רחל מוגילבסקי

שקילות בפתרון משוואות, מערכת משוואות ואי-שוויונות (חלק ב)

תקציר

תחומי מתמטיקה שונים מחייבים פתרון של משוואות, מערכת משוואות ואי-שוויונות. הצורך הזה בולט במספר קורסי הכשרה של פרחי הוראת מתמטיקה, לדוגמה: פתרון מערכת משוואות באלגברה לינארית או מערכת אי-שוויונות בתכנון לינארי ועוד. הדרך המקובלת להתמודדות עם מערכות אלו, היא מעבר למערכות פשוטות יותר, אך בעלות אותם הפתרונות. בחלק א של הנושא הוצגו כמה "מוקשים", שקיימים "מתחת לפני השטח", ואשר גורמים לקבלת פתרון שגוי של משוואה. כדי להתגבר על הסכנה של קבלת פתרונות שגויים למשוואות, נוסחו כללים המתבססים על הוכחות מתמטיות, ומהווים מעין "תורת השקילות" של המשוואות.

במאמר הנוכחי הוכנה "תורת השקילות" עבור מערכת משוואות ועבור מערכת אי-שוויונות בלווי דוגמאות המאפשרות הטמעת הכללים.

הנושא מלובן בצורה אקדמית ומיועד למורי מתמטיקה בחינוך העל-יסודי כדי להבין ולהעמיק את הידע שלהם בנושא.

מילות מפתח: *תחום הגדרה; שקילות משוואות; מערכות של משוואות ואי-שוויונות.*

מבוא

בחלק א של המאמר חקרנו דרכים המביאות מהמשוואה הנתונה למשוואה שקולה לה, אך יותר פשוטה לפתרון. התברר שדרכים מקובלות ואפילו שימוש בזהויות יכולים להביא לידי פתרון שגוי. נוסחו כללים המתבססים על הוכחות מתמטיות כדי להתמודד עם הנושא. נרחיב את התאוריה עבור מערכות של משוואות, אי-שוויונות ומערכות של אי-שוויונות.

1. מערכות של משוואות

נתבונן בקבוצת n משוואות עם k נעלמים:

$$F_1^{(1)}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) = F_2^{(1)}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \quad ; \quad F_1^{(2)} = F_2^{(2)}\ ,\ \dots\ ,\ F_1^{(n)} = F_2^{(n)}$$

הגדרה 1.1

נקרא קבוצת המשוואות בשם **מערכת משוואות (וגם)**, אם נחפש את כל קבוצות ערכי הנעלמים, המקיימות את כל המשוואות בקבוצה.

לערכי הנעלמים נקרא **פתרונות** של המערכת (נסמן $\{F\}$). את קבוצת הפתרונות נסמן ב- $M_{\{F\}}$.

הגדרה 1.2

נקרא קבוצת משוואות בשם **סט משוואות** (מערכת משוואות או), אם נחפש את כל קבוצות ערכי הנעלמים, המקיימים לפחות אחת מהמשוואות בקבוצה (נסמן $[F]$).

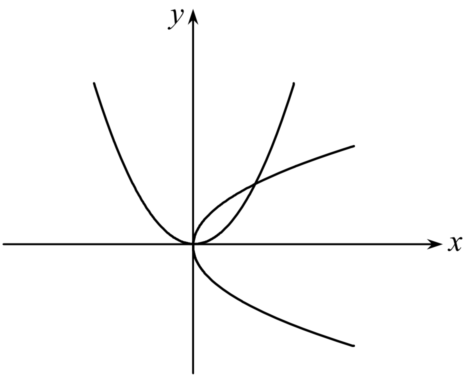
את קבוצת הפתרונות נסמן ב- $M_{[F]}$.

לדוגמה:

למערכת המשוואות: $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$

יש שני פתרונות: $(0,0)$ ו- $(1,1)$.

קל לראות זאת בשרטוט:



לסט המשוואות: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y^2 = x \end{array}\right.$

הפתרון הוא שיעורי כל הנקודות בשתי הפרבולות.

הגדרה 1.3

שתי מערכות (סטים) של משוואות ייקראו **שקולות**, אם כל הפתרונות שלהן מתלכדים.

משפט 1 .1

תהי פונקציה $F(x_1 \; , \; \dots \; , \; x_k)$ מפורקת למכפלה $F = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n$,

כאשר תחום ההגדרה של כל הגורמים מתלכד עם תחום ההגדרה של הפונקציה F.

המשוואה $F(x_1 \; , \; \dots \; , \; x_k) = 0$ שקולה למערכת (סט) המשוואות:

$$\left[\begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ \ldots \\ F_n = 0 \end{array}\right.$$

המשפט קל להוכחה.

דוגמה 1.1:

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x-1)(x+1) = 0$$

המשוואה שקולה לסט המשוואות:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

והפתרונות הם 0, 1- ו-1.

במקרים שלא לכל F_i תחום ההגדרה (להלן ת"ה) מתלכד עם תחום ההגדרה של F, צריכים לבטל פתרונות הלא שייכים לת"ה של F.

דוגמה 1.2

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{array}\right. \quad \Leftarrow \quad x\sqrt{x-1} = 0$$

למשוואה השנייה ת"ה $x \geq 1$, לכן יש רק פתרון אחד והוא $x = 1$.

דוגמה 1.3

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \operatorname{ctg} x = 0\end{array}\right. \Leftarrow \quad \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$$

הפתרונות של המשוואה הראשונה לא שייכים לתחום ההגדרה של המשוואה השנייה, לכן לוקחים בחשבון רק את קבוצת הפתרונות $x = \frac{\pi}{2} + \pi \mathrm{k}$.

מסקנה

השימוש במשפט 1.1 בלי בדיקת תחום ההגדרה יכול להביא לפתרונות זרים.

הערה

לנוחיות הכתיבה, נעביר את כל המשוואות במערכת "וגם" ובמערכת "או" לצורה: $\mathrm{F}_i(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) = 0$ (צד ימין הוא 0).

משפט 1.2

נתבונן במערכת משוואות $\{\mathrm{F}\}$, המורכבת מהמשוואות:

$$\{\mathrm{F}\} \quad \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0\ ,\ \mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0\ ,\ \dots\ ,$$
$$\mathrm{F}_s(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{F}_\mathrm{n}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0$$
$$(1 < s < \mathrm{n})$$

נתבונן במערכות חלקיות: $\{\mathrm{F}'\} \quad \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{F}_{s-1}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0$

$$\{\mathrm{F}''\} \quad \mathrm{F}_s(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{F}_\mathrm{n}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_\mathrm{k}) = 0$$

אם $\mathrm{M}_{\{\mathrm{F}\}}\ ,\ \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}'\}}\ ,\ \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}''\}}$ קבוצות כל הפתרונות של כל אחת מהמערכות, אז מתקיים: $\mathrm{M}_{\{\mathrm{F}\}} = \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}'\}} \cap \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}''\}}$.

הוכחה

אם $(\mathrm{a}_1\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{a}_\mathrm{k}) \in \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}\}}$, ז.א. פתרון של מערכת $\{\mathrm{F}\}$,

אז $(\mathrm{a}_1\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{a}_\mathrm{k})$ הוא פתרון של כל משוואה מ-$\{\mathrm{F}\}$,

ולכן פתרון של $\{\mathrm{F}'\}$ וגם של $\{\mathrm{F}''\}$,

ז.א. $(\mathrm{a}_1\ ,\ \dots\ ,\ \mathrm{a}_\mathrm{k}) \in \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}'\}} \cap \mathrm{M}_{\{\mathrm{F}''\}}$.

מכאן: $$\mathrm{M}_{\{F\}} \subseteq \mathrm{M}_{\{F'\}} \cap \mathrm{M}_{\{F''\}} \quad (1.1)$$

להפך, אם $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in \mathrm{M}_{\{F'\}} \cap \mathrm{M}_{\{F''\}}$, אז $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in \mathrm{M}_{\{F'\}}$

וגם $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in \mathrm{M}_{\{F''\}}$, ז.א. $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k)$ הוא פתרון

של כל משוואה ב-$\{F'\}$ וגם של כל משוואה ב-$\{F''\}$, לכן גם של כל משוואה ב-$\{F\}$.

לכן, $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in \mathrm{M}_{\{F\}}$, ומכאן: $$\mathrm{M}_{\{F'\}} \cap \mathrm{M}_{\{F''\}} \subseteq \mathrm{M}_{\{F\}} \quad (1.2)$$

מ-(1.1) ו-(1.2) נובעת נכונות המשפט.

משפט 1.3

נתבונן במערכת $\{F\}$ המחולקת כמו במשפט 1.2, ובמערכת $G_1 = 0\ ,\ \dots\ ,\ G_r = 0 \quad \{G\}$, השקולה למערכת $\{F'\}$: $\{G\} \sim \{F'\}$. אז מתקיים: $\mathrm{M}_{\{F\}} = \mathrm{M}_{\{G\}} \cap \mathrm{M}_{\{F''\}}$.

במילים אחרות, אפשר להחליף חלק מהמערכת הנתונה במערכת השקולה לאותו החלק.

ההוכחה טריוויאלית.

משפט 1.4

הבסיס לשיטת ההצבה בפתרון מערכת "וגם"

נתונה מערכת $F_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) = 0\ ,\ \dots\ ,\ F_n(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) = 0 \qquad \{F\}$

אם באחת המשוואות, למשל במשוואה ה-n-ית, אפשר לבטא את אחד הנעלמים, למשל x_k, בעזרת נעלמים אחרים, ז.א. $x_k = \varphi_i(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{k-1})$ ($1 \le i \le r$),

אז המערכת $\{F\}$ שקולה לסט (מערכת "או") של r מערכות "וגם":

$$[\{F\}] \sim \left[\begin{array}{l} \{F^{(1)}\} \begin{cases} F_1(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_1(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_1(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ x_k = \varphi_1(x_1 , \dots , x_{k-1}) \end{cases} \\ \{F^{(2)}\} \begin{cases} F_1(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_2(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_2(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ x_k = \varphi_2(x_1 , \dots , x_{k-1}) \end{cases} \\ \dots \\ \{F^{(r)}\} \begin{cases} F_1(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_r(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x_1 , \dots , x_{k-1} , \varphi_r(x_1 , \dots , x_{k-1})) = 0 \\ x_k = \varphi_r(x_1 , \dots , x_{k-1}) \end{cases} \end{array} \right.$$

נסמן: $[\{F^{(1)}\} , \dots , \{F^{(r)}\}] = [\{F\}]$. צריכים להוכיח כי $\{F\} \sim [\{F\}]$.

לפני ההוכחה ניתן דוגמאות:

דוגמה 1.4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 9 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \\ -3x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

מהמשוואה הראשונה נובע $x = 2y - 3z + 9$, ז.א. $x = \varphi(y,z) = 2y - 3z + 9$.

במקום המשוואה הראשונה רושמים ביטוי $x = \varphi(y,z)$, ובשתי המשוואות האחרות מציבים במקום x את $\varphi(y,z)$:

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 9 \\ 2(2y - 3z + 9) + y - z + 1 = 0 \\ -3(2y - 3z + 9) + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

אחרי פישוט:

$$(1.4)\quad \begin{cases} x = 2y - 3z + 9 \\ 5y - 7z + 19 = 0 \\ -y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

המערכת (1.4) שקולה למערכת (1.3) ופשוט יותר לפתור אותה.

הפתרון הוא $(1,-1,2)$.

דוגמה 1.5

$$\{F\}\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 & (F_1) \\ y^2 - xy - 2x^2 = 0 & (F_2) \end{cases}$$

ממשוואה (F_2) מבודדים את y: $y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2} = \frac{x \pm 3x}{2}$.

קיבלנו שתי פונקציות:

$$y = \varphi_1(x) = 2x$$
$$y = \varphi_2(x) = -x$$

לכן המערכת $\{F\}$ שקולה לסט של שתי מערכות משוואות:

$$\{F\} \sim \left[\begin{array}{l} F^{(1)}\ \begin{cases} x^2 + (2x)^2 - 10 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \\ \\ F^{(2)}\ \begin{cases} x^2 + (-x)^2 - 10 = 0 \\ y = -x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2 = 10 \\ y = 2x \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 2x^2 = 10 \\ y = -x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})\ ,\ (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \\ \\ \\ (\sqrt{5}, -\sqrt{5})\ ,\ (-\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5}) \end{array}$$

למערכת המקורית ארבעה פתרונות.

הוכחה של משפט 1.4

יהי $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in M_{\{F\}}$, ז.א. $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ הוא גם פתרון של המשוואה ה-ית.

לפי ההנחה, אפשר לבטא את a_k בעזרת $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_{k-1})$:

$a_k = \varphi_j(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_{k-1})$ עבור j איזשהו.

לכן $M_{\{F^{(j)}\}} \ni (a_1 , \dots , a_k)$, אז הפתרון של כל הסט $[\{F\}]$ הוא

$$(1.5) \qquad M_{\{F\}} \subseteq M_{[\{F\}]}$$

להפך, יהי $(b_1 , \dots , b_k) \in M_{[\{F\}]}$, ז.א. $(b_1 , \dots , b_k)$ הוא פתרון של לפחות אחת המשוואות $\{F^{(i)}\}$, $1 \le i \le r$, ז.א.:

$$\begin{cases} F_1(b_1 , \dots , b_{k-1} , \varphi_i(b_1 , \dots , b_{k-1})) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(b_1 , \dots , b_{k-1} , \varphi_i(b_1 , \dots , b_{k-1})) = 0 \\ b_k = \varphi_i(b_1 , \dots , b_{k-1}) \end{cases}$$

מהשוויון האחרון נובע כי $F_n(b_1 , \dots , b_{k-1} , b_k) = 0$.

אם נציב בשאר המשוואות במקום $\varphi_i(b_1 , \dots , b_{k-1})$, את ערך b_k השווה לו, נקבל כי $(b_1 , \dots , b_{k-1} , b_k)$ הוא פתרון של $\{F\}$: $\quad M_{[\{F\}]} \subseteq M_{\{F\}} \quad (1.6)$

מ-(1.5) ו-(1.6) נובע: $\{F\} \sim [\{F\}]$.

משפט 1.5

הבסיס לשיטות השוואה מקדמים בפתרון מערכת "וגם"

נתונה המערכת: $F_1(x_1 , \dots , x_k) = 0 , \dots , F_n(x_1 , \dots , x_k) = 0 \qquad \{F\}$

אם לאחת המשוואות, נניח למשוואה ה-n-ית, נוסיף צירוף לינארי של המשוואות האחרות, ז.א. $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$ ($\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}$ מספרים), אז נקבל מערכת $\{F'\}$ השקולה ל-$\{F\}$.

הוכחה

נסמן את המשוואה החדשה ב-F_n'.

$$(1.7) \qquad F_n' = F_n + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$$

$$\{F'\} \qquad F_1(x_1 , \dots , x_k) = 0 , \dots , F_{n-1}(x_1 , \dots , x_k) = 0 , F_n'(x_1 , \dots , x_k) = 0$$

אם $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in M_{\{F\}}$, אז $F_i(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)=0$, $1 \le i \le n$,
ואז $F_n{}'(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)=0$, ז.א. $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in M_{\{F'\}}$.

הוכחנו כי
$$M_{\{F\}} \subseteq M_{\{F'\}} \qquad (1.8)$$

אם $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in M_{\{F'\}}$ אז:
$$F_1(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k)=0\ ,\ \dots\ ,\ F_{n-1}(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k)=0\ ,\ F_n{}'(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k)=0$$
מהשוויון (1.7) נובע כי גם $F_n(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k)=0$, ז.א. $(b_1\ ,\ \dots\ ,\ b_k) \in M_{\{F\}}$.
הוכחנו כי $M_{\{F'\}} \subseteq M_{\{F\}}$, שיחד עם (1.8) מוכיח את המשפט.

דוגמה 1.6

$$\{F\} \quad \begin{cases} x^2+y-1=0 & F_1 \\ x+y^2-1=0 & F_2 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה:

$$\{F'\} \quad \begin{cases} x^2-y^2-(x-y)=0 & F_1-F_2=F_1{}' \\ x+y^2+1=0 & F_2 \end{cases}$$

לפי המשפט, $\{F\} \sim \{F'\}$.

מהמשוואה $F_1{}'$:
$$(x-y)(x+y-1)=0$$
$$y=\varphi_2(x)=1-x \qquad y=\varphi_1(x)=x$$

לפי משפט 1.4, $\{F'\}$ שקולה לסט (מערכת "או") של שתי מערכות "וגם":

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ x+x^2-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-x \\ x+(1-x)^2-1=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

דוגמה 1.7

$$\{F\}\qquad \begin{cases} x^2+y^2=25 & F_1 \\ xy=12 & F_2 \end{cases}$$

בונים $F_1'=F_1-2F_2$:

$$\{F'\}\qquad \begin{cases} (x-y)^2=1 & F_1' \\ xy=12 & F_2 \end{cases}$$

מהמשוואה F_1' : $x=\varphi_1(y)=y+1$ או $x=\varphi_2(y)=y-1$.

והמערכת $\{F'\}$, לפי משפט 1.4, שקולה לסט (מערכת "או") של מערכות "וגם"

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)\,y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)\,y=12 \end{cases} \end{array}\right.$$

דוגמה 1.8

$$\{F\}\qquad \begin{cases} x-2y+3z-9=0 & F_1 \\ 2x+y-z+1=0 & F_2 \\ -3x+2y+3z-1=0 & F_3 \end{cases}$$

בונים: $F_1'=F_1+3F_2$, $F_3'=F_3+3F_2$.

נקבל מערכת שקולה:

$$\{F'\}\ \begin{cases} 7x+y-6=0 & F_1' \\ 2x+y-z+1=0 & F_2 \\ 3x+5y+2=0 & F_3' \end{cases} \Rightarrow \{F''\}\ \begin{cases} 7x+y-6=0 & F_1' \\ 2x+y-z+1=0 & F_2 \\ -32x+32=0 & F_3''=F_3'-5F_1' \end{cases}$$

נקבל פתרון יחיד: $(1,-1,2)$.

2. תורת השקילות של אי-שוויונות

נתבונן בשתי פונקציות $F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ עם תחום הגדרה D_1 ו- $F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ עם תחום הגדרה D_2. D_1 ו- D_2 תחומים במרחב R^k.

הגדרה 2.1

הביטוי:

$$(*)\qquad F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) > F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$$

נקרא **אי-שוויון עם k נעלמים**.

k-יה סדורה $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ נקראת **קבוצת ערכים מותרים לאי-שוויון,** אם $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in D_1$ וגם $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in D_2$.

התחום המורכב מקבוצות הערכים המותרים הוא החיתוך $D = D_1 \cap D_2$, ונהוג לקרוא לו **תחום ההגדרה של אי-השוויון**.

הגדרה 2.2

k-יה סדורה $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \in D$ נקראת **פתרון של אי-השוויון** אם מתקיים $F_1(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k) > F_2(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ (F).

נסמן את קבוצת הפתרונות של אי-השוויון ב- M_F.

הערה: הכלל שנקבע לאי-שוויון בצורה $(*)$ מתאים גם לאי-שוויונות:

$$F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$$
$$F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \le F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$$
$$F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \ge F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$$

באופן דומה למשוואות (מוגילבסקי, 2014), מציגים מושגים: שקילות של אי-שוויונות, מסקנה מאי-שוויון, מערכת אי-שוויונות (וגם) וסט אי-שוויונות (מערכת או). גם חלק מהמשפטים הדומים לאלה למשוואות נביא ללא הוכחה.

פעולות שאינן מפרות שקילות (Kreynin, 1994)

משפט 2.1

אם פונקציה $\varphi(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$ מוגדרת בכל תחום ההגדרה של אי-השוויון:

$$(\mathrm{F})\quad \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k) > \mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$$

אזי אי-השוויון שקול לאי-השוויון הבא:

$$(\mathrm{F}+\varphi)\quad \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)+\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k) > \mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)+\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$$

הערה: יש חשיבות רבה בתנאי כי $\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$ מוגדרת לכל תחום ההגדרה של (F)

דוגמה: $x^2+6>5x\quad(\mathrm{F})$ תחום ההגדרה: $(-\infty,\infty)$

הפתרון הוא $x>3$ או $x<2\quad \mathrm{M_F}$

נגדיר $\varphi(x)=\lg(x-3)$ עם תחום הגדרה $x>3$.

באי-השוויון $x^2+6+\lg(x-3)>5x+\lg(x-3)$, הפתרון הוא רק $x>3$, כלומר האי-שוויון $(\mathrm{F}+\varphi)$ אינו שקול ל-(F) כי תחום ההגדרה של φ אינו כולל את כל תחום ההגדרה של (F).

מסקנה 2.1

אי-השוויון $\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k) > \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)+\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$ שקול לאי-השוויון $\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)-\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k) > \mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$, כלומר ניתן להעביר מחוברים מצד לצד עם סימן הפוך.

מסקנה 2.2

כל אי-שוויון מהצורה $(*)$ אפשר להעביר לצורה $\mathrm{F}(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)>0$.

משפט 2.2

אם פונקציה $\varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$ מוגדרת וחיובית עבור כל תחום ההגדרה של (F), אזי אי-השוויון

$$(\varphi\mathrm{F})\quad \varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)\cdot\mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k) > \varphi(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)\cdot\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)$$

שקול לאי-השוויון (F).

משפט 2.3

אם הפונקציה $\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ מוגדרת ושלילית עבור כל תחום ההגדרה של (F), אזי אי-השוויון
$\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot F_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)<\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot F_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ שקול לאי-השוויון (F).

משפט 2.4

אי-השוויון $F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)>0 \quad (F)$

בתחום $D_F=D_{F_1}\cap D_{F_2}$ שקול לסט של שתי מערכות אי-השוויונות:

$$(G)\quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)>0 \\ F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)>0 \end{cases} & (\alpha) \\ \begin{cases} F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)<0 \\ F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)<0 \end{cases} & (\beta) \end{array}\right.$$

הוכחה

נניח כי $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in M_F$, כלומר:

$F_1(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\cdot F_2(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)>0$.

מכפלת שני מספרים היא חיובית אם ורק אם הגורמים הם בעלי סימן זהה.

אם שני הגורמים חיוביים, אז $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ הוא פתרון של מערכת (α).

אם שני הגורמים שליליים, אז $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ הוא פתרון של מערכת (β).

בשני המקרים זה פתרון של הסט (G): $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in M_G$.

אם, להפך, $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in M_G$, אז $F_1(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ ו-$F_2(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ מספרים בעלי סימן זהה, לכן מכפלתם חיובית, ו-$(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in M_F$.

משפט 2.5

אי-השוויון $\frac{F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)}{G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)} > 0$

שקול לאי-השוויון $F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) > 0$.

הוכחה

אי-השוויון השני מתקבל מאי-השוויון הראשון על ידי מכפלת שני הצדדים ב- $G^2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$, שהוא חיובי או אפס.

נקודות האפס של $G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ אינן שייכות לפתרון של אי-השוויון השני, לכן לפי משפט 2.2 השקילות נשמרת.

הערה: אי-השוויון $\frac{F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)}{G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)} \geq 0$ שקול למערכת:

$$\begin{cases} F(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \geq 0 \\ G(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \neq 0 \end{cases}$$

3. שיטות מיוחדות לפתרון אי-שוויונות

סוג 1

קל לראות שסימן הפונקציה:

$$(F)\quad \sqrt{F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)} - \sqrt{F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)}$$

זהה לסימן של $F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k) - F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$

בתחום ההגדרה של הפונקציה (F).

דוגמה 3.1

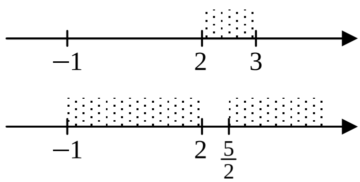
אי-השוויון: $\sqrt{\frac{2x^2-3x-5}{x-2}} < \sqrt{x+1}$ שקול למערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-3x-5}{x-2}-(x+1)<0 \\ \dfrac{2x^2-3x-5}{x-2}\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}<0 \\ \dfrac{2x^2-3x-5}{x-2}\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)\,(x+1)}{x-2}<0 \\ \dfrac{(2x-5)\,(x+1)}{x-2}\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases}$$

בגלל ש- $x+1\ge 0$, אפשר לפשט בתנאי זה את שני אי-השוויונות הראשונים :

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2}<0 \\ \dfrac{2x-5}{x-2}\ge 0 \\ x\ge -1 \end{cases}$$



$2<x<3$

$x>2.5$ או $-1\le x<2$

והתשובה היא $2.5\le x<3$.

סוג 2

סימן הפונקציה $|f(x)|-|g(x)|$ (F)

זהה לסימן של $f^2(x)-g^2(x)$ בתחום ההגדרה של הפונקציה (F) .

דוגמה 3.2

אי-השוויון $|2x+2|>|x+5|$

שקול לאי-השוויון $(2x+2)^2-(x+5)^2<0$.

$$4x^2+8x+4-x^2-10x-25<0$$

$$3x^2-2x-21<0$$

$$-2\tfrac{1}{3}<x<3$$

סוג 3

(א) אי-השוויון $\sqrt{f(x)} < g(x)$ שקול למערכת אי-שוויונות:

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

בתחום ההגדרה של אי-השוויון המקורי.

(ב) אי-השוויון $\sqrt{f(x)} > g(x)$ שקול לסט:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ g(x) < 0 \end{array}\right.$$

בתחום ההגדרה של אי-השוויון המקורי.

דוגמה 3.3

אי-השוויון $\sqrt{7+x} < 7-2x$ שקול למערכת:

$$\begin{cases} 7+x < (7-2x)^2 \\ 7+x \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4x-21)(x-2) > 0 \\ x \geq 7 \ , \ x < -3.5 \end{cases}$$

התשובה היא $-7 \leq x < 2$.

דוגמה 3.4

אי-השוויון $\sqrt{7+x} > 7-2x$ שקול לסט:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7+x>(7-2x)^2\\7+x\geq 0\\7-2x\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}7+x\geq 0\\7-2x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

הפתרון של המערכת הראשונה הוא $2<x\leq 3.5$.

הפתרון של המערכת השנייה הוא $x>3.5$.

לכן הפתרון הכללי הוא $x>2$.

סוג 4

הסימן של $\mathrm{a}^{f(x)}-\mathrm{a}^{g(x)}$ (F_1) זהה לסימן של $(\mathrm{a}-1)\cdot[f(x)-g(x)]$ בתחום ההגדרה של (F_1), וגם הסימן של $\mathrm{a}(x)^{f(x)}-\mathrm{a}(x)^{g(x)}$ (F_2) זהה לסימן של $[\mathrm{a}(x)-1]\cdot[f(x)-g(x)]$ בתחום ההגדרה של (F_2).

דוגמה 3.5

אי-השוויון $(3^x-1)\cdot(2^{x^2}-16)\geq 0$ שקול לאי-השוויון: $(x-0)\cdot(x^2-4)\geq 0$.

לפי שיטת הנחש, הפתרון הוא: $x\geq 2$ או $-2\leq x\leq 0$.

דוגמה 3.6

אי-השוויון: $(3x+1)^{\left|\frac{4x-6}{2x-1}\right|}-(3x+1)^3<0$ שקול למערכת אי-השוויונות:

$$\begin{cases}\left(3x+1-1\right)\left[\left|\frac{4x-6}{2x-1}\right|-3\right]<0\\3x+1>0 \quad 3x+1\neq 1\\2x-1\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot\left[\dfrac{(4x-6)^2}{(2x-1)^2}-9\right]<0 \\ x<-\frac{1}{3}\ ,\ x\neq\frac{1}{2}\ ,\ x\neq 0\end{cases}$$

$$x\cdot(16x^2-48x+36-36x^2+36x-9)<0$$

$$x\cdot(-20x^2-12x+27)<0$$

$$x\cdot(2x+3)(9-10x)<0$$

לפי שיטת הנחש בתחום ההגדרה, הפתרון הוא $x>\frac{9}{10}$ או $-\frac{1}{3}<x<0$.

סוג 5

סימן הפונקציה $\log_a f(x)-\log_a g(x)\quad (F_1)$ זהה לסימן הפונקציה $(a-1)\cdot[f(x)-g(x)]$ בתחום ההגדרה של (F_1), וגם סימן הפונקציה $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\quad (F_2)$ זהה לסימן הפונקציה $[a(x)-1]\cdot[f(x)-g(x)]$ בתחום ההגדרה של (F_2).

דוגמה 3.7

אי-השוויון $\dfrac{\log_{0.2}(3x+1)+\log_5(x-1)}{\log_{0.2}(x+5)}\geq 1$ שקול למערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{0.2}(3x+1)-\log_{0.2}(x-1)-\log_{0.2}(x+5)}{\log_{0.2}(x+5)}\geq 0 \\ 3x+1>0 \\ x-1>0 \\ x+5>0 \\ x+5\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{0.2}(3x+1)-\log_{0.2}(x-1)(x+5)}{\log_{0.2}(x+5)}\geq 0 \\ x>1 \end{cases}$$

ולמערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{(0.2-1)\,[3x+1-(x^2+4x-5)]}{(0.2-1)\,[(x+5)-1]} \geq 0 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2-x+6}{x+4} \geq 0 \\ x>1 \end{cases}$$

לפי שיטת הנחש, התשובה היא $1<x\leq 2$.

דוגמה 3.8

אי-השוויון $\log_{(10-x^2)}\left(\frac{16x}{5}-x^2\right)<1$ שקול למערכת:

$$\begin{cases} \left(10-x^2-1\right)\cdot\left[\left(\frac{16x}{5}-x^2\right)-\left(10-x^2\right)\right]<0 \\ 10-x^2>0 \\ 10-x^2\neq 1 \\ \frac{16x}{5}-x^2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9-x^2)(16x-50)<0 \\ -\sqrt{10}<x<\sqrt{10} \\ x\neq \pm 3 \\ 0<x<3.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3+x)(3-x)(16x-50)<0 \\ 0<x<\sqrt{10}\ ,\ x\neq 3 \end{cases}$$

הפתרון הוא $\frac{25}{8}<x<\sqrt{10}$ או $0<x<3$.

הערה: אי אפשר להכניס את כל הסוגים של אי-שוויונות לתורה אחת.

בפתרון תרגילים יש לקחת בחשבון תכונות של פונקציות שנמצאות במשוואות ובאי-שוויונות.

השיטות המוצגות במאמר עוזרות לשיפור סגנון החשיבה אנליטית.

4. מערכות של אי-שוויונות

משפט 4.1

אם נחליף סדר אי-שוויונות במערכת, נקבל המערכת השקולה לנתונה.

משפט 4.2

אם נחליף אחד מאי-השוויונות במערכת באי-השוויון השקול לו, נקבל מערכת שקולה למערכת הנתונה.

ההוכחה של שני המשפטים היא טריוויאלית.

משפט 4.3

נתבונן במערכת אי-שוויונות $\{F\}$:

$$\{F\} \quad F_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0\ ,\ F_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0\ ,\ \dots\ ,$$
$$F_s(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0\ ,\ \dots\ ,\ F_n(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0 \qquad 1 < s < n$$

נתבונן במערכות חלקיות :

$$\{F'\} \quad F_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0\ ,\ \dots\ ,\ F_{s-1}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0$$
$$\{F''\} \quad F_s(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0\ ,\ \dots\ ,\ F_n(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) < 0$$

אם $M_{\{F\}}$, $M_{\{F'\}}$, $M_{\{F''\}}$ קבוצות כל הפתרונות של כל אחת מהמערכות, אזי מתקיים : $M_{\{F\}} = M_{\{F'\}} \cap M_{\{F''\}}$.

ההוכחה זהה להוכחת משפט 1.2.

משפט 4.4

נתבונן במערכת אי-שוויונות $\{F\}$ כפי שנתונה במשפט 4.3.

אם לאחד אי-השוויונות, נניח לאי-השוויון ה-n-י, נוסיף צירוף לינארי של אי-השוויונות האחרים, כלומר :

$F_n + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_{n-1} F_{n-1} < 0$ ($\alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{n-1}$ מספרים), אזי נקבל מערכת $\{F'\}$ שהיא מסקנה מהמערכת $\{F\}$.

הוכחה

נסמן את אי-השוויון החדש ב- F'_n : $F'_n = F_n + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$

$$F_1(x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_k) < 0 \ , \ \ldots \ , \ F_{n-1}(x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_k) < 0 \ , \ F'_n(x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_k) < 0 \qquad \{F'\}$$

אם $(a_1 \ , \ \ldots \ , \ a_k) \in M_{\{F\}}$, אז $F_i(x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_k) < 0$ ($1 \le i \le n$), ואז $F'_n(a_1 \ , \ \ldots \ , \ a_k) < 0$, כלומר $(a_1 \ , \ \ldots \ , \ a_k) \in M_{\{F'\}}$.

ההפך אינו תמיד נכון.

משקל גדול במתמטיקה ובמיוחד בכלכלה במערכת אי-שוויונות ליניאריים עם הרבה נעלמים (Heller, 1963).

אפשר לסדר מערכת של m אי-שוויונות ליניאריים עם n נעלמים $x_1 \ , \ x_2 \ , \ \ldots \ , \ x_n$ כך:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

בבית הספר לומדים את המערכת עבור שני משתנים בקורס "תכנון ליניארי".

מערכת של m משוואות עם n נעלמים היא הבסיס לפתרון בעיות תכנון בתעשייה, כאשר הנעלמים הם התוצרת של מפעל, המקדמים a_{ij} הם המשאבים הדרושים לייצור יחידת מוצר אחת, ו- b_i, כמות המשאבים המותרת.

בתכנון ליניארי מקובל להחליף את המערכת (4.1) במערכת m משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$(4.2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} + \ \ldots & = b_2 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n \qquad \ldots + x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

כאשר הנעלמים $x_{\mathrm{n+1}}$, $x_{\mathrm{n+2}}$, ... , $x_{\mathrm{n+m}}$ הם אי-שליליים:

$$x_{\mathrm{n+1}} \geq 0 \ , \ x_{\mathrm{n+2}} \geq 0 \ , \ \ldots \ , \ x_{\mathrm{n+m}} \geq 0$$

דוגמה

בחווה מגדלים 3 גידולים חקלאיים. סך היבול מגידולים אלה צריך להיות לפחות 17,000 ק״ג, ולשירות החווה עומדים 18,500 מ״ק מים. הוצאות העסק לא צריכות לעלות על 42,000 ש״ח.

לגידול א׳ נדרשים 200 מ״ק מים לדונם ו-800 ש״ח לדונם של הוצאות,

לגידול ב׳ נדרשים 500 מ״ק מים לדונם ו-500 ש״ח לדונם של הוצאות,

לגידול ג׳ נדרשים 350 מ״ק מים לדונם ו- 700 ש״ח לדונם של הוצאות.

מגידול א׳ מקבלים יבול של 400 ק״ג לדונם,

מגידול ב׳ מקבלים יבול של 300 ק״ג לדונם,

מגידול ג׳ מקבלים יבול של 200 ק״ג לדונם.

נשאלת השאלה: כיצד יש לארגן את המזרע?

פתרון

נסמן ב- x_1 את מספר הדונם עבור גידול א׳, ב- x_2 את מספר הדונם עבור גידול ב׳, וב- x_3 את מספר הדונם עבור גידול ג׳.

נבנה מערכת אילוצים:

$$\begin{cases} 200x_1 + 500x_2 + 350x_3 \leq 18,500 \\ 800x_1 + 500x_2 + 700x_3 \leq 42,000 \\ 400x_1 + 300x_2 + 200x_3 \geq 17,000 \end{cases}$$

נסדר את המערכת בצורה (4.1) (נחלק את כל המקדמים ב-100):

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3.5x_3 \leq 185 \\ 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 420 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq -170 \end{cases}$$

כעת נסדר את המערכת בצורה (4.2) :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3.5x_3 + x_4 & \le 185 \\ 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_5 & \le 420 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_6 & \le -170 \\ x_4 \ge 0 \ , \ x_5 \ge 0 \ , \ x_6 \ge 0 \end{cases}$$

אם נציב במקום x_4 , x_5 , x_6 מספרים חיוביים, נקבל מערכת משוואות.

בין הפתרונות, לפי תוכן הבעיה, מתאימים רק x_1 , x_2 , x_3 אי-שליליים (שטח בדונמים).

סיכום

בשל החשיבות הרבה של הנושא במרבית תחומי המתמטיקה המאמר ממשיך את הדיון על שקילות בפתרון משוואות, שהתחיל במאמר קודם (מוגילבסקי, 2014), ומרחיב את היריעה עבור אי-שוויונות ומערכת (וגם) וסטים (או) של משוואות ואי-שוויונות. הוצגו משפטים המאפשרים לעבור למערכות פשוטות יותר מבלי לאבד פתרונות או הכנסת פתרונות שגויים. לכל משפט הובאה הוכחה וכן דוגמה המבהירה את השימוש של המשפט. הדוגמאות הקיפו סוגים שונים של משוואות ואי-שוויונים אלגברים וכן דוגמה אחת מתחום הטריגונומטריה.

המאמר מיועד להרחבת אופק הראייה של סטודנטים ומורים למתמטיקה בתחום האלגברה ויש בו את ההדגשים המתאימים עליהם יש להקפיד בהוראת המקצוע.

רשימת מקורות

מוגילבסקי, ר' (2014). שקילות בפתרון משוואות, מערכות משוואות ואי-שוויונים (חלק א). **שאנן, 20**, 314-358.

Heller, I. (1963). On a class of equivalent systems of linear inequalities. *Pacific Journal of Mathematics, 13*(4), 1209-1227.

Kreynin, Y. L. (1994). *Equivalence transformations for sets of equations and inequalities*. Russia.