דוד פרייברט ואבי (ברמן) סיגלר

תכונות הכרחיות ומספיקות של טרפז הקשורות לאנכים היוצאים מנקודת חיתוך האלכסונים לשוקיים

תקציר

מוצגים ארבעה משפטים חדשים, כולל ההוכחות שלהן, הקשורים להורדת אנכים לשוקי הטרפז מנקודת החיתוך של האלכסונים. שניים מהמשפטים הם למעשה סימני זיהוי של טרפז. כמו כן ישנה התייחסות לבעיה אם המשפט ההפוך גם הוא נכון, וכן מובאות תכונות גאומטריות שונות הנובעות מהמשפטים.

מילות מפתח: *תכונות מיוחדות בטרפז; סימני טרפז; המרובע השלם; רביעייה הרמונית.*

הקדמה

תכונות שונות של קטעים, זוויות, משולשים ועוד הנוצרים בטרפז בשל העברת קווים או בניות מסוימות, ידועות כבר שנים רבות. למרות זאת, הצורה ממשיכה לרתק את העוסקים בחקר הגאומטריה שמעת לעת מגלים בה תכונות בלתי מוכרות או קשרים אלגבריים ונוסחאות בין קטעים, אלכסונים וצלעות הטרפז, ובפרט שהטרפז הוא מקרה פרטי של מרובע.

התכונה של משפט שטיינר לטרפז (נקודות האמצע של בסיסי הטרפז, נקודת מפגש האלכסונים נקודת חיתוך המשכי השוקיים – נמצאות על ישר אחד), אפשרה ביצוע בניות מסוימות בעזרת סרגל בלבד (פרייברט, סטופל וחריר, 2008; Stupel & Ben-Chaim, 2013; Stupel, Oxman & Sigler, 2014). פיתוח נוסחאות אלגבריות בדרכים אחרות לקטעים בטרפז אפשר לחשב אורכים שונים בדרך מקוצרת (פרייברט, 2006, 2014; Josefsson, 2013; Oxman & Stupel, 2014; Fraivert & Stupel, 2014).

במאמר זה תוצגנה, בצורה של משפטים, תכונות של ישרים היוצאים מנקודת החיתוך של אלכסוני הטרפז ומאונכים לשוקיים (משפטים 1 ו-3).

באשר לישרים אלו ייתנו סימנים לזיהוי טרפזים לפי נתונים מסוימים המבוססים על הוכחת המשפטים ההפוכים (למשפטים 1 ו-3), שבנתונים מסוימים המשפט ההפוך אינו נכון, אבל בתוספת נתונים אחרים המשפט ההפוך יהיה נכון, אך ההוכחה שלו תהיה מורכבת יותר.

המאמר מיועד למורי מתמטיקה בפועל ולסטודנטים בשלבי ההכשרה להוראת המקצוע, הן

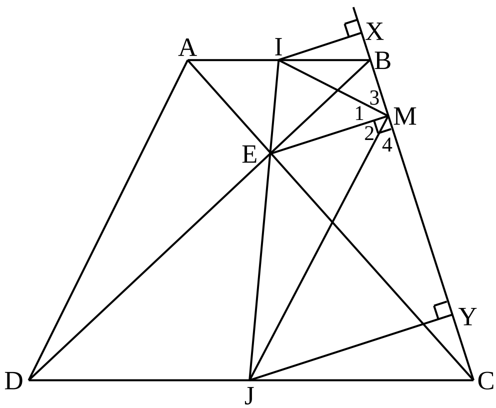
להעשרה והן לחקר של בעיות בתחום גאומטריית המישור, כמו כן פעילות זו מאפשרת יצירת בעיות חדשות.

משפט 1

נתון טרפז כלשהו ABCD, שבו הנקודה E היא נקודת החיתוך של האלכסונים והנקודות I ו-J הן נקודות האמצע של הבסיסים AB ו-DC בהתאמה.

הקטע EM מאונך לשוק BC ($EM \perp BC$) כנראה באיור 1.

ולכן הקטע ME חוצה את הזווית $\measuredangle IMJ$.



איור 1

הוכחה

סימון: $AB=a$, $CD=b$.

בניית עזר: בונים את האנכים IX ו-JY לשוק BC (כנראה באיור 1).

משתמשים בתכונות ידועות בטרפז:

(1) הנקודה E נמצאת על הישר IJ המחבר את נקודות האמצע של הבסיסים (לפי משפט שטיינר לטרפזים).

(2) $\frac{IB}{JC}=\frac{IE}{EJ}=\frac{a}{b}$

המשולשים ΔIBX ו- ΔJCY דומים על פי משפט ז.ז. ולכן מתקיים: $\frac{IX}{JY}=\frac{IB}{JC}=\frac{a}{b}$ (*) .

בטרפז IXYJ הקטע EM מקביל לבסיסיו IX ו-JY. לכן מתקיים: $\frac{IE}{EJ}=\frac{XM}{MY}$ (**) .

מתוך הקשרים (*) ו- (**) נובע ש- $\frac{XM}{MY}=\frac{a}{b}$.

במשולשים ישרי-הזווית ΔIXM ו- ΔJYM כפי שקיבלנו: $\frac{IX}{JY}=\frac{XM}{MY}=\frac{a}{b}$,

ולכן המשולשים הללו דומים ובהם: $\measuredangle M_3=\measuredangle M_4$.

מכאן נובע, ש- $\measuredangle M_1=\measuredangle M_2$ ($\measuredangle M_1=90°-\measuredangle M_3$, $\measuredangle M_2=90°-\measuredangle M_4$)

זאת אומרת שהקטע ME חוצה את $\measuredangle IMJ$.

להלן קישור ליישומון המאפשר חקר דינמי של המשפט: http://tube.geogebra.org/m/1464701

שאלה

האם הטענה ההפוכה גם היא נכונה?

כלומר נתון ABCD מרובע קמור כלשהו, E נקודת חיתוך אלכסוניו, EM מאונך לצלע BC ($EM \perp BC$), הקטע ME חוצה את הזווית $\measuredangle IMJ$ (I ו-J נקודות האמצע של הצלעות AB ו-CD בהתאמה), האם הטענה שהמרובע ABCD הוא טרפז, נכונה או איננה נכונה?

התשובה

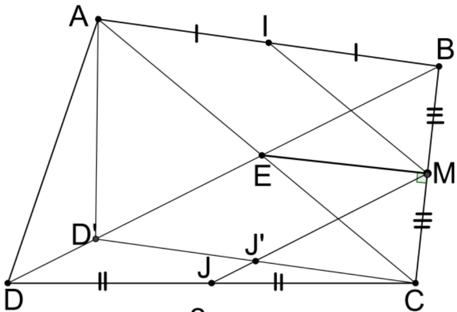
הטענה ההפוכה **איננה נכונה**, ואת ההוכחה לכך תיתן דוגמה של מרובע שאיננו טרפז ואשר מקיים את התנאים של הטענה הנ"ל.

הפרכת הטענה (על ידי דוגמה נגדית)

נתון ABCD מרובע קמור מיוחד שבו $CD \not\parallel AB$, והישר המחבר את נקודת חיתוך האלכסונים E עם הנקודה M, נקודת האמצע של הצלע BC, מאונך לצלע זו ($BM=MC$, $EM \perp BC$).

אזי הקטע EM חוצה את הזווית $\measuredangle IMJ$, כאשר הנקודות I ו-J הן נקודות אמצע של הצלעות AB ו-DC בהתאמה. כלומר יש להוכיח שהקטע EM חוצה את הזווית $\measuredangle IMJ$.

הוכחה



איור 2

בונים CD' מקביל ל-AB (D' היא נקודה על האלכסון BD). הנקודה E היא גם נקודת חיתוך האלכסונים בטרפז $ABCD'$. מסמנים ב-J' את נקודת החיתוך של הקטעים JM ו-CD'.

JM הוא קטע אמצעים במשולש ΔBCD, ועל כן הנקודה J' היא נקודת האמצע של הקטע CD', כנראה באיור 2. לכן על פי משפט 1, האנך EM לשוק BC של הטרפז $ABCD'$ הוא חוצה הזווית $\measuredangle IMJ'$ (כאשר I ו-J' הן נקודות האמצע של הצלעות AB ו-CD').

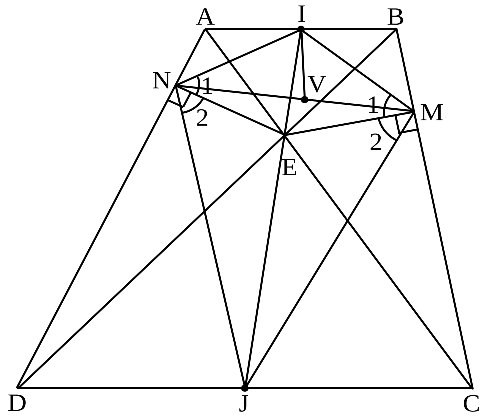
לכן ME חוצה זווית $\measuredangle IMJ$ במרובע ABCD שאינו טרפז.

הערה

את משפט 1 אפשר להוכיח בדרך אחרת (פרייברט, 2014, עמ' 398-399).

על פי משפט שטיינר לטרפז על כך שהנקודות J, E, I ו-F נמצאות על קו ישר ($AI = IB$, $DJ = JC$)

ועל פי פרופורציה של קטעים מקבילים, מוצאים שהנקודות הללו מהוות רביעייה הרמונית, כלומר : $\frac{JE}{EI}=\frac{FJ}{FI}$.



איור 3

הקטע FE הוא הקוטר של מעגל אפולוניוס שחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N.

מכאן שעל סמך המשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית, מקבלים ש-ME ו-NE (איור 3) חוצים את הזוויות $\measuredangle IMJ$ ו-$\measuredangle INJ$ בהתאמה.

תכונות הנובעות ממשפט 1

כשמורידים אנכים מנקודת חיתוך האלכסונים אל שוקי הטרפז, נוצר מרובע חסום IMJN (איור 3).

לפנינו שלוש תכונות של מרובע זה :

תכונה 1

המרובע IMJN הוא המרובע בעל ההיקף המינימלי מבין כל המרובעים IXJY שבהם הנקודות X ו-Y נמצאות על שוקי הטרפז BC ו-AD בהתאמה.

לפי משפט 1 התקבל : $\measuredangle M_1=\measuredangle M_2$, $\measuredangle N_1=\measuredangle N_2$.

ידוע גאומטרית שכאשר קרן יוצאת מנקודה אחת, פוגעת בישר וממנו מוחזרת אל נקודה שנייה, כך שזווית הפגיעה (הזווית בין הקרן לאנך לישר בנקודת הפגיעה) שווה לזווית ההחזרה, אזי סכום המרחקים שעברה הקרן הוא הקטן ביותר (הדבר נכון גם לגבי קרן-אור לפי העיקרון של פרמה).

לכן המסלול IMJ (IM+MJ) וכן המסלול INJ (IN+NJ) הם הקצרים ביותר, ועל כן ההיקף של המרובע IMJN הוא הקטן ביותר.

תכונה 2

חוצי הזוויות הנגדיות $\measuredangle MIN$ ו-$\measuredangle MJN$ של המרובע IMJN נפגשים על אלכסונו של המרובע.

חוצי הזוויות IMJ ו- INJ נפגשים בנקודה E של האלכסון IJ, ולכן על פי משפט חוצה הזווית :

$\frac{IM}{MJ}=\frac{IN}{NJ}\left(=\frac{IE}{EJ}\right)$, או בצורה אחרת : $\frac{IM}{IN}=\frac{JM}{JN}$ (*) .

נסמן ב-V את נקודת החיתוך של חוצה הזווית $\measuredangle MIN$ עם האלכסון MN (כנראה באיור 3).

לכן על פי משפט חוצה הזווית : $\frac{MI}{IN}=\frac{MV}{VM}$ (**) .

משתי הפרופורציות נובע כי $\frac{MJ}{JN}=\frac{MV}{VN}$, ומכאן נובע ש-JV הוא חוצה זווית $\measuredangle MJN$.

כלומר חוצי הזוויות נפגשים על האלכסון MN של המרובע.

תכונה 3

מפרופורציה (*) נובעת תכונה נוספת של המרובע IMJN :

המכפלה של אורכי זוג אחד של צלעות נגדיות שווה למכפלת אורכי הזוג השני של הצלעות הנגדיות.

משפט 2 (סימן לזיהוי טרפז)

אם יהיה ABCD מרובע קמור שבו $BC \nparallel AD$,

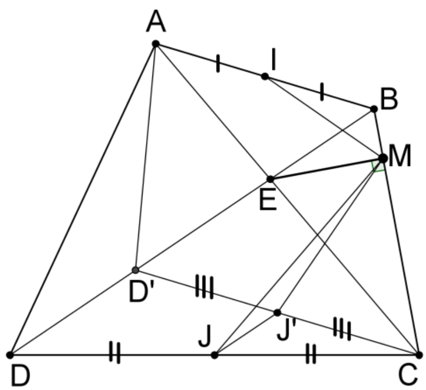
E נקודת חיתוך אלכסוניו, EM אנך לצלע BC,

אך איננו אנך אמצעי לצלע זו ($BM\neq MC$),

הנקודות I ו-J אמצעי הצלעות AB ו-CD בהתאמה

ו-ME חוצה זווית $\measuredangle IMJ$, כנראה באיור 4, אזי

$CD \parallel AB$, כלומר המרובע ABCD הוא טרפז.



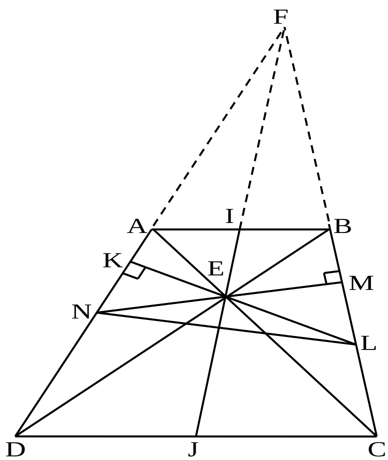
איור 4

הוכחה בדרך השלילה (איור 4):

נניח, ש- $CD \nparallel AB$. בונים 'CD מקביל ל-AB (הנקודה 'D נמצאת על האלכסון BD). מסמנים ב-'J את נקודת האמצע של הקטע 'CD.

בטרפז 'ABCD מתקיימים כל התנאים של משפט 1, לכן הקטע EM הוא חוצה זווית $\measuredangle IMJ'$. מכאן נובע ש-$\measuredangle EMJ = \measuredangle EMJ'$, כלומר הקרניים JM ו-J'M מתלכדות, והנקודה 'J שייכת לקטע JM. הקטע 'JJ הוא קטע אמצעים במשולש $\Delta CDD'$, ולכן הקטע 'JJ מקביל לישר 'BD. המשך הקטע 'JJ צריך לחתוך את הצלע BC בנקודת האמצע שלה. זוהי הנקודה M, כיוון שהוכח ש-'J שייכת לקטע JM. כלומר קיבלנו שהנקודה M היא אמצע הצלע BC – בסתירה לנתון ש- $BM\neq MC$. לכן, $CD \parallel AB$ והמרובע ABCD הוא טרפז.

משפט 3



איור 5

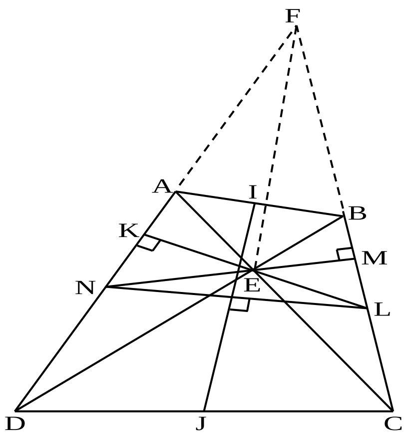
נתון ABCD טרפז ($AB \parallel CD$). E נקודת החיתוך של אלכסוניו.

הקטע MN עובר דרך הנקודה E ומאונך לצלע BC בנקודה M שעליה (הנקודה N על הצלע AD).

הקטע KL עובר גם הוא דרך הנקודה E ומאונך לצלע AD בנקודה K שעליה (הנקודה L על הצלע BC), כנראה באיור 5, אזי הקטעים IJ ו-NL מאונכים זה לזה.

הוכחה

המשכי שוקי הטרפז AD ו-BC נחתכים בנקודה F. על פי משפט שטיינר לטרפז, הנקודות F, I, E, J נמצאות על קו ישר. במשולש ΔNFL הנקודה E היא נקודת חיתוך הגבהים NM ו-KL. לכן הישר העובר דרך הנקודות F ו-E הוא הגובה השלישי של המשולש, כלומר $FE \perp NL$, ומכאן $NL \perp IJ$. גם הטענה ההפוכה נכונה, ותובא לה הוכחה במשפט הבא.



איור 6

משפט 4 (סימן לזיהוי טרפז)

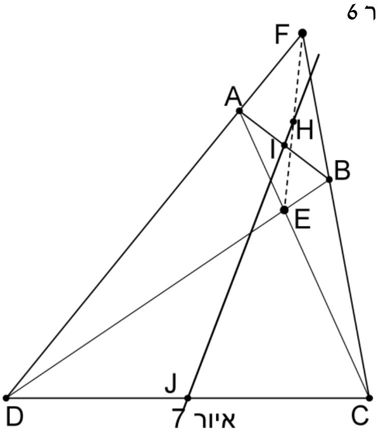
נתון ABCD מרובע קמור שבו $AD \nparallel BC$, הנקודה E היא נקודת חיתוך אלכסוניו, הקטע MN עובר דרך הנקודה E ומאונך לצלע BC, הקטע KL עובר דרך הנקודה E ומאונך לצלע AD. הנקודות I ו-J הן נקודות האמצע של הצלעות AB ו-CD בהתאמה. נתון $IJ \perp NL$ כנראה באיור 6. אז המרובע ABCD הוא טרפז.

להוכחת משפט 4 נשתמש במשפט העזר הבא:

משפט עזר:

נתון מרובע ABCD שצלעותיו הנגדיות

אינן מקבילות ($AD \nparallel BC$, $CD \nparallel AB$).



איור 7

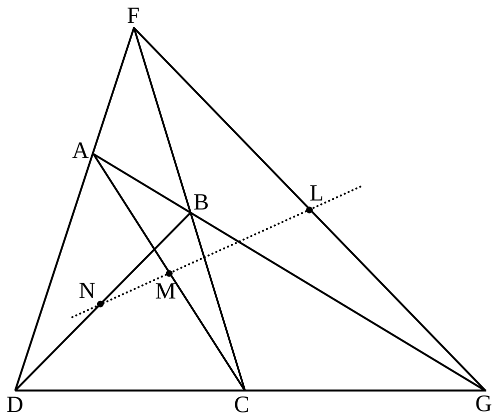
הנקודה E היא נקודת חיתוך האלכסונים, הנקודה F היא נקודת חיתוך של משכי הצלעות BC ו-AD, הנקודות I ו-J הן נקודות האמצע של

הצלעות AB ו-CD בהתאמה כנראה באיור 7, אז הנקודות E ו-F נמצאות משני צדי הישר המחבר את הנקודות I ו-J.

בהוכחת משפט עזר נשתמש במושג "מרובע שלם" ובתכונותיו (Hadamard, 2005, para. 145).

הגדרה:

המרובע השלם הוא צורה שמתקבלת ממרובע רגיל כלשהו, אם נמשיך את צלעותיו הנגדיות עד נקודות החיתוך שלהן. המרובע השלם מכיל שישה קדקודים, אשר נגדיים זה לזה בזוגות (ובפרט, שתי נקודות החיתוך הנוספות שהתקבלו מהוות זוג אחד של קדקודים נגדיים). הישר העובר דרך שני קדקודים נגדיים נקרא אלכסון של מרובע שלם.



איור 8

לדוגמה, באיור 8 מתואר מרובע שלם ABCDFG המתקבל מהמרובע ABCD על ידי המשכת הצלעות הנגדיות שלו עד נקודות חיתוכן F ו-G. הישרים AC, BD ו-FG הם אלכסוני המרובע השלם.

הוכחת משפט העזר מסתמכת על משפט המיוחס למנלאוס (Hadamard, 2005, para. 194): **במרובע שלם, אמצעי האלכסונים נמצאים על קו ישר.**

במרובע השלם ABCDFG הנקודות L, M, N הן אמצעי האלכסונים FG, AC, BD בהתאמה. לכן הן נמצאות על אותו קו ישר, כנראה באיור 8.

בהתייחס לאיור 6, האלכסונים של המרובע השלם AFBECD הם EF, DC, AB, ונקודות האמצע של האלכסונים הללו הן H, J ו-I בהתאמה.

לכן ברור שהישר IJ חוצה את האלכסון EF, ולכן הנקודות E ו-F הן בשני צדדים שונים של הישר.

הוכחת משפט 4

נוכיח שבהתחשב בשאר הנתונים, בלתי אפשרי ש- $CD \not\parallel AB$.

הנקודה E היא נקודת חיתוך הגבהים NM ו-KL במשולש ΔFLN (כנראה באיור 6).

לכן על הישר FE מונח הגובה השלישי של המשולש, ועל כן הוא מאונך ל-NL. לפי הנתונים גם הישר IJ מאונך ל-NL. לכן $IJ \parallel EF$. לפי משפט העזר הנ"ל, הנקודות E ו-F נמצאות משני צדי הישר IJ. לכן EF ו-IJ נחתכים. נוצרה סתירה, ולכן $CD \parallel AB$ והמרובע ABCD הוא טרפז.

סיכום

במאמר זה הוצגו (בצורה של משפט וההוכחה שלו) ארבע התכונות החדשות של טרפז אקראי:

1. האנך לשוק של טרפז היוצא מנקודת חיתוך אלכסוניו, הוא חוצה זווית ששוקיה יוצאות מבסיס האנך ועוברות דרך אמצעי הבסיסים של הטרפז.
2. (סימן של טרפז). אם אנך לצלע של מרובע קמור היוצא מנקודת חיתוך אלכסוניו, אינו אנך אמצעי לצלע זו, אך הוא גם חוצה את הזווית ששוקיה יוצאות מבסיס האנך ועוברות דרך אמצעי שתי הצלעות הסמוכות לצלע זו, אז המרובע הוא טרפז.
3. אם שתי נקודות החיתוך של הישרים שמאונכים לשוקי הטרפז ועוברים דרך נקודת חיתוך אלכסוניו, הן לא קדקודי הזוויות הישרות, אז הקטע המחבר את הנקודות הוא קטע שמאונך לקטע האמצעים של בסיסי הטרפז.
4. (סימן של טרפז). אם שני ישרים המאונכים לזוג צלעות נגדיות של מרובע קמור והעוברים דרך נקודת חיתוך אלכסוניו, חותכים את הצלעות בשתי נקודות שאינן קדקודי הזוויות הישרות, כך שהקטע המחבר את הנקודות הללו מאונך לקטע האמצעים של שתי הצלעות הנגדיות האחרות, אז המרובע הוא טרפז.

הוצגו דוגמאות ליישום התכונות בפתרון בעיות אחרות:

א. יישום תכונות 1 ו-3 בהוכחת תכונות 2 ו-4.

ב. שלוש מסקנות הנובעות מתכונה 2.

אנו מניחים שאפשר ליישם את התכונות לעיל בפתרון בעיות ידועות בהנדסת המישור וביצירת בעיות חדשות.

רשימת מקורות

פרייברט, ד' (2006). אלגברה של טרפז אקראי: מערכת נוסחאות ויישומה להתרת בעיות גיאומטריות בדרך אלגברית. **תלפיות**, **13-14**, 339-350.

פרייברט, ד' (2014). חקירה של תמונות מצב גאומטריות בתהליך ספירלי של אינדוקצייה ודדוקצייה. **שאנן**, **20**, 397-405.

פרייברט, ד', סטופל, מ' וחריר, ש' (2008). בידינו סרגל בלבד, כיצד נבנה אנך לישר? ***על"ה***, ***39***, 27-33.

Fraivert, D., & Stupel, M. (2014). Development and implementation of algebraic formulas for calculation in trapezoids. In *The book of the international conference "Mathematical education: Current state and future perspectives". Dedicated to the 95th anniversary of Prof. A. A. Stolyar* (pp. 287-296). A. Kuleshov University' Mogilev, Beloruse State.

Hadamard, J. (2005). *Leçons de géométrie élémentaire*. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Library.

Josefsson, M. (2013). Characterizations of trapezoids. *Forum Geometricorum, 13,* 23-35.

Oxman, V., & Stupel, M. (2014). Vector algebra as a tool for developing formulas in the trapezoid. *Far East journal of Mathematical Sciences, 88*(2), 241-256.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's theorem for trapezoids: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal, 27*(2), 6-24.

Stupel, M., Oxman, V., & Sigler, A. (2014). More on geometrical constructions of a tangent to a circle with a straightedge only. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 8*(1), 17-30.