right)^2 = M^2 \left( \frac{x_4 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_3}{2} \right)^2$$

כנ"ל לגבי הקואורדינטה  $y$ , ולכן המרחק בין שתי נקודות האמצע הוא  $K = M \cdot k$ .

לכן כאשר מתייחסים אל השורה הראשונה כתת-סריג של  $1 \times M$ , הרי שעבור  $N$  שורות

$$K = M \cdot N \cdot k \quad \text{מקבלים:}$$

### מסקנה 7

בכל תת-סריג מסדר  $m \times n$ , מתקיים:  $K_{m \times n} = k \cdot m \cdot n$ , כאשר  $k$  הוא המרחק בין

אמצעי האלכסונים של המרובע הבסיסי  $A_{11}$ .

להדגמת התכונה הוכן יישומון המציג סריג דו-ממדי שבו אפשר לשנות באמצעות שני סרגלים את מספרי השורות והעמודות. אפשר לגרור את כל אחד מהקדקודים של המרובע הבסיסי ובכך לשנות את גודלו מאחר שהשטחים בכל אחת מהשורות משמשים סדרה חשבונית וכך גם שטחי העמודות. הפרשי סדרות השטחים של השורות ושל העמודות נראים על המסך. כמו כן על המסך מוצג הקשר בין אורך המרחק שבין נקודות האמצע של המרובע החיצוני ובין האורך שבין נקודות האמצע של תת-המרובע הפנימי (שורה עליונה בפינה שמאלית).

### לינק ליישומון 3 :

<https://www.geogebra.org/material/simple/id/3239081>

### הערה:

אם ממשיכים את הסריג בכיוון התקרבות הצלעות אז החל משלב מסוים הסורגים יחתכו זה את זה והסריג יאבד את אופיו כמרובע.

### סיכום

הוצג מחקר מעניין של תכונות גאומטריות מפתיעות המתגלות בעת ה"התפשטות" של מרובע כלשהו לסריג מסדר  $M \times N$ .

בשלב הראשון הוצגו תכונות שקיימות במרובע המקורי ("התא הבסיסי") ובהמשך נעשתה הכללה לגבי תכונות שנשמרות בעת המעבר לסריג.

בכל שלב הוצגו הוכחות מתמטיות המסתמכות על ידע בסיסי בגאומטריה.

התוצאות מספקות מניע להמשך המחקר ולגילוי תכונות אחרות.

## הבעת תודה

המחברים מודים מקרב לב למר עידן טל, מומחה בכיר לשימוש בתוכנת הג'אוג'ברה, על הכנת היישומונים שאפשרו את ביצוע המחקר והצגת התכונות המיוחדות שהתגלו בו.

## רשימת מקורות

- Connor, J., & Moss, L. (2007). *Running head: Mathematical reasoning in DGS investigations student use of mathematical reasoning in quasi-empirical investigations using dynamic geometry software*. Paper presented at Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME 2007).
- Fraivert, F. (2016). Discovering new geometric properties by spiral inductive deductive investigation. *Far East Journal of Mathematical Education*, 16(2), 185-202. doi: 10.17654/ME016020185
- Hegedus, S. (2005). *Dynamic representations: A new perspective on instrumental genesis*. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME4, The Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1031-1040). Barcelona, Spain: Ramon Llull University.
- Josefsson, M. (2014). Properties of equidiagonal quadrilaterals. *Forum Geometricorum*, 14, 129-144.
- Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(3), 441-452. doi: 10.1007/s11858-013-0495-5
- Segal, R., Stupel, M., & Oxman, V. (2015). Dynamic investigation of loci with surprising outcomes and their mathematical explanations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(3), 443-462. doi: 10.1080/0020739X.2015.1075613
- Stein M. K., Grover B. W., & Henningsen M. A. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: Analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Stupel, M., & Oxman, V. (2014). Inductive investigation problem for geometric construction, performed using both traditional tools and computerized dynamic software. *Far East Journal of Mathematical Education*, 12(1), 85-101.
- Takači, D., Stankov, G., & Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, 421-431. doi: 10.1016/j.compedu.2014.12.002

התיאור המילולי של היישומונים כפי שמופיע בג'אוג'ברה-טיוב.

## Applet 1

### The areas of two opposite quadrilaterals

The applet illustrate the property according to which the sum of the opposite quadrilaterals always equals half the area of the quadrilateral ABCD, we construct a GeoGebra applet in which one can drag each of the vertices of the quadrilateral ABCD, and for each location of the vertices (including a concave quadrilateral), the screen shows the sum of the areas of the opposite quadrilaterals.

## Applet 2

### The relative to area of the middle quadrilateral

To illustrate the property of relative areas of the middle and center quadrilateral, the applet includes two toolbars, one for an odd  $N$ , and one for an even  $N$ , in which one can change the value of  $N$  using a toolbar, and obtain the relative area of the middle quadrilateral (or the two middle quadrilaterals). The result is surprising, it just a property of an arithmetic progression.

The applet is also to show that the segments that connect the middle points of the diagonals of each sub-quadrilateral have equal lengths and are parallel to each other.

## Applet 3

### Properties in two-dimensional lattice

The applet presents at two-dimensional lattice in which two toolbars can be used to change the numbers of the rows and the columns. One can drag each of the vertices of the basic quadrilateral, thus changing its sides, since the areas in each of the rows constitute an arithmetic progression, and similarly the areas of the columns. The common differences of the areas of the rows and the columns are shown on the screen. The screen also shows the connection between the distance between the mid-points of the external quadrilateral and the distance between the mid-points of the corner sub-quadrilateral (left corner top row).

אבי סיגלר, דות סגל ומשה סטופל

שנתון "ale" – תשע"ח – כרך כג