

## תכונות נסתרות של משולש שווה-צלעות – גילוי בשילוב כלי טכנולוגי

### תקציר

למשולש שווה-צלעות קיימות כמה תכונות מוכרות. במסגרת מחקר מעמיק המלווה בחקר דינמי – נמצאו עוד שש עשרה תכונות מפתיעות, שחלקן הגדול אינו מוכר. תהליך החקר המלווה בכלי הטכנולוגי עסק בשאלות חקר, כגון "מה אם לא?", "מה אם עוד?". כל תכונה מלווה בהוכחה מתמטית פורמלית כנדרש – תוך שימוש בכלים מתמטיים מגוונים, המזמנים שילוב בין נושאי המתמטיקה האחרים. במאמר שולבו כמה יישומונים, המאפשרים לקוראי המאמר להתנסות בחלק דינמי של התכונות המפתיעות.

**מילות מפתח:** מקומות גאומטריים; שימור ושינוי; חקר דינמי ממוחשב.

### הקדמה

אחת המטרות של למידת גאומטריה אוקלידית היא לזמן לתלמידים היכרות עם תחום מובנה, כאשר הגאומטריה היא עולם התוכן, אשר באמצעותו אפשר ללמוד מהו מבנה היסק, הכולל פיתוח מיומנויות חשיבה והנמקה המבוססות על שימוש מושכל ומדויק בהגדרות, בטענות ובמשפטים.

Student should enter high school understanding the properties of, and relationship among, basic geometric objects. This knowledge can be extended and applied in various ways. Students should become increasingly able to use deductive reasoning to establish or refute conjectures and should be able to use establish knowledge to deduce information about other situations (NCTM, 2000, p. 310).

הוראת גאומטריה בבית הספר העל-יסודי כוללת למידה של אוסף מוגבל של משפטים, אשר משלבים התלמידים בתהליך פתרון בעיות חישוב ובעיות הוכחה גאומטריות. השימוש החוזר ונשנה באותם משפטים עשוי להוביל את התלמידים לחשוב, כי אוסף מוגבל זה של משפטים הוא סופי ואין אפשרות להרחיבו, ולכן הם אינם יורדים לעומקה של המתמטיקה כמדע המתפתח ללא הפסקה.

פטקין ופלסקין (2008) ממשילות את למידת הגאומטריה לסיור באתר העשיר בפריטים ובחפצים מעניינים, אך ה"מבקרים" בו לא רק שלא נחשפים לקיומם, אלא הם אף יוצאים מהאתר, כשהם משוכנעים שמסלול הסיור שבו טיילו הוא כל האתר, וכי אסור לסטות מהמסלול.

קיימת חשיבות רבה לתהליכי חקר וגילוי של אובייקטים גאומטריים המזמנים ללומד את הבנת המושג בהדרגה ואף מביאים להרחבה ולהעמקה של הידע המתמטי של אותו לומד (דוד, 2006). יש לעצב את חשיבת הלומד באמצעות חשיפה לסוגי הוכחות מגוונות, המובאות בדרכים אחרות. במאמר הנוכחי נציג עוד תכונות לא מוכרות של משולש שווה-צלעות, שהתקבלו לאחר תהליך חקר שביצענו בשילוב תכנה גאומטרית דינמית (Geogebra), אשר אפשר לשלב ולהציג כפעילות חקר בהוראת גאומטריה הן לתלמידים בסביבת הכיתה, לפרחי הוראה בתהליך הכשרתם והן למורים מנוסים במהלך השתלמות. התכונות התגלו במהלך הוראת סטודנטים במכללות להוראה במסגרת הוראת קורסים למיניהם, כולל קורסים המשלבים את הכלי הטכנולוגי בהוראת גאומטריה.

### שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת

מחקרים בחינוך מחפשים דרכים לשפר את איכות ההוראה והלמידה, ומתוך כך הם מתמקדים גם בשילוב הטכנולוגיה בהוראה. הכלי הטכנולוגי מאפשר לבנות ולהציג אובייקטים מתמטיים באופן דינמי – תוך כדי מתן משוואות במהלך פתרון בעיות (Alakoç, 2003; Martinovic & Manizade, 2013). למידה המשלבת שימוש בתכנה דינמית, מאפשרת ללומדים לגלות תופעות מתמטיות, מודלים מתמטיים, ייצוגים מגוונים, הכללות וקשרים בין תיאורים גרפיים בלויית מושגים מתמטיים (Wiest, 2001).

אחד הקשיים הקיימים אצל הלומדים בלימוד גאומטריה אוקלידית הוא הבנת ההכללה של תכונות משותפות לאוסף של אובייקטים מתמטיים. בלמידה באמצעות כלי טכנולוגי – הלומדים יכולים לתאר טוב יותר מושגים וקשרים מתמטיים בהשוואה להוראה שאינה משלבת כלי טכנולוגי. הלומדים משיגים הבנה טובה יותר של מושגים מופשטים אלה והם מוגגשים עם רעיונות מתמטיים ברמה גבוהה (Hohenwarter, Hohenwarter, & Lavicza, 2008).

התכונות של משולש שווה-צלעות המוצגות במאמר הנוכחי משמשות קרקע פורייה למשימות החקר המתאימות לשילוב בהוראת הנושא בקרב סטודנטים ומורים בפועל – כחלק מהתכנית להכשרתם לקראת הוראת המקצוע וכן לצורך העמקת הידע המתמטי של מורים בפועל. את הפעילויות המוצגות אפשר ללוות באמצעות שימוש בתכנה דינמית (D.G.S), הנקראת במאמר זה Geogebra.

השימוש בתכנה דינמית מסייע לתלמידים לפתור בעיות באמצעות למידה מדוגמאות. התלמידים מסיקים מהדוגמאות את ההליכים המהותיים, עוקבים אחרי התכונות הקריטיות של המושג, מפנימים אותן ומיישמים אותן בהמשך בפתרון בעיות חדשות. יכולתו של המחשב ליצור במהירות דוגמאות רבות ומגוונות, לשמר ולשחזר הליכים ולספק משוואות איכותיות ולא רק שיפוטי – מספקת ללומד מידע על המושג המתמטי המשמש בסיס להכללות והשערות הדורשות הוכחה (Chazan, 1993; Dreyfus & Hadas, 1996; Hanna, 2000; Laborde, 2000; Wiest, 2001).

It was clear, early on, that the computer offered the possibility of mathematical experimentation along visual, numerical, and symbolic/algebraic and logical lines; it offered the possibility of "mechanical" or "automatic" proof, and the possibility of the discovery or generation of new theorems (Davis, 1995, p. 209).

תלמידים החווים תהליכי הוראה המשלבים טכנולוגיה – נמצאו כיותר מתעניינים בלמידת מתמטיקה ואף הראו שיפור בביצועים שלהם (NCTM, 2010).

שיפור דרכי ההוראה צריך לכלול, בין השאר, הגשה של משימות חדשניות על-ידי שילוב של דרכי הוראה קיימות וכן פריצה לדרכי הוראה חדשניות יותר (Herbst & Chazan, 2012). שילוב הכלי הטכנולוגי בהוראת גאומטריה מאפשר סביבה פדגוגית חדשנית, המאפשרת פריצה לדרכי הוראה חדשניות המציגות את עולם התוכן באופן דינמי המאפשר גילוי של תכונות נסתרות.

הגילוי של טכנולוגיות חדשות בעשורים האחרונים, המציגות את האלגברה, את הגאומטריה ואת האנליזה באופן ויזואלי וגרפי, ובעיקר הגאומטריה הדינמית – מעמידות את המורה שוב בחזית של סביבה פדגוגית חדשנית. הטכנולוגיה מאפשרת להגיש את התוכן באופן אבסולוטי פחות ומזמנת אפשרויות גילוי וחקר (Goodchild & Sriraman, 2012; Moreno & Shriraman, 2005).

## משולש שווה-צלעות

לפי הגדרתו, משולש שווה-צלעות הוא משולש בעל שלוש צלעות באורך שווה. מתוך הגדרה זו נובעת התכונה שגם זוויותיו שוות וכל אחת מהן בת  $60^\circ$ .

לכאורה, כשמתבוננים במשולש שווה-צלעות, הוא מקרין ייחודיות פשוטה בהשוואה לשאר סוגי המשולשים: שוני הצלעות, שווי-השוקיים, ישרי-הזווית, חדי-הזווית וקהי-הזוויות. מתברר, שלא כך הוא המצב. למשולש שווה-צלעות ישנן תכונות ייחודיות רבות מאוד שרובן מוכרות לעוסקים בגאומטריה אוקלידית. ככל שמעמיקים לחוקרו מתגלות עוד תכונות, חלקן מפתיעות, ולא היו מוכרות לנו.

גילוי התכונות התבצע בהצגת רעיונות ובדיקת נכונותם על-ידי שילוב בין כלים מתמטיים מגוונים מתוך שימוש במשפטים מוכרים. התכונות האחרות "החדשות", התגלו במהלך קורסים מתקדמים לפרחי הוראה במתמטיקה לחינוך העל-יסודי. הקורסים היו בעיות נבחרות בגאומטריה אוקלידית, אסטרטגיות לפתרון בעיות במתמטיקה, שילוב תחומים במתמטיקה וסמינריון מתמטי מחקרי.

לפני שתוצגנה התכונות "האחרות", נזכיר את רוב התכונות והדברים הידועים בהקשר למשולש שווה-צלעות:

- \* חוצה הזווית, התיכון והגבוה, היוצאים כולם מאותו קדקוד – מתלכדים זה עם זה ועם האנך האמצעי של הצלע מול הקדקוד.
- \* כל חוצי-הזוויות, התיכונים, הגבהים והאנכים האמצעיים של המשולש – נחתכים בנקודה אחת.
- \* נקודת החיתוך שלהם היא הן מרכז המעגל החוסם את המשולש והן מרכז המעגל החסום

במשולש.

- \* שלושת התיכונים של המשולש מחלקים אותו לשישה משולשים חופפים (תכונה זו נכונה גם לשאר הקווים: חוצי-זוויות, גבהים וכדומה). חשוב גם לציין, שבמשולש כלשהו מתקבלים שישה משולשים שווי-שטח שאינם חופפים.
- \* כשמחברים את עקבות הגבהים על צלעות המשולש, מתקבלים ארבעה משולשים שווי-צלעות חופפים.

\* שטחו של משולש שווה-צלעות הוא  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , כאשר  $a$  מסמן את אורך צלע המשולש.

\* ערכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , ורדיוס המעגל החסום הוא מחצית ערכו של רדיוס המעגל החוסם ( $r = \frac{1}{2}R$ ).

\* סכום המרחקים של נקודה כלשהי במשולש שווה-צלעות מצלעות המשולש הוא קבוע ושווה לגובה  $h$  של המשולש ( $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ).

כמו כן ידועים קשרים בין צלעות של משולשים וכן קשרים בין זוויות של משולשים, שאם אכן הם מתקיימים, אז המשולש הוא שווה-צלעות.  
להלן כמה דוגמאות של קשרים אלו:

\* אם במשולש  $\gamma = 60^\circ$  וגם  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{4}$ , אז המשולש הוא שווה-צלעות.

\* אם במשולש הצלעות מקיימות את הקשר  $a^2 - ab + b^2 = c^2$  וזוויותיו – את הקשר  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{4}$ , אזי המשולש הוא שווה-צלעות.

\* אם במשולש הזוויות מקיימות את הקשר  $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \gamma) \cos(\beta - \gamma) = 1$ , אזי המשולש הוא שווה-צלעות.

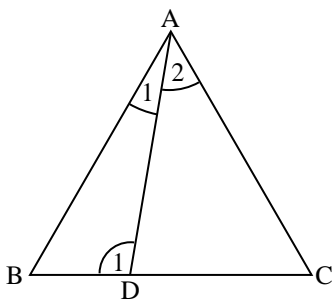
ככל שמתבוננים יותר במשולש שווה-צלעות ומפעילים חשיבה רב-כיוונית, אפשר לגלות תכונות וקשרים אחרים. התהליך של החקר והגילוי תורם בצורה משמעותית להשבת החינוך המתמטי, הן של פרחי הוראה והן של תלמידי החינוך העל-יסודי.

## תכונות נסתרות של משולש שווה-צלעות

### תכונה 1

נתון משולש שווה-צלעות  $\Delta ABC$ .

$D$  היא נקודה כלשהי על  $BC$  (ראה איור 1).



איור 1

אזי קיים:

$$AD > BD, DC$$

$$AD < AB$$

**יישומון 1:** הוכן יישומון המדגים את אי-השוויון בין אורכי קטעים במשולש שווה-צלעות

Links 1: <http://tube.geogebra.org/m/2804121>

<https://www.geogebra.org/apps/?id=kzLwaGXm>

### הוכחה

$$\angle D_1 > \angle C = 60^\circ, \text{ לכן, } \angle D_1 > \angle B = 60^\circ.$$

מכאן,  $AB > AD$ , כי במשולש  $\triangle ABD$  מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה.

כל אחת מהזוויות  $\angle A_1$  ו-  $\angle A_2$  קטנה מ-  $60^\circ$ .

לכן במשולש  $\triangle ABD$ ,  $BD < AD$ , כי  $\angle B > \angle A_1$ ,

ובמשולש  $\triangle ADC$ ,  $DC < AD$ , כי  $\angle C > \angle A_2$ .

### תכונה 2

נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$ .

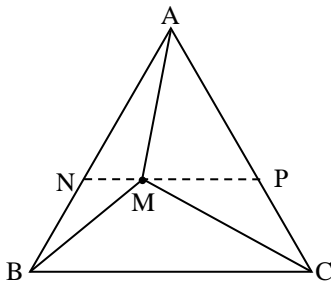
הנקודה M נקודה פנימית כלשהי (ראה איור 2).

אזי:

AM, BM, CM הם קטעים המקיימים את אי-השוויון של המשולש (כלומר

$$AM + CM > BM, AM + BM > CM,$$

$$(BM + CM > AM)$$



איור 2

**יישומון 2:** הוכן יישומון המדגים שאורכי הקטעים הנוצרים מחיבור נקודה כלשהי בתוך משולש שווה-צלעות אל קדקודי המשולש, מקיימים את אי-שוויון המשולש.

Links 2: <http://ggbtu.be/m2804279>

<https://www.geogebra.org/apps/?id=exgeUmug>

**הוכחות**

**דרך I**

דרך הנקודה M מעבירים מקביל לצלע BC, החותך את AB ואת AC בנקודות N ו-P באיור 2. ברור ש-  $MB+MC > BC$  (סכום שתי צלעות במשולש). לפי תכונה 1,  $NP > AM$  (כי משולש  $\triangle ANP$  הוא משולש שווה-צלעות). כמו כן, ברור ש-  $BC > NP$ , וכולן  $BM+MC > AM$ .

**דרך II**

בונים  $\angle A_1 = \angle A_2$  כנראה באיור 3.

על קרן הזווית  $A_2$  מקצים קטע  $AQ=AM$ .

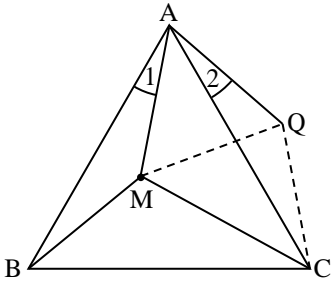
ברור ש-  $\angle AMQ = 60^\circ$ , ולכן משולש  $\triangle AMQ$

הוא שווה-צלעות, כלומר  $MQ=AM=AQ$ .

מתקיים:  $\triangle ABM \cong \triangle ACQ$  (לפי צ.ז.צ),

לכן במשולש  $\triangle MQC$  אורכי הצלעות:

$CM$  ו-  $QC=BM$ ,  $QM=AM$  מקיימות את אי-השוויון של המשולש.



איור 3

**תכונה 3**

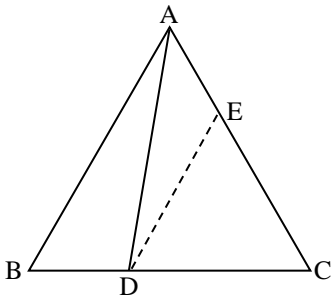
נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$ .

D היא נקודה כלשהי על הצלע BC (ראה איור 4).

אזי:

מהקטעים AD, BD ו-DC אפשר לבנות משולש שאחת

מזוויותיו היא בת  $120^\circ$ .



איור 4

**הוכחה**

מעבירים DE מקביל ל-AB.

ברור, שמשולש  $\triangle DEC$  הוא שווה-צלעות ולכן  $DC=DE$ .

הטרפז AEDB הוא טרפז שווה-שוקיים, ולכן  $BD=AE$ .

מכאן נובע שאורכי הצלעות של המשולש  $\triangle AED$  הם הקטעים: AD, BD ו-CD.

במשולש  $\triangle AED$  הזווית  $\sphericalangle AED = 120^\circ$  (זווית צמודה לזווית של  $60^\circ$ ), ובכך הוכחה התכונה.

#### תכונה 4

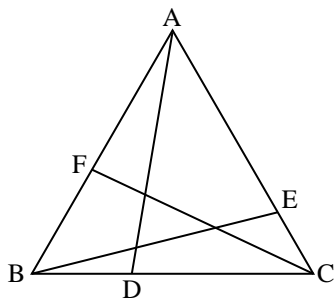
נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$ .

הנקודות  $D, E, F$  ממוקמות במקומות כלשהם

על הצלעות  $BC, AC, AB$  בהתאמה (ראה איור 5).

אזי:

אורכי הקטעים:  $AD, BE, CF$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש, והמשולש שאפשר לבנות מהם הוא חד-זוויות.



איור 5

#### הוכחה

די להוכיח, ללא פגיעה בכלליות, ש-  $AD^2 + CF^2 > BE^2$ , כי אם אכן זה מתקיים, אז ברור שמתקיים  $AD+CF > BE$ .

מסמנים את  $a$  ו- $h$  את אורך הצלע והגובה של המשולש  $\triangle ABC$  ( $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ).

$$a^2 > AD^2 \geq h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \text{לפי תכונה 1:}$$

$$a^2 > CF^2 \geq h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$a^2 > BE^2 \geq h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

מחברים את שני האי-שוויונים הראשונים, ובהתייחס לאי-שוויון השלישי – מקבלים:

$$AD^2 + CF^2 \geq 2h^2 = \frac{3}{2}a^2 > BE^2$$

$$AD^2 + BE^2 > CF^2 \quad \text{באותה הדרך מקבלים:}$$

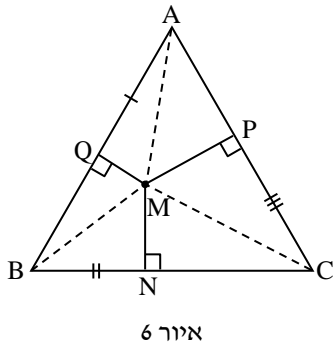
$$CF^2 + BE^2 > AD^2$$

ההוכחה שהמשולש שצלעותיו הן הקטעים  $AD, BE, CF$  הוא חד-זוויות, מתקבלת משימוש

$$\text{במשפט הקוסינוסים שלפיו: } \cos \alpha = \frac{\ell^2 + c^2 - a^2}{2\ell c}$$

כאשר  $\ell^2 + c^2 > a^2$ , אזי  $\cos \alpha > 0$ , ולכן  $\alpha < 90^\circ$ , וכך גם לשאר הזוויות של המשולש.

## תכונה 5



נתון משולש שווה-צלעות  $\Delta ABC$ .

M היא נקודה כלשהי בתוך המשולש, וממנה הורדו גבהים לצלעות המשולש (ראה איור 6).

מסמנים ב-N, P, Q את נקודות החיתוך של הגבהים על צלעות המשולש.

$$\text{יש להוכיח שקיים: } AQ+BN+CP=\frac{3}{2}a$$

כלומר, יש להוכיח שללא תלות במיקום הנקודה M סכום הקטעים הנ"ל שווה למחצית היקף המשולש.

**יישומון 3:** הוכן יישומון המדגים שהגבהים לצלעות מנקודה כלשהי במשולש שווה-צלעות יוצרים על צלעות המשולש סכום קטעים קבוע השווה למחצית היקף המשולש.

Links 3: <http://ggbtu.be/m2804329>

<https://www.geogebra.org/apps/?id=hA4KszYB>

## הוכחה

לפי משפט פיתגורס במשולשים  $\Delta AQM$  ו- $\Delta BQM$ :

$$OM^2 = AM^2 - AQ^2 = BM^2 - BQ^2 \Rightarrow AM^2 - BM^2 = AQ^2 - BQ^2$$

באותו אופן, עבור שני הזוגות האחרים של המשולשים, מקבלים:

$$BM^2 - MC^2 = BN^2 - NC^2$$

$$MC^2 - AM^2 = PC^2 - AP^2$$

כשמחברים את האגפים של שלוש המשוואות, מקבלים:

$$AQ^2 + BN^2 + PC^2 = BQ^2 + NC^2 + AP^2$$

על-ידי ביטוי הקטעים BQ, NC, AP ו-AP באמצעות הצלע a של המשולש – מקבלים:

$$3a^2 - 2a(AQ + BN + PC) = 0$$

או,  $AQ+BN+CP=\frac{3}{2}a$ , או במילים, מחצית היקף המשולש.

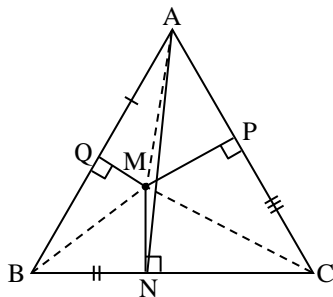


## תכונה 6

בהינתן אותם הנתונים שמופיעים בתכונה 5, אזי קיים:

$$2(MN+MP+QM) \leq AM+BM+CM$$

והשוויון מתקיים כאשר הנקודה M היא נקודת-המפגש של הגבהים במשולש.



איור 7

### הוכחה

(1)  $AM+MN \geq AN \geq h$  ברור ש:

באותה הדרך אפשר להגיע גם לקשרים:

(2)  $CM+MQ \geq h$

(3)  $BM+MP \geq h$

על-ידי חיבור קשרים (1)-(3) מקבלים:

$$(AM+BM+CM) + \underbrace{(MN+MQ+MP)}_h \geq 3h$$

על-פי התכונה הידועה שסכום מרחק נקודה כלשהי במשולש שווה-צלעות המשולש הוא גודל קבוע, השווה לגובה המשולש, דהיינו,  $MN+MQ+MP=h$ , מקבלים:  $AM+BM+CM \geq 2h$ , ולכן,  $AM+BM+CM \geq 2(MN+MP+MQ)$ .

## תכונה 7

בהינתן אותם הנתונים שמופיעים בתכונה 6, אזי הגדלים  $AM \cdot MN$ ,  $BM \cdot MP$ ,  $CM \cdot MQ$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

### הוכחה

בשלב הראשון מוכיחים את הטענה הטריגונומטרית הבאה:

אם הזוויות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  מקיימות את  $\alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$  וכן ש-  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$

אזי הגדלים  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

### הוכחת הטענה הטריגונומטרית

אם  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  הן זוויות של משולש שצלעותיו הן  $a, b$  ו- $c$  בהתאמה, הרי שלפי משפט

$$a=2R \sin \alpha_1, \quad b=2R \sin \beta_1, \quad c=2R \sin \gamma_1$$

היות שאורכי הצלעות  $a, b, c$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש, אזי גם  $\sin \alpha_1, \sin \beta_1, \sin \gamma_1$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

$$\text{כשמסמנים: } \alpha=180^\circ-\alpha_1, \quad \beta=180^\circ-\beta_1, \quad \gamma=180^\circ-\gamma_1, \text{ אזי מתקיים:}$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_1, \quad \sin \beta = \sin \beta_1, \quad \sin \gamma = \sin \gamma_1 \text{ וגם } \alpha+\beta+\gamma=360^\circ.$$

מכאן ברור, שגם  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

### הוכחת הטענה

מכפילים את כל אחת מהמכפלות  $AM \cdot MN, BM \cdot MP, CM \cdot MQ$  ב- $\frac{a}{2}$  ומקבלים:

$$AM \cdot MN \cdot \frac{a}{2} = AM \cdot \frac{MN \cdot a}{2} = AM \cdot S_{\Delta BMC} = \frac{AM \cdot BM \cdot CM}{2} \cdot \sin \angle BMC$$

$$BM \cdot MP \cdot \frac{a}{2} = BM \cdot S_{\Delta AMC} = \frac{AM \cdot BM \cdot CM}{2} \cdot \sin \angle AMC$$

$$CM \cdot MQ \cdot \frac{a}{2} = CM \cdot S_{\Delta AMB} = \frac{AM \cdot BM \cdot CM}{2} \cdot \sin \angle AMB$$

בכל אחת משלוש המכפלות האחרונות ישנו גורם משותף מוכפל בסינוס זווית.

כיוון שהוכח ש- $\sin \angle AMB, \sin \angle AMC, \sin \angle BMC$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש, לכן ברור שגם הגדלים  $AM \cdot MN, BM \cdot MP, CM \cdot MQ$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

### תכונה 8

באותם הנתונים שמופיעים בתכונה 6, אזי קיים:

$$\frac{AM}{QP} = \frac{BM}{QN} = \frac{CM}{PN}$$

במילים אחרות, יש להוכיח שהמשולש  $\Delta QNP$  דומה למשולש שאפשר לבנות מהקטעים בעלי האורכים  $AM, BM, CM$ .

### הוכחה

המרובע AQMP הוא בר-חסימה במעגל אשר בו AM יהיה קוטר.

לפי משפט הסינוסים במשולשים  $\Delta AQP$  מקבלים: (1)  $QP=AM \cdot \sin 60^\circ$

ממשיכים כך לגבי המרובעים BQMN ו-CPMN מקבלים באותה הדרך :

(2)  $QN=BM \cdot \sin 60^\circ$

(3)  $PN=CM \cdot \sin 60^\circ$

משלושת הקשרים (1)-(3) מקבלים :  $\frac{AM}{QP} = \frac{BM}{QN} = \frac{CM}{PN} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$

### תכונה 9

באותם הנתונים שמופיעים בתכונה 6, אזי קיים :  $S_{\Delta QPN} \leq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

#### הוכחה

בשלב הראשון נוכיח אי-השוויון הזהותי הבא :

$$(1) (x + y + z)^2 \geq 3xy + 3xz + 3yz$$

למטרה זו מוכיחים תחילה, שקיים אי-השוויון הזהותי הבא :

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

ההוכחה מסתמכת על חיבור שלושה אי-שוויונים ידועים :

$$((x - y)^2 \geq 0 \text{ כי } x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$y^2 + z^2 \geq 2yz$$

$$x^2 + z^2 \geq 2xz$$

#### הוכחת אי-שוויון (1)

לפי פתיחת סוגריים :  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

על-ידי הצבת אי-שוויון (2) מקבלים :  $(x + y + z)^2 \geq 3xy + 3yz + 3xz$

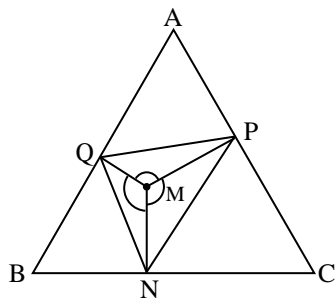
מסמנים את המרחקים מהנקודה M לצלעות :

$MN=x$

$MP=y$

$QM=z$

על-פי התכונה שכבר הוזכרה :  $h=x+y+z$  גובה המשולש, ומכאן :



איור 8

$$h^2 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz) = 3 \left[ \frac{2 S_{\Delta QMN}}{\sin 120^\circ} + \frac{2 S_{\Delta MDN}}{\sin 120^\circ} + \frac{2 S_{\Delta QMP}}{\sin 120^\circ} \right] =$$

$$= \frac{6 S_{\Delta QMN}}{\sin 120^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} S_{\Delta QNP}$$

$$S_{\Delta QNP} \leq \frac{\sqrt{3}}{12} h^2 \quad \text{או:}$$

ידוע שהביטוי לשטח משולש שווה-צלעות באמצעות הגובה  $h$  הוא:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow h^2 = \sqrt{3} S_{\Delta ABC}$$

ומכאן, על-ידי הצבה באי-השוויון שהתקבל:

$$S_{\Delta QNP} \leq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$$

המקסימום של שטח המשולש  $\Delta QNP$  מתקבל כאשר  $x=y=z$ ,

כלומר הנקודה  $M$  היא נקודת-המפגש של גובהי-המשולש, חוצי-הזוויות של המשולש ותיכוני המשולש.

## 10 תכונה

לא ייתכן, שקדוקדי משולש שווה-צלעות יהיו נקודות סריג של מערכת צירים קרטזית (נקודת סריג היא נקודה, ששני השיעורים שלה הם מספרים שלמים).

### הוכחה

ההוכחה תינתן בדרך השלילה.

אם אורך צלע המשולש הוא  $a$ , הרי ששטחו  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .

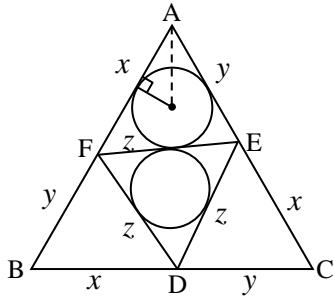
אם הנקודות  $A$  ו- $B$  נקודות סריג, אז ברור ש- $a^2$  הוא מספר שלם, על-פי משפט פיתגורס. אבל אם גם  $C$  היא נקודת סריג, אזי שטח המשולש הוא מספר שלם או מחצית מספר שלם, וזאת לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש במערכת צירים:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

לכן מתחייב שהביטוי לשטח  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  יהיה רציונלי.

במקרה זה נוצרת סתירה כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.

### תכונה 11



איור 9

נתון משולש שווה-צלעות  $\Delta ABC$  שעל צלעותיו:  $AB, BC$ , סומנו הנקודות  $E, D, F$  בהתאמה. מיקום הנקודות על הצלעות מבוסס על העובדה ש- $AF=BD=CE$  (ראה איור 9).

$$\text{יהיו: } r_{\Delta ABC}, r_{\Delta DEF}, r_{\Delta AFE}$$

הרדיוסים של המעגלים החסומים במשולשים:  $\Delta ABC, \Delta DEF, \Delta AFE$  בהתאמה.

$$\text{אזי קיים: } r_{\Delta AFE} + r_{\Delta DEF} = r_{\Delta ABC}$$

**יישומון 4:** הוכן יישומון המדגים את הקשר בין הרדיוסים של המעגלים החסומים.

Links 4: <http://ggbtu.be/m2804353>

<https://www.geogebra.org/apps/?id=gH9o5BmD>

### הוכחה

$$\text{מסמנים: } AF=BD=CE=x$$

$$BF=DC=EA=y$$

$$EF=FD=DE=z$$

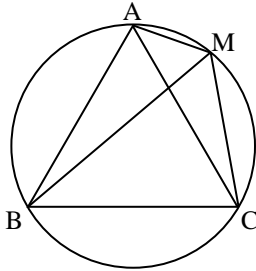
$$(1) \quad r_{\Delta AFE} = \frac{x+y-z}{2} \cdot \text{tg } 30^\circ \quad \text{על-פי הסימון, אפשר לרשום:}$$

$$(2) \quad r_{\Delta DEF} = \frac{z}{2} \cdot \text{tg } 30^\circ$$

$$(3) \quad r_{\Delta ABC} = \frac{x+y}{2} \cdot \text{tg } 30^\circ$$

ועל-ידי חיבור הקשרים (1) ו-(2) מקבלים את קשר (3).

## תכונה 12



איור 10

נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$  בעל צלע באורך  $a$  החסום במעגל.

הנקודה  $M$  היא נקודה כלשהי על היקף המעגל (על הקשת הקטנה  $AC$  כנראה באיור 10).

אזי קיים:

$$AM+CM=BM \quad (\text{א})$$

$$MA^2+MB^2+MC^2=2a^2 \quad (\text{ב})$$

### הוכחות

#### סעיף א

לפי משפט תלמי, במרובע  $AMCB$  קיים:  $AM \cdot BC + MC \cdot AB = MB \cdot AC$ .

אבל  $AB=BC=CA=a$ , ולכן:  $AM+CM=MB$ .

#### סעיף ב

$\angle AMC = 120^\circ$ , לפי מרובע חסום במעגל, ועל-כן על-פי משפט הקוסינוסים במשולש  $\triangle AMC$  קיים:

$$AM^2 + MC^2 + AM \cdot MC = a^2$$

לפי המסקנה של סעיף א של התכונה, מקבלים:

$$AM^2 + MC^2 + AM \cdot (MB - MA) = a^2$$

$$AM^2 + MC^2 + MC \cdot (MB - MC) = a^2$$

וגם:

כשמחברים את שני האגפים, מקבלים:

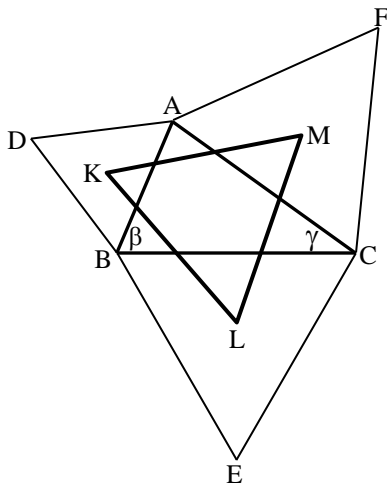
$$MC^2 + AM \cdot MB + AM^2 + MC \cdot MB = 2a^2$$

$$MC^2 + AM^2 + MB \cdot \frac{AM+MC}{MB} = 2a^2$$

או:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2 \quad \text{ולכן:}$$

### תכונה 13



איור 11

על צלעותיו של משולש  $\triangle ABC$  נבנו משולשים שוי-צלעות, כך שכל אחד מהם הוא מחוץ למשולש הנתון (ראה איור 11).

אזי קיים:

מרכזי המעגלים החוסמים את שלושת המשולשים האלה, הם קדקודים של משולש שווה-צלעות.

גילוי תכונה זו מיוחס לקיסר נפוליון שהיה ידוע כחובב מתמטיקה.

#### הוכחה

שלושת המשולשים שוי-הצלעות הם:  $\triangle CAF$ ,

$\triangle ABD$  ו-  $\triangle CBE$  ומרכזיהם בהתאמה  $L, M$  ו-  $K$ .

לפי שהנקודות  $L, K$  הן מרכזי המשולשים, נובע:

$$CBL = ABK = 30^\circ, \quad BL = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad BK = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad CM = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש  $\triangle BKL$  מקבלים:

$$\begin{aligned} KL^2 &= BK^2 + BL^2 - 2 \cdot BK \cdot BL \cdot \cos(\beta + 60^\circ) = \\ &= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3} \cdot \cos(\beta + 60^\circ) \end{aligned}$$

באופן דומה, על-פי משולש  $\triangle CML$  מקבלים:

$$ML^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3} \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)$$

יש להוכיח ש-  $KL^2 = ML^2$ .

$$c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta + 60^\circ) = b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma + 60^\circ) \quad \text{נשאר להוכיח את השוויון:}$$

$$c^2 - b^2 = 2a[c \cdot \cos(\beta + 60^\circ) - b \cdot \cos(\gamma + 60^\circ)] \quad \text{או:}$$

על-ידי השימוש במשפט הסינוסים – מקבלים:

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma$$

יש להוכיח את השוויון הבא:

$$\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = 2 \sin \alpha [\sin \gamma \cos(\beta + 60^\circ) - \sin \beta \cos(\gamma + 60^\circ)]$$

על-ידי השימוש בזהות הטריגונומטרית:  $\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = \sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta)$

ועל-ידי השימוש בזהות במשולש:  $\sin \alpha = \sin(\gamma + \beta)$

נשאר להוכיח:  $\sin(\gamma - \beta) = 2[\sin \gamma \cos(\beta + 60^\circ) - \sin \beta \cos(\gamma + 60^\circ)]$

מטפלים באגף ימין על-ידי שימוש בנוסחת המעבר ממכפלה לסכום ומקבלים:

$$2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \beta + 60^\circ) + \sin(\gamma - \beta - 60^\circ) - \sin(\beta + \gamma + 60^\circ) - \sin(\beta - \gamma - 60^\circ)] = \\ = \sin(\gamma - \beta - 60^\circ) - \sin(\beta - \gamma - 60^\circ) = 2 \sin(\gamma - \beta) \cos(-60^\circ) =$$

$$= \sin(\gamma - \beta) \Rightarrow KL = LM$$

באופן דומה מוכיחים ש- $KL=KM$ , ועל-כן המשולש  $\Delta KLM$  הוא משולש שווה-צלעות.

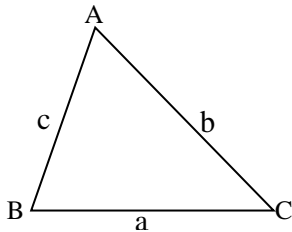
#### הקדמה לתכונה 14

תכניות-הלימודים במתמטיקה של החינוך העל-יסודי רבות המוחלט של בתי-הספר מאפשרות פתרון בעיות קיצון עם משתנה אחד בלבד. לעומת זאת, השימוש בתכונת הסדר באי-שוויונים של הממוצעים, מאפשר לפתור בעיות, אשר בהן מספר המשתנים גדול מאחד, ובמקרה של משתנה אחד – השגת הפתרון מתאפשרת ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

#### תכונה 14

בהינתן משולש כלשהו בעל היקף קבוע השווה ל- $2p$ , המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה-צלעות וערך שטחו

$$\text{שווה ל-} \frac{p^2}{\sqrt{27}}$$



איור 12

#### הוכחה

לצורך ההוכחה, משתמשים באי-שוויון שבין הממוצע החשבוני לממוצע ההנדסי של  $n$  מספרים חיוביים:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

לפי נוסחת הרון לחישוב שטח משולש כלשהו,  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,

כאשר  $a, b, c$  הן צלעות המשולש (ראה איור 12 בתכונה 14) ו- $p$  הוא מחצית היקף המשולש.

המספרים  $p-a, p-b, p-c$  הם שלושה מספרים חיוביים, ולכן לפי אי-השוויון בין הממוצעים מתקיים:



תכונות נסתרות של משולש שווה-צלעות - גילוי בשילוב כלי טכנולוגי

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} = \frac{3p - 2p}{3} = \frac{p}{3}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27} \quad \text{או בצורה,}$$

$$S = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}} \quad \text{ומכאן:}$$

שוויון מתקיים רק כאשר שלושת המספרים החיוביים שווים:  $p-a=p-b=p-c$ ,

זאת אומרת  $a=b=c$ , כלומר המשולש הוא משולש שווה-צלעות.

## תכונה 15

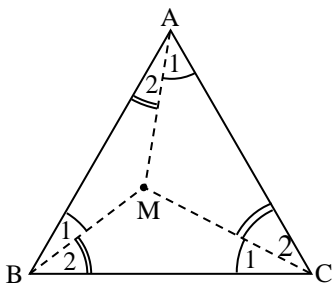
נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$  ובו נקודה פנימית כלשהי שאיננה נקודת המפגש של חוצי-זוויות המשולש.

מסמנים את הזוויות שנוצרות בשלושת הקדקודים, כנראה באיור 13.

קיימת התכונה הבאה:

לפחות, אחת מן הזוויות  $\sphericalangle C_1, \sphericalangle B_1, \sphericalangle A_1$  קטנה מ- $30^\circ$ ;

לפחות, אחת מן הזוויות  $\sphericalangle C_1, \sphericalangle B_1, \sphericalangle A_1$  גדולה מ- $30^\circ$ .



איור 13

## הוכחה

להוכחת התוכנה מוכיחים תחילה את הטענה הבאה, שהיא למעשה ההצגה הטריגונומטרית של משפט צ'בה.

$$(1) \sin \sphericalangle A_1 \cdot \sin \sphericalangle B_1 \cdot \sin \sphericalangle C_1 = \sin \sphericalangle A_2 \cdot \sin \sphericalangle B_2 \cdot \sin \sphericalangle C_2$$

על-ידי שימוש במשפט הסינוסים בכל אחד מהמשולשים שנוצרו על-ידי חיבור הנקודה M עם קדקודי המשולש, מקבלים:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\sin \sphericalangle B_1}{\sin \sphericalangle A_2} \quad \text{במשולש } \triangle AMB \text{ קיים:}$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\sin \sphericalangle C_1}{\sin \sphericalangle B_2} \quad \text{במשולש } \triangle BMC \text{ קיים:}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{\sin \sphericalangle A_1}{\sin \sphericalangle C_2} \quad \text{במשולש } \triangle CMA \text{ קיים:}$$

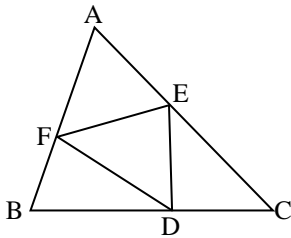
$$\frac{\sin \angle A_1 \cdot \sin \angle B_1 \cdot \sin \angle C_1}{\sin \angle A_2 \cdot \sin \angle B_2 \cdot \sin \angle C_2} = 1$$

על-ידי הכפלת שלושת הקשרים האחרונים, מקבלים: 1

בכך התקבלה ההוכחה של הטענה.  
 לכן, אם כל אחת מהזוויות  $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$  גדולות מ- $30^\circ$ , הדבר מחייב שכל אחת מהזוויות  $\angle A_2, \angle B_2, \angle C_2$  תהינה קטנות מ- $90^\circ$  וקשר (1) לא מתקיים.

באותו אופן, אם להפך: כל אחת מהזוויות  $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$  כולן קטנות מ- $30^\circ$ , אזי הדבר מחייב שכל אחת מהזוויות  $\angle A_2, \angle B_2, \angle C_2$  תהינה גדולות מ- $30^\circ$ , ושוב קשר (1) לא מתקיים.

### תכונה 16



איור 14

נתון משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$  ונקודות כלשהן  $D, E, F$  על צלעות המשולש  $BC, AC, AB$  בהתאמה.

הנקודות והקטעים המחברים אותן – מחלקים את המשולש לארבעה משולשים (ראה איור 14).

מסמנים:  $\pi$  – מכפלת צלעות המשולש

$P$  – סכום צלעות המשולש

$S$  – שטח המשולש

$\Sigma^2$  – סכום ריבועי צלעות המשולש

אז קיימים אי-השוויונים הבאים:

$$P_{\triangle DEF} \geq \min\{P_{\triangle AFE}, P_{\triangle ECD}, P_{\triangle BDF}\} \quad (\text{א})$$

$$\pi_{\triangle DEF} \geq \min\{\pi_{\triangle AFE}, \pi_{\triangle ECD}, \pi_{\triangle BDF}\} \quad (\text{ב})$$

$$\Sigma_{\triangle DEF}^2 \geq \min\{\Sigma_{\triangle AFE}^2, \Sigma_{\triangle ECD}^2, \Sigma_{\triangle BDF}^2\} \quad (\text{ג})$$

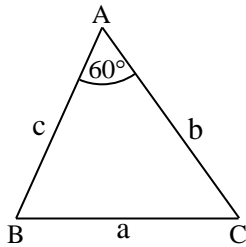
$$S_{\triangle DEF} \geq \min\{S_{\triangle AFE}, S_{\triangle ECD}, S_{\triangle BDF}\} \quad (\text{ד})$$

המשמעות היא לדוגמה, שבעת חלוקת משולש שווה-צלעות לארבעה משולשים, כנראה באיור 14, ההסתברות שהמשולש האמצעי יהיה בעל ההיקף הקטן ביותר היא 0.

**הוכחה**

**משפט עזר**

במשולש  $\triangle ABC$  שבו  $A=60^\circ$  (ראו איור 15), קיימים הקשרים הבאים:



איור 15

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \leq a^2 \quad (1)$$

$$a^2 \geq bc \quad (2)$$

$$a \geq \frac{b+c}{2} \quad (3)$$

**הוכחת הקשרים של משפט העזר**

לפי משפט הקוסינוסים, קיים:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + bc \leq a^2 + \frac{b^2 + c^2}{2}$$

(לפי האי-שוויון בין הממוצע ההנדסי לבין ממוצע הריבועים).

על-ידי העברת אגפים – מקבלים את קשר (1):  $\frac{b^2 + c^2}{2} \leq a^2$

לפי האי-שוויון בין הממוצעים, מתקיים:  $\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$

ולכן על-פי קשר (1) מקבלים את קשר (2):  $a^2 \geq bc$

לפי קשר (1), מתקיים:  $\frac{b^2 + c^2}{2} \leq a^2$ , ומכאן נובע:  $4a^2 \geq 2b^2 + 2c^2 \geq (b+c)^2$

ולכן על-ידי הוצאת שורש מקבלים את קשר (3):  $a \geq \frac{b+c}{2}$

**הוכחת תכונה א**

לפי קשר (3) שבמשפט העזר, אפשר לרשום:

$$2EF \geq AF + AE$$

$$2DF \geq BF + BD$$

$$2ED \geq DC + EC$$

לאחר חיבור הביטויים לשני האגפים, מתברים את שלושת הקשרים ומתקבל:

$$EF + DF + DE = P_{\triangle DEF} \geq \frac{P_{\triangle AEF} + P_{\triangle BDF} + P_{\triangle DCE}}{3}$$

ובכך הוכחה תכונה א.

### הוכחת תכונה ב

לפי קשר (2) שבמשפט העזר, אפשר לרשום:

$$AF \cdot AE \leq FE^2, \text{ מכפילים את שני האגפים ב-} EF$$

$$AF \cdot BD \leq FD^2, \text{ מכפילים את שני האגפים ב-} FD$$

$$DC \cdot EC \leq ED^2, \text{ מכפילים את שני האגפים ב-} EF$$

לאחר הכפלת כל אי-שוויון בביטוי המתאים, והכפלתם זה בזה – מקבלים:

$$\pi_{\Delta DEF}^3 \geq \pi_{\Delta AFE} \cdot \pi_{\Delta ECD} \cdot \pi_{\Delta BDF}$$

ובכך הוכחה תכונה ב.

### הוכחת תכונה ג

לפי קשר (1) במשפט העזר, מקבלים:

$$2FE^2 \geq AF^2 + AE^2$$

$$2FD^2 \geq BF^2 + BD^2$$

$$2ED^2 \geq CD^2 + CE^2$$

מחברים את שלושת האי-שוויונים ומקבלים:

$$2(FE^2 + FD^2 + ED^2) \geq AF^2 + AE^2 + BF^2 + BD^2 + CD^2 + CE^2$$

מוסיפים לשני האגפים של אי-השוויון האחרון את  $\sum_{\Delta DEF}^2$ , כלומר את הביטוי

$$FE^2 + FD^2 + ED^2$$

$$\sum_{\Delta DEF}^2 \geq \frac{\sum_{\Delta AEF}^2 + \sum_{\Delta BDF}^2 + \sum_{\Delta DCE}^2}{3} : \text{מקבלים:}$$

ובכך הוכחה תכונה ג.

### הוכחת תכונה ד

ברור שהזווית הגדולה ביותר של משולש  $\Delta DEF$  גדולה או שווה ל- $60^\circ$ .

נניח שהזווית FDE היא הזווית הגדולה ביותר.

מחלקים את ההוכחה לשני מקרים:

$$60^\circ \leq \angle FDE \leq 120^\circ : \text{מקרה I}$$

$$\angle FDE > 120^\circ : \text{מקרה II}$$

### I הוכחה למקרה

במקרה זה,  $\sin \angle FDE \geq \sin 60^\circ$ , ואפשר לרשום את אי-השוויונים הבאים:

$$\text{כבר הוכח} \begin{cases} FD^2 \geq BF \cdot BD \\ ED^2 \geq DC \cdot DE \end{cases}$$

$$\sin^2 \angle FDE \geq \sin 60^\circ$$

על-ידי הכפלת האגפים של שלושת האי-שוויונים בכל צד, מקבלים:

$$S_{\triangle ABC}^2 \geq S_{\triangle BDF} \cdot S_{\triangle DEC}$$

$$S_{\triangle DEF} \geq \min\{S_{\triangle BDF}, S_{\triangle DEC}\} \quad \text{לכן, ברור שמתקיים:}$$

ובכך הוכחנו תכונה ד למקרה I.

### II הוכחה למקרה

כאשר  $\angle FDE > 150^\circ$ , אזי אפשר להחליף את אי-השוויון השלישי של מקרה I באי-השוויון

$$\text{הבא: } \sin^2 \angle FDE \geq \sin \angle DFE \cdot \sin \angle FDE$$

(בהסתמך על כך שבתחום  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  פונקציית הסינוס היא פונקציה עולה).

ושוב על-ידי הכפלת שלושת האי-שוויונים זה בזה מקבלים את ההוכחה.

### כיווני חקירה בהמשך לתכונות מיוחדות במשולש שווה-צלעות

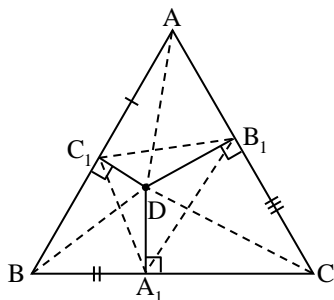
א. כיוון החקירה – העמסת נתון ("מה אם עוד?")

מהו המקום הגאומטרי של נקודות D כלשהי בתוך משולש שווה-צלעות, אם  $AD^2 = BD^2 + CD^2$  (כלומר, המשולש יהיה משולש ישר-זווית בעל יתר AD)?

כזכור לפי תכונה ב, אם D נקודה פנימית במשולש שווה-צלעות, אזי הקטעים AD, BD, CD מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

#### פתרון

מקודה D מורידים אנכים לצלעות המשולש, ונוצר משולש  $\triangle A_1B_1C_1$  הנקרא בשם משולש פֶדְלִי (ראה איור 16).



איור 16

במשולש זה קיים:  $B_1C_1 = AD \cdot \sin 60^\circ$ , משום שהמרובע  $AB_1DC_1$  הוא מרובע בר-חסימה במעגל שקוטרו  $AD$ .

באותו אופן מקבלים:  $A_1B_1 = CD \cdot \sin 60^\circ$

ו-  $A_1C_1 = BD \cdot \sin 60^\circ$ .

מכאן, בשל הפרופורציה מקבלים שהמשולש שנוצר על-ידי הקטעים  $AD, BD, CD$ , דומה למשולש  $\Delta A_1B_1C_1$ .

לפי ש- $AD$  צריך להיות היתר במשולש שצלעותיו:  $AD, BD, CD$ , לכן במשולש הדומה לו  $\Delta A_1B_1C_1$  דרוש שיתקיים:  $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$ .

המרובעים  $A_1DB_1C$  ו- $A_1DC_1B$  הם בני-חסימה במעגל, ועל-כן מתקיים:

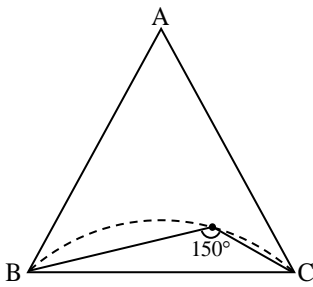
$$\angle B_1A_1C_1 = \angle DBC_1 + \angle DCB_1 = 90^\circ$$

לכן המרובע הקעור  $BDCA$ , הזווית הפנימית שלו  $\angle BDC = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 210^\circ$  – הזווית הפנימית של המרובע  $BDCA$ .

מחישוב זה נובע  $\angle BDC = 150^\circ$  – הזווית של משולש  $\Delta BDC$ .

מכאן עבור המשולש ישר-הזווית  $\Delta A_1B_1C_1$  (עם היתר  $B_1C_1$ ), גם המשולש שצלעותיו  $AD, BD, CD$  (עם היתר  $AD$ ), יהיה ישר-זווית.

מכאן המסקנה: המקום הגאומטרי של הנקודה  $D$  היא קשת המעגל שממנה רואים את הקטע  $BC$  בזווית של  $150^\circ$ , כנראה באיור 17.



איור 17

**ב. כיוון החקירה – החלפת נתון ("מה אם לא?")**  
(Walter & Brown, 1969)

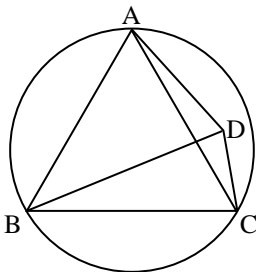
אם הנקודה  $D$  היא מחוץ למשולש, האם הקטעים  $AD, BD$  ו- $CD$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש?

### התשובה

הקטעים  $AD, BD$  ו- $CD$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש, כאשר הנקודה  $D$  אינה על המעגל החוסם את המשולש  $\Delta ABC$  (ראה איור 18).

### הוכחה

לפי משפט תלמי, בכל מרובע מתקיים:  $AD \cdot BC + AB \cdot DC \geq AC \cdot BD$ .



איור 18

השוויון מתקיים כאשר הנקודה D נמצאת על המעגל.

כיוון שמשולש  $\triangle ABC$  הוא שווה-צלעות, הרי שלפי משפט תלמי,  $AD+DC \geq BD$ .

לכן רק כאשר הנקודה D איננה על המעגל החוסם את המשולש, מקיימים הקטעים BC, AD ו-CD את אי-השוויון של המשולש.

### עוד שאלות בהקשר לכיוון חקירה זה

1. מה קורה אם הנקודה D נמצאת על הצלע BC (בתוך המשולש)?  
התשובה המפתיעה היא: הקטעים AD, BD ו-DC יוצרים משולש, שאחת מזוויותיו היא בת  $120^\circ$  (תכונה ד).
2. מה קורה אם הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC (מחוץ למשולש)?  
התשובה המפתיעה היא: הקטעים AD, BD ו-DC יוצרים משולש, שאחת מזוויותיו היא בת  $60^\circ$ .

### ג. כיוון החקירה – הכללה ("מה אם לא?")

#### בעיה 1

הנקודה D היא נקודה פנימית במשולש כלשהו.

יש להוכיח, כי  $AD \cdot BC + BD \cdot AC > CD \cdot AB$ .

כלומר, יש להוכיח, שהגדלים:  $AD \cdot BC$ ,  $BD \cdot AC$ ,

ו-  $CD \cdot AB$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

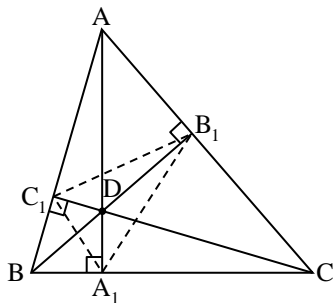
או בניסוח אחר: לאחר שימוש במשפט הסינוסים, יש

להוכיח, שהגדלים  $AD \cdot \sin \angle A$ ,  $BD \cdot \sin \angle B$ ,

ו-  $CD \cdot \sin \angle C$  מקיימים את אי-השוויון של המשולש.

ברור, שהוכחת המקרה היא הכללה של המקרה במשולש

שווה-צלעות (תכונה 7).



איור 19

#### הוכחה

כמו במשימת חקר א, מורידים מהנקודה D אנכים לצלעות המשולש, ומתקבל משולש  $\triangle A_1B_1C_1$  (ראה איור 19) בעל צלעות שאורכיהן:

$$B_1C_1 = AD \cdot \sin \angle A, \quad A_1C_1 = BD \cdot \sin \angle B, \quad A_1B_1 = CD \cdot \sin \angle C$$

מכאן המשולש  $\triangle A_1B_1C_1$  דומה למשולש שאורכי צלעותיו הם  $AD \cdot \sin \angle A$ ,  $BD \cdot \sin \angle B$ ,  $CD \cdot \sin \angle C$ .

**הערה**

אפשר להוכיח, ש-  $BDC - A = C_1A_1B_1$ , ולכן אם דורשים שהקטעים:

יוצרים משולש ישר-זווית, מקבלים שהנקודה D נמצאת על קשת מעגל שממנה רואים את הקטע BC בזווית  $90^\circ + \angle A$ , ולמעשה, מתקבלת הכללה למשולש שווה-צלעות.

**בעיה 2**

במשולש כלשהו  $\triangle ABC$ , הנקודה D נמצאת על הצלע BC.

אזי, הקטעים:  $AD \cdot \sin \angle A$ ,  $BD \cdot \sin \angle B$ ,  $CD \cdot \sin \angle C$  יוצרים משולש שאחת מזוויותיו היא  $180^\circ - \angle A$ .

**הוכחה**

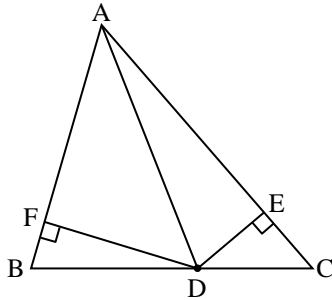
מהנקודה D מורידים אנכים לצלעות AB ו-AC כנראה באיור 20.

הוכחנו במשימת חקר א שהמשולש  $\triangle DEF$  דומה למשולש שצלעותיו:

$$AD \cdot \sin \angle A, BD \cdot \sin \angle B, CD \cdot \sin \angle C$$

ועל-כן ברור שמתקיים:  $\angle FDE = 180^\circ - \angle A$ .

גם לגבי בעיה זו אפשר לשאול "מה אם עוד?", אז הנה עוד תוספת.



איור 20

אם  $\angle A = 90^\circ$ , אזי הקטעים:  $AD \cdot \sin \angle A$ ,  $BD \cdot \sin \angle B$ ,  $CD \cdot \sin \angle C$  הם צלעות של משולש ישר-זווית  $\triangle DEF$ . לכן מתקיים:

$$AD^2 \cdot \sin^2 \angle A = BD^2 \cdot \sin^2 \angle B + CD^2 \cdot \sin^2 \angle C$$

ועל-ידי שימוש במשפט הסינוסים מקבלים:

$$\frac{AD^2 \cdot BC^2}{4R^2} = \frac{BD^2 \cdot AC^2}{4R^2} + \frac{AC^2 \cdot CD^2}{4R^2}$$

$$AD^2 \cdot BC^2 = BD^2 \cdot AC^2 + AC^2 \cdot CD^2$$

או:

הקשר האחרון הוא ניסוח אלטרנטיבי למשפט פיתגורס.



## סיכום

במסגרת המאמר הנוכחי הוצגו תכונות לא-מוכרות מגוונות של משולש שווה-צלעות, אשר גילינו במהלך הוראת סטודנטים וכן בשילוב עבודה עם תכנה גאומטרית דינמית.

את אוסף התכונות שהוצגו ואת הוכחתן אפשר לשלב במהלך ההוראה – כמשימת חקר על משולש שווה-צלעות. תהליך ההוכחה של התכונות הנ"ל מִזְמַן קישור בין נושאי המתמטיקה המגוונים: גאומטריה אוקלידית, טריגונומטרייה, אלגברה ועוד.

חשיפת הלומדים (תלמידים, פרחי הוראה ומורים בפועל) לגילוי תכונות אלו – יסייע להרחבה ולהבנה של הקשרים הלוגיים בין הרכיבים למיניהם (הרשקוביץ, 1991, 1992).

אוסף התכונות שהוצגו במאמר הנוכחי – עשוי לשמש תוכן מאתגר למורים למתמטיקה ולִזְמַן להם הזדהות עם תחושת התלמיד בכיתה במהלך הוכחות טענות ומשפטים המוכרים לעוסקים בהוראה.

מקצת המשימות שהוצגו במהלך המאמר – נחקרו בשלב ראשון באמצעות תכנת גאומטריה דינמית, אשר באמצעותה יכולנו לזהות ולראות הלכה למעשה את נכונות הטענה באופן דינמי – במהלך גרירה של נקודות ויצירת אוסף גדול של מקרים פרטיים, אשר אפשר להעלות מהם את ההשערה לגבי התכונה. העבודה עם תכנה גאומטרית דינמית גם בסביבת הוראת פרחי הוראה ו/או תלמידים – מִזְמַנת ללומד הבנה טובה ומעמיקה יותר של המושגים במהלך תהליך בנייתם, ובעיקר לִזְהוּת הכללות שחלקן אף מפתיעות. שילוב אוסף התכונות של משולש שווה-צלעות שהוצגו במאמר – יאפשר לראות את המתמטיקה כתחום פתוח, מסקרן ומפתיע. הלומדים עשויים להיות מופתעים מהאפשרות להמשיך ולחקור צורה גאומטרית מוכרת, שהיה נדמה שתכונותיה כוללות מספר סופי של טענות ומשפטים. שילובן של הפתעות מתמטיות בתהליך ההוראה ממלא תפקיד חיוני לצורך הצגת התכנים המתמטיים באופן מסקרן, דינמי ומעורר-חשיבה (Movshovits-Hadar, 1988).

מרטינוביק ומניזדי (Martinovic & Manizade, 2013) מתארות את תרומת התכנה הדינמית – כחלק מתהליך פדגוגי חוזר ונשנה: Reflexive pedagogy in action. מבין התפקידים השונים של התכנה הדינמית הן בוחרות להדגיש את תפקיד התכנה הדינמית כשותף (partner) בתהליך הלמידה.

התפקיד המשמעותי של התכנה הדינמית כשותף בתהליך הלמידה נכון גם למורי-מורים וחוקרים והוא ניכר גם בתהליכי בנייה וחקר של אובייקטים גאומטריים. במהלך תהליך גילוי התכונות של משולש שווה-צלעות מצאנו את הכלי הטכנולוגי כשותף משמעותי לצורך ניסוי, תהייה ובדיקת השערות לקראת תהליך ההוכחה המתמטית.

סטופל ובן-חיים (Stupel & Ben-Chaim, 2013) הציעו את המושג "הוכחה למחצה" בעבודה עם

הכלי הטכנולוגי – במהלך גרירה של נקודות ואובייקטים אחרים, זיהוי תכונה משמרת, הכללה ועוד. פעולת הגרירה מאפשרת מבט דינמי על אובייקטים מתמטיים, זיהוי תכונות ויחסים ביניהם הנשארים קבועים במהלך יצירת אוסף רב של דוגמות פרטיות וקבלת השערות ( de Villiers, 1998). ההוראה בסביבה טכנולוגית מציבה בפני המורים ומורי המורים אתגר פדגוגי בהצגת חשיבותה ונחיצותה של ההוכחה המתמטית לצורך הכללה, כלומר לדאוג להבהיר לסטודנטים, כי אי אפשר להסתפק ב"הוכחה למחצה", הנשענת על זיהוי תופעות והכללות תוך כדי עבודה עם הכלי הטכנולוגי, אלא להדגיש את מקומה של ההוכחה המתמטית התקפה לכל אינסוף המקרים הפרטיים.

משימה מתמטית המזמנת הכללה היא משימה מעצימה (powerful task), החושפת את הלומד לתהליך למידה מורכב ולחשיבה מתמטית ופדגוגית מקשרת (Krainer, 1993). תהליכי ההבנה של האובייקטים באמצעות התכנה הדינמית ותהליכי ההכללה המתמטית לגבי תכונותיו של משולש שווה-צלעות – הדגישו את הקישור בין נושאי מתמטיקה אחרים. חשיפת הלומדים לקשרים מעין אלו מזמנת את ראיית המתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף בדיד של נושאים המנותקים זה מזה (House & Coxford, 1995; NCTM, 2000).

תכונותיו של משולש שווה-צלעות המוצגות לאורך המאמר – ניתנות להגשה כמשימות חקר ועשויות להיות חומר גלם למורי-מורים למתמטיקה לצורך פיתוח והעמקה של הידע המתמטי של פרחי הוראה. הן רלוונטיות לשילוב הן בסביבת הוראת סטודנטים/מורים והן בסביבת הכיתה, ומתוך כך הן עשויות לעורר את פרחי-ההוראה ואת המורים לשיתוף פעולה, להפתעה, לרפלקסייה על הידע המתמטי שלהם תוך כדי אינטראקציה בשילוב האתגרים שהמשימה מציבה בפניהם (Zaslavsky, 2007, 2008).

## מקורות

- דוד, ח' (2006). ז.צ.ז. (מול הקטנה בין השניים) – הזדמנות לקישוריות. **על"ה**, 36, 15-21.
- הרשקוביץ, ר' (1991). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גאומטריה (חלק א'). **על"ה**, 9, 28-34.
- הרשקוביץ, ר' (1992). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גאומטריה (חלק ב'). **על"ה**, 10, 20-27.
- פסקין, ד' ופלקסין, א' (2008). חפיפת משולשים, התנאים המספיקים והתנאים שאינם מספיקים. **על"ה**, 39, 37-43.
- Alakoç, Z. (2003). Technological modern teaching approaches in mathematics teaching. **The Turkish Online Journal of Educational Technology**, 2(1), 1303-6521.
- Chazan, D. (1993). Students microcomputer-aided explanation in geometry. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), **Problem posing: Reflection and application** (pp. 289-299). Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum.
- Davis, P. J. (1995). The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry: A mini-history. **American Mathematical Monthly**, 102(3), 204-214.
- de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), **Designing learning environment for developing understanding of geometry and space** (pp. 369-393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Dreyfus, T., & Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 28(1), 1-5.
- Goodchild, S., & Sriraman, B. (2012). Revisiting the didactic triangle: From the particular to the general. **ZDM**,

- 44(5), 581-585.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, 44(1), 5-23.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. **ZDM**, 44, 601-612.
- Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2008). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of Geogebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, 28(2), 135-146.
- House, P. A., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). **Connecting mathematics across the curriculum**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, 24(1), 65-93.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environment as a source of rich learning contexts for the complex activity of providing. **Educational Studies in Mathematics**, 44(1), 151-161.
- Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2013). Technology as a partner in geometry classrooms. **The Electronic Journal of Mathematics and Technology**, 8(2). Retrieved from <https://php.radford.edu/~ejmt/>
- Moreno, L., & Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. **ZMD**, 37(3), 130-139.
- Movshovits-Hadar, N. (1988). School mathematics theorems – an endless source of surprise. **For the Learning of Mathematics**, 8(3), 34-40.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2010). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author.
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. **Far East Journal of Mathematical Education**, 11(2), 129-161.
- Walter, M. I., & Brown, S. I. (1969). What if not? **Mathematics Teaching**, 46, 38-45.
- Wiest, L. R. (2001). The role of computers in mathematics teaching and learning. **Computers in the Schools**, 17(1-2), 41-55.
- Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators: The dynamics associated with tasks in mathematics teacher education. **Journal for Mathematics Teacher Education**, 10(4), 433-440.
- Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), **The mathematics teacher educator as a developing professional** (pp. 93-114). Rotterdam: Sense Publishers.

רות סגל, משה טופל ואבי סיגלר

שנתון "אע" – תשע"ז – כרך כב