רות סגל, משה סטופל, ויקטור אוקסמן

חקר דינמי של מקומות גאומטריים בשילוב הוכחות מתמטיות בדרכים שונות

תקציר

למקום הגאומטרי כבעל תכונה של שימור – ישנה חשיבות רבה בלימודי הגאומטרייה ובתחומי מתמטיקה נוספים. המאמר מציג את היווצרות המקום הגאומטרי – ממבט של מחקר דינמי באמצעות טכנולוגיה ממוחשבת.

להדגמת המחקר הובאו ארבע משימות, אשר בהן על בסיס של מקום גאומטרי נתון, על-ידי הוספת בעיית חקר – נוצר מקום גאומטרי חדש, שבחלק מהמקרים משמר את צורת המקום הגאומטרי המקורי, ובחלק מהמקרים משתנה הצורה. כדי לאפשר לקורא לחוות את החקר – נבנו יישומונים ממוחשבים, שאפשר להפעילם באמצעות קישורים (לינקים). לחלק מהמשימות הובאו הוכחות מתמטיות ביותר מדרך אחת. כמו-כן הוכנו נוסחאות מתמטיות לצורת המקומות הגאומטריים שיתקבלו בהתאם לגרף, שעליו נעה נקודה המחוללת את היווצרותו.

מילות מפתח: *מקומות גאומטריים; שימור ושינוי; חקר דינמי ממוחשב.*

הקדמה

המקום הגאומטרי מוגדר כצורה הנדסית שלכל נקודותיה, ורק להן, תכונה משותפת, או בשפה של תורת הקבוצות: מקום גאומטרי הוא אוסף כל הנקודות, שהן, ורק הן – מקיימות תנאי מסוים. המקום הגאומטרי הוא מושג חשוב מאוד במסגרת גאומטרייה אוקלידית ואנליטית ומהווה כלי לפתרון בעיות שונות, וכן מאפשר לבצע בניות הנדסיות.

בדרך כלל בספרי-הלימוד במתמטיקה של החינוך העל-יסודי אין פרק מיוחד המוקדש למקום הגאומטרי, והנושא מובלע בפרקים השוטפים, המתאימים לתכנים המופיעים בתכנית-הלימודים של חטיבת-הביניים. רק בתכנית ההוראה (בהיקף של 5 יח"ל) של החטיבה העליונה מופיע פרק מיוחד על מקומות גאומטריים – תוך כדי עיסוק במקומות גאומטריים כמו מעגל, פרבולה, אליפסה והיפרבולה. כאן המקום הגאומטרי מוגדר באמצעות משוואה, המקשרת בין שיעורי ה-x וה-y של הנקודות השייכות למקום הגאומטרי (וכך גם בהנדסה אנליטית

במרחב). לכן הפונקצייה האלגברית (והעקומה המתמטית שלה) המקשרת בין x ל-y היא, למעשה, מקום של נקודות, שהן, ורק הן, מקיימות את תכונת המקום הגאומטרי, גם אם הוא לא זכה לשם ייחודי.

חשוב לציין, שהמושג 'מקום גאומטרי' מופיע בתחומי מדע נוספים – כמו בתנועה מעגלית של גופים על משטחים שונים, בראייה ממוחשבת וביישומונים טכנולוגיים ממוחשבים מתקדמים.

ישנם מספר סוגים של בעיות הקשורות במקומות גאומטריים :

(1) הוכחה, כי צורה מסוימת היא מקום גאומטרי מוגדר (שיש לו שם כגון מעגל, אליפסה, פרבולה), כלומר נתונה התשובה ויש להוכיח שהיא מקום גאומטרי.

(2) מציאת המקום הגאומטרי לפי תנאים נתונים.

(3) שימוש בתכונותיהם של מקומות גאומטריים ידועים לפתרון בעיות חישוב, הוכחה ובעיות בנייה.

(4) המקום הגאומטרי כתכונה משמרת (שטח, היקף, זווית, סכום מרחקים וכדומה).

חשוב לציין, שכדי להוכיח את נכונות המקום הגאומטרי – מחלקים את ההוכחה לשני חלקים :

א. הוכחה, שכל הנקודות המקיימות את התכונה – נמצאות על המקום הגאומטרי.

ב. הוכחה, שכל הנקודות הנמצאות על המקום הגאומטרי – מקיימות את התכונה.

המאמר הנוכחי יעסוק בסעיפים **(2)** ו-**(4)** :

זיהוי המקום הגאומטרי לפי תנאים נתונים והמקום הגאומטרי כתכונה משמרת.

הוראת הנושא מקומות גאומטריים בחטיבה העליונה (בהיקף של 5 יח"ל) – כוללת פתרון תרגילים שונים, אשר בהם נדרש התלמיד למצוא מקום גאומטרי בהתאם לנתוני השאלה.

המאמר הנוכחי מציע מבט אחר על הנושא מקומות גאומטריים, המזַמן הבנה קונספטואלית של הנושא – תוך כדי זיהוי תכונות משמרות והכללות מתאימות, המתקבלות באמצעות חקר המשלב שימוש בתכנה גאומטרית דינמית (Geogebra).

שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת

מחקרים בחינוך מחפשים אחר דרכים לשפר את איכות ההוראה והלמידה, ומשום כך הם מתמקדים גם בשילוב הטכנולוגיה בהוראה. הכלי הטכנולוגי מאפשר לבנות ולהציג אובייקטים מתמטיים באופן דינמי תוך כדי מתן משוב למשתמש במהלך פתרון בעיות (Alakoc, 2003; Martinovic & Manizade, 2013). למידה המשלבת שימוש בתכנה דינמית – מאפשרת ללומדים לגלות תופעות מתמטיות, מודלים מתמטיים, ייצוגים מגוונים, הכללות וקשרים בין תיאורים גרפיים תוך כדי התייחסות למושגים מתמטיים (Wiest, 2001). אחד הקשיים, הקיימים אצל הלומדים בלימוד הנושא מקומות גאומטריים, הוא הבנת הקשר בין שינוי במשתנה אחד הגורם לשינוי במשתנה האחר. בלמידה באמצעות כלי טכנולוגי –יכולים הלומדים לתאר טוב יותר מושגים וקשרים מתמטיים בהשוואה להוראה שאינה משלבת כלי טכנולוגי. הלומדים משיגים הבנה טובה יותר של מושגים מופשטים אלה, והם מונגשים עם רעיונות מתמטיים ברמה גבוהה (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008).

משימות החקר המוצגות במאמר זה – מתאימות לשילוב בהוראת הנושא בקרב סטודנטים ומורים בפועל, כחלק מהתכנית להכשרתם לקראת הוראת המקצוע וכן לצורך העמקת הידע המתמטי של מורים בפועל. את הפעילויות המוצגות אפשר ללוות באמצעות שימוש בתכנה דינמית (D.G.S) שבמאמר הנוכחי היא Geogebra.

השימוש בתכנה דינמית מסייע לתלמידים לפתור בעיות באמצעות למידה מדוגמאות. התלמידים מסיקים מהדוגמאות את המהלכים המהותיים, עוקבים אחרי התכונות הקריטיות של המושג, מפנימים אותן ומיישמים אותן בהמשך בפתרון בעיות חדשות. יכולתו של המחשב ליצור באופן מהיר דוגמאות רבות ומגוונות, לשמר ולשחזר מהלכים ולספק משוב איכותי ולא רק שיפוטי – מסַפקת ללומד מידע על המושג המתמטי, המהווה בסיס להכללות ולהשערות הדורשות הוכחה (Chazan, 1993; Dreyfus & Hadas, 1996; Hanna, 2000; Laborde, 2000).

השימוש בטכנולוגיה הממוחשבת מאפשר שינויים דינמיים בנתונים וקבלת המקום הגאומטרי על-ידי גרירה והמחשה מידית של השינוי בנתונים.

תכונת השימור

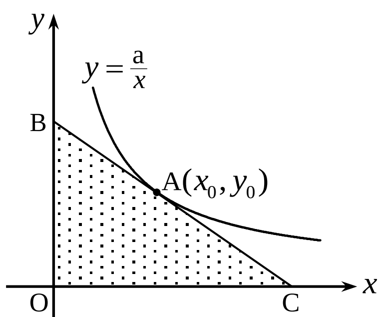
בתחומי הפיסיקה ידועים מספר חוקי שימור, כגון חוק שימור האנרגיה, חוק שימור התנע, חוק שימור המטען ועוד. חוקי השימור מצביעים על תכונה של חומרים או של גופים בטבע, אשר אינה משתנה גם כאשר מתחוללים שינויים דינמיים הקשורים בה. כך, למשל, במהלך תנועתו של גוף, האנרגיה הקינטית שלו הופכת לאנרגיה פוטנציאלית, אלסטית או לחום, אך סך כל האנרגיה במערכת הסגורה שהגוף נמצא בה – נשאר קבוע.

אפשר לגלות במתמטיקה מספר רב מאוד של תופעות שימור. מכאן המונח "**אינווריאנטה**" – "**שמורה**" – הבא לתאר גודל שאינו משתנה למרות ביצוע פעולה מסוימת. תכונה משמרת מאפשרת שימוש בה לפתרון בעיות שונות במתמטיקה, וזיהויה מוביל להבנה שלמה ומעמיקה של מושגים מתמטיים והקשרים ביניהם. המקום הגאומטרי כהגדרתו משמר תכונה מסוימת, ועל-כן אפשר להשתמש בתכונה שלו להוכחה של מגוון רחב של בעיות ואף להיעזר בו לביצוע בעיות בנייה בעזרת סרגל ומחוגה, כפי שמקובל לעשות מאז ימי העולם הקדמון של המתמטיקה.

להלן שתי דוגמאות לתכונת שימור במתמטיקה:

א. היפרבולה ומשיק

בהינתן גרף הפונקצייה $y=\frac{a}{x}$ ונקודה כלשהי ברביע הראשון $A(x_0,y_0)$ עליו, השטח הנוצר בין ציר ה- x, ציר ה- y והמשיק לגרף בנקודה A הוא קבוע ואינו תלוי במיקום הנקודה A על הגרף (ראה איור 1). בעזרת חשבון דיפרנציאלי מוכיחים תכונה זו.

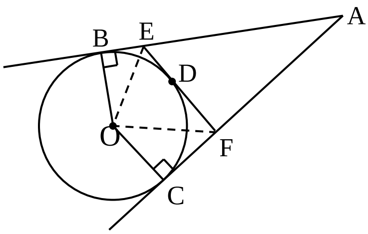


איור 1

ב. משיקים למעגל

בהינתן מעגל שמרכזו O, נקודה A מחוץ למעגל ושני משיקים למעגל בנקודות B ו-C שעליו, היקף המשולש,

הנוצר מהעברת משיק שלישי דרך נקודה D שעל הקשת הקטנה $\widehat{BC}$, הוא קבוע ואינו תלוי בבחירת המקום של הנקודה D (ראה איור 2). ההוכחה מבוססת על האורכים השווים של שני משיקים היוצאים מאותה נקודה. במשימה זו אפשר להוכיח שגם הזווית EOF קבועה ואינה תלויה במיקום הנקודה D שעל הקשת.



איור 2

דרכים שונות לחקירת מקומות גאומטריים

עד לפני מספר שנים הייתה דרך הניסוי המקובלת לחקירת צורת המקום הגאומטרי, שמתקבלת על-פי נתונים מסוימים – שימוש ידני בכלי שרטוט, ביצוע מדידות ולאחריהן חישובים מתמטיים עבור נקודות שונות במישור. דרך זו ארוכה ותלויה מאוד במספר הנקודות שנבחרו לבדיקה, אך מאפשרת למצוא בקירוב די טוב את המקום הגאומטרי.

הופעת התכנות הממוחשבות ובמיוחד הגאומטריות – אפשרו, על-ידי הכנת יישומונים מתאימים, לבצע חקר דינמי מהיר, המאפשר באופן מהיר לזהות את צורת המקום הגאומטרי או, לחלופין, לאשר או לסתור את ההשערה לגבי צורתו.

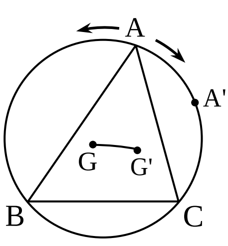
מובן, שקבלת צורת המקום הגאומטרי על-ידי התכנה הדינמית איננה הוכחה וגם אינה מספקת קשר מדויק בין צורת המקום הגאומטרי שהתקבל – לבין הפרמטרים הייחודיים שלו, כגון רדיוס, שיעורי מוקדים וכדומה. לפעמים צורת המקום הגאומטרי, כפי שהתקבלה על-ידי התכנה הדינמית – נראית כחלק מקשת מעגל או כחלק מאליפסה, בשל הדמיון הוויזואלי, אך, למעשה, היא חלק של עקומה אחרת. לכן, כל משימה של קביעת מקום גאומטרי מחייבת הוכחה מתמטית מלאה, ותפקידה של התכנה הדינמית הוא לאפשר זיהוי ראשוני ומתוך כך לשער מהי צורתו של המקום הגאומטרי לקראת תהליך ההוכחה המתמטי הנדרש.

בעת השימוש בתכנה הדינמית אפשר לשנות את הפרמטרים המשולבים במשימה ולראות מידית את השפעת השינוי בערך הפרמטר על צורת המקום הגאומטרי שיתקבל.

בהמשך המאמר מוצגות משימות שונות, המציגות את תכונת השימור במהלך היווצרותו של מקום גאומטרי, המשלבות גם את הכלי הטכנולוגי.

משימה 1 – מקומות גאומטריים, הנוצרים על-ידי נקודות החיתוך של קווים ייחודיים במשולש חסום במעגל

משולש ΔABC חסום במעגל באופן שקדקודי בסיסו B ו-C קבועים וקדקודו A נע על קשת המעגל $\widehat{BC}$ (ראה איור 3). שינוי מיקומה של הנקודה A על קשת המעגל (לנקודה A') – גורם לשינוי מיקומה של הנקודה G למיקום G'. יש למצוא את המקום הגאומטרי עבור כל אחד מארבעת המקרים הבאים:



איור 3

(א) מהו המקום הגיאומטרי של נקודת מפגש **האנכים האמצעיים** בכל אחד מהמשולשים?

(ב) מהו המקום הגיאומטרי של נקודת מפגש **הגבהים** בכל אחד מהמשולשים?

(ג) מהו המקום הגיאומטרי של נקודת מפגש **חוצי-הזווית** בכל אחד מהמשולשים?

(ד) מהו המקום הגיאומטרי של נקודת מפגש **התיכונים** בכל אחד מהמשולשים?

פתרון משימה 1:

מקרה (א)

כידוע, נקודת מפגש אנכים אמצעיים במשולש כלשהו, היא נקודת מרכז המעגל החוסם אותו. במקרה הזה, כל המשולשים חסומים באותו מעגל, ועל-כן מרכזו הוא המקום הגאומטרי, דהיינו, המקום הגאומטרי הוא נקודה בלבד.

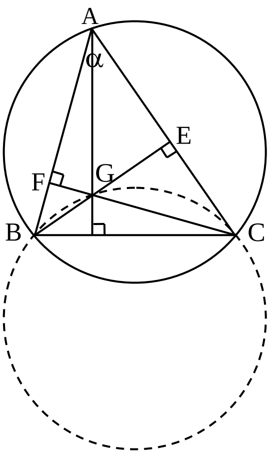
מקרה (ב)

נראה באיור 4, הנקודה G היא נקודת מפגש הגבהים של המשולש.

מסמנים: $\measuredangle BAC = \alpha$.

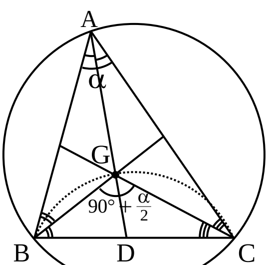
על-ידי חישוב זוויות במשולש מקבלים:

$\measuredangle BGC = 180^\circ - \alpha$. בעת תנועת הקדקוד A על קשת המעגל, הזווית $BA'C$ נותרת קבועה (זווית היקפית), ולכן גם הזווית $BG'C$ נותרת קבועה. מכאן נובע, שמכל נקודה G' רואים את הקטע BC באותה זווית, ועל-כן היא נעה על קשת של מעגל. מאחר שסכום הזוויות $\measuredangle BA'C + \measuredangle BG'C = 180^\circ$, הרי שהמקום הגאומטרי הוא מעגל בעל רדיוס, השווה לרדיוס המעגל המקורי (התנאי למרובע בר-חסימה) (ראה באיור 4).



איור 4

מאחר שגובהי-המשולש יכולים להיפגש מחוץ למשולש (משולש קהה-זווית), נובע מכך שחלק מהמקום הגאומטרי נמצא מחוץ למעגל המקורי.

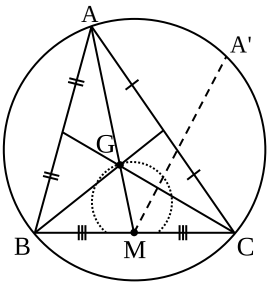


איור 5

מקרה (ג)

כמו שנראה באיור 5 – הנקודה G היא נקודת מפגש חוצי-הזווית. מסמנים $\measuredangle BAC = \alpha$ ועל-ידי חישוב זוויות מקבלים: $\measuredangle BGC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. גם במקרה זה, בזמן תנועת הנקודה A על קשת המעגל, הזווית $BG'C$ נותרת קבועה. על-כן הנקודה G' נעה על קשת מעגל, אשר בו BC הוא מיתר. רדיוס המעגל של המקום הגאומטרי שונה מרדיוס המעגל המקורי. הרדיוסים יהיו שווים רק עבור $\alpha = 60^\circ$. מאחר שנקודת פגישת חוצי-זווית של משולש היא תמיד בתוך המשולש, הרי שבמקרה זה המקום הגאומטרי נמצא בתוך המשולש.

מקרה (ד)



איור 6

כפי שנראה באיור 6, הנקודה G היא נקודת מפגש התיכונים של המשולש החסום. במקרה זה אין קשר קבוע בין הזוויות $\measuredangle BA'C$ ו- $\measuredangle BG'C$, אך קיימת תכונה משמרת. בזמן תנועת הנקודה A על הקשת BC, מתקיים הקשר: $A'G' = 2 \times G'M$, כאשר הנקודה M היא נקודת אמצע המיתר BC. הקשר נובע מיחס החיתוך של תיכונים במשולש (המשפט: התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת, המחלקת כל אחד מהם ביחס של 2:1). מאחר שהנקודה M היא נקודה קבועה בעת הזזת הנקודה A, הרי שנקודה זו היא נקודת מרכז ההומותטיה.

ההומותטיה היא טרנספורמציה, אשר מעבירה כל נקודה C לנקודה C' וכך $\frac{OC'}{OC} = k$, כאשר הנקודה O נקראת מרכז ההומותטיה ו-k הוא המקדם, ההומותטיה מעבירה עקום (צורה) כלשהו A לעקום G, השומר על צורתה הגאומטרית של העקומה המקורית.

לכן הנקודה G נעה על מסלול דומה למסלול, אשר עליו נעה הנקודה A, כלומר, הנקודה G נעה על מקום גאומטרי, שהוא חלק ממעגל הנמצא כולו בתוך המעגל הנתון.

סיכום המקרים (א) – (ד)

במקרים (ב) – (ד) המקום הגאומטרי של נקודות החיתוך של הישרים הוא מעגל או חלק של מעגל.

במקרה (א) המקום הגאומטרי הוא נקודה בלבד, שהיא למעשה מעגל מנוון.

יישומונים

עבור מקרים (ב) – (ד) הוכנו יישומוני גאוג'ברה, שבהם אפשר להזיז את שלושת קדקודי המשולש ולראות באופן דינמי את היווצרות המקומות הגאומטריים.

יישומון 1: (מקרה ב) נקודת מפגש הגבהים: http://tube.geogebra.org/student/m892907

יישומון 2: (מקרה ג) נקודת מפגש חוצי- זוויות: http://tube.geogebra.org/student/m892927

יישומון 3: (מקרה ד) נקודת מפגש תיכונים: http://tube.geogebra.org/student/m892945

היווצרות מקומות גאומטריים שונים

קיימות דרכים שונות להיווצרותם של מקומות גאומטריים. באמצעות המשימות הבאות נציג בפניכם אופנים שונים של היווצרות מקום גאומטרי, כאשר הדוגמה תלווה ב:

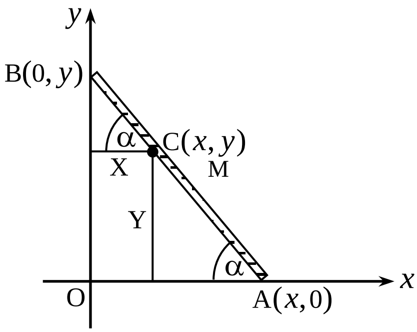
(א) הבאת הוכחות מתמטיות לצורת המקום הגאומטרי.

(ב) הצגת המקום הגאומטרי על-ידי יישומון של תוכנה דינמית (ברוב המקרים).

משימה 2 – סרגל מחליק במערכת צירים

סרגל AB באורך נתון K מחליק במערכת צירים באופן שקצותיו A ו-B נותרים על הצירים x ו- y (ראה איור 7).

על איזה מסלול גאומטרי נעות הנקודות M ו-C (הנקודה M היא נקודת אמצע הקטע, הנקודה C במקום כלשהו על הקטע)?



איור 7

שימוש בכלים מתמטיים למציאת המשוואה המתמטית של המקום הגאומטרי, אשר עליו נעות הנקודות C על הסרגל בעת החלקתו:

דרך א – על-ידי שימוש בטריגונומטריה

מהנקודה $C(x,y)$ מורידים אנכים לצירים ומסמנים ב- α את הזווית החדה שבין הסרגל לציר ה- x. הנקודה C מחלקת את הקטע AB לשני חלקים שיחס אורכיהם $p=m:n$ ($\frac{BC}{CA}=\frac{m}{n}=p$). לפי הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות: $\cos\alpha=\frac{x}{m}$, $\sin\alpha=\frac{y}{n}$.

על-ידי הצבת ערכים אלה בקשר $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ מקבלים: $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, כלומר הנקודה C נעה על מסלול של אליפסה. $\frac{{x_c}^2}{\left(\frac{kp}{1+p}\right)^2}+\frac{{y_c}^2}{\left(\frac{k}{1+p}\right)^2}=1$, כלומר הנקודה C נעה על היקפה של אליפסה.

עבור המקרה ש- $p=1$ ($m=n$), דהיינו שהנקודה C מתלכדת עם הנקודה M, משוואת המקום הגאומטרי היא ${x_c}^2+{y_c}^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$, כלומר המקום הגאומטרי הוא מעגל קנוני, שרדיוסו $\frac{k}{2}$. עבור $p<1$ הציר הגדול של אליפסה, והמוקדים נמצאים על ציר ה- y, וכאשר $p>1$ הציר הגדול של האליפסה, המוקדים נמצאים על ציר ה- x.

המפתיע: בזמן ההחלקה של הסרגל בהתאם למיקום של הנקודה C – אפשר לקבל שלושה מקומות גאומטריים שונים: מעגל ושתי אליפסות, השונות זו מזו במיקום המוקדים על צירי המערכת.

הערה: אפשר להוכיח את היווצרות המקומות הגאומטריים הנ"ל גם על-ידי שימוש בכלים מתמטיים מענפי המתמטיקה האחרים, אך הדרכים לפתרון ארוכות ודי מורכבות, ולכן הן לא יוצגו במאמר הנוכחי.

יישומון: מבחינת מיקום הנקודה C על הסרגל – אפשר להבחין בשלושה מקרים:

(1) יישומון 4: כאשר $m=n$ – הנקודה M נעה על מעגל שרדיוסו $\frac{k}{2}$ ומרכזו בראשית

הצירים O.

תוצאה זו אינה מפתיעה כי המרחק OM הוא קבוע לפי ש- $OM=\frac{k}{2}$ הוא תיכון ליתר במשולש ישר-זווית. את הדבר הזה ידעו הקדמונים ועל-כן כאשר רצו להחליק קורה כלפי מטה וחששו שבזמן ההחלקה היא תסטה הצידה, רתמו אותה בכבל מתכתי חזק ממרכז הקורה ועד לנקודה O.

(2) יישומון 5: כאשר $m<n$ - הנקודה C נעה על אליפסה שמוקדיה על ציר ה- y.

(3) יישומון 6: כאשר $m>n$ - הנקודה C נעה על אליפסה שמוקדיה על ציר ה- x.

דרך ב – על-ידי שימוש בהנדסה אנליטית

לפי הנוסחה לחלוקת קטע, שיעורי הנקודה C הם

$$x_c=\frac{mx}{m+n} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{m+n}{m}x_c=\left(\frac{1+p}{p}\right)x_c$$

$$y_c=\frac{ny}{m+n} \quad\Rightarrow\quad y=(1+p)y_c$$

על-פי משפט פיתגורס, $x^2+y^2=k^2$. מציבים את ערכי x ו- y במשפט פיתגורס ומקבלים את משוואת המקום הגאומטרי, שהנקודה C נעה עליו.

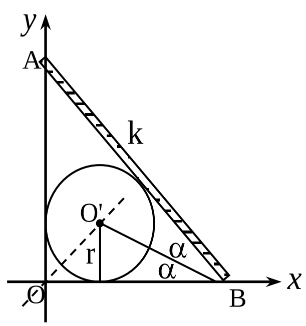
נבנה יישומון, המציג את היווצרות המקומות הגאומטריים הנ"ל על-ידי שינוי מיקום הנקודה C לאורך הסרגל – תוך כדי החלקתו הדינמית על צירי המערכת.

יישומון 4: http://tube.geogebra.org/student/m892949

משימת הרחבה למשימה 2

מהו המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים, החסומים במשולש ΔAOB בעת החלקתו של הסרגל על צירי המערכת?

מסמנים ב-'O את מרכזי המעגלים החסומים במשולש ΔAOB (ראה באיור 8א). חקר המשימה בעזרת יישומון דינמי (geogebra) – מעלה את ההשערה, שהמקום הגאומטרי הוא קו ישר בזווית של $45°$ עם ציר ה- x, שהמשכו עובר דרך ראשית הצירים (ראשית הצירים היא נקודה, שמתאימה למעגל בעל רדיוס $r=0$).



איור 8א

מבחינה מתמטית – התשובה אינה מפתיעה, שהרי מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש חוצי-הזוויות של המשולש ΔAOB. חוצה-הזווית הישרה הוא קבוע, וחוצי-זוויות A ו- B תמיד חותכים אותו. כאן המקום לחשב את גודלו של רדיוס

המעגל החסום – כתלות בזווית הנטייה של הסרגל המחליק.

מסמנים: $ABO = 2\alpha$

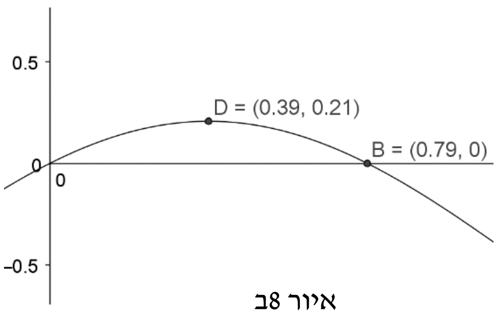
$OB = k\cos(2\alpha)$

על-פי משפט הקוסינוסים במשולש $OO'B$:

$$\frac{OO'}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin(135° - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad OO' = \frac{k\cos(2\alpha)}{\sin(135° - \alpha)}$$

ומכאן: $r = OO' \cdot \sin 45° = \frac{k\cos(2\alpha)}{\sin(135° - \alpha)}$

התלות של r ב-α מוצגת באיור 8ב, כשערכו המקסימלי של r הוא 0.21 עבור $\alpha = 22.5° = 0.39_{RAD}$.



איור 8ב

משימה 3 – ראיית מקומות גאומטריים ידועים בזווית ישרה

במשימה זו נביט על מקומות גאומטריים ידועים בזווית ישרה – כמוצג במקרים הבאים:

(א) מהו המקום הגאומטרי, שממנו רואים **מעגל** בזווית ישרה?

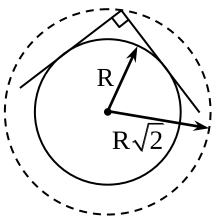
(ב) מהו המקום הגאומטרי, שממנו רואים **אליפסה קנונית** בזווית ישרה?

(ג) מהו המקום הגאומטרי, שממנו רואים **היפרבולה קנונית** בזווית ישרה?

(ד) מהו המקום הגאומטרי, שממנו רואים **פרבולה קנונית** בזווית ישרה?

מקרה (א)

קל להיווכח, שהמקום הגאומטרי, שממנו רואים מעגל בזווית ישרה, הוא מעגל שמרכזו מתלכד עם מרכז המעגל המקורי ורדיוסו $R\sqrt{2}$ (ראה איור 9) (את ההסבר לכך אנו משאירים לקורא).



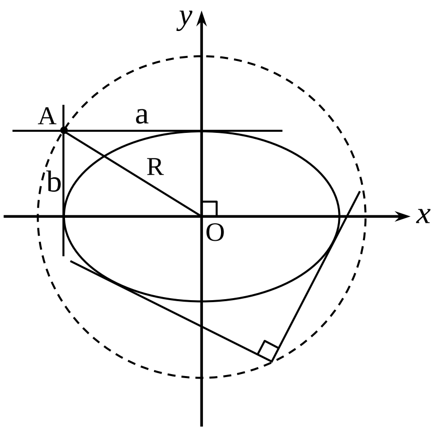
איור 9

מקרה (ב)

גם במקרה זה המקום הגאומטרי הוא מעגל קנוני, שמשוואתו $x^2+y^2=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$ כאשר a ו-b הם הפרמטרים של האליפסה. ההוכחה לכך ארוכה, ולכן לא תובא כאן. אם אכן יודעים, שהמקום הגאומטרי הוא מעגל קנוני, ומבקשים למצוא את רדיוסו – אפשר להעביר משיקים לאליפסה בקצות צירי האליפסה. משיקים אלו ניצבים זה לזה ונחתכים בנקודה A (ראה באיור 10).

מכאן רדיוס המקום הגאומטרי הוא

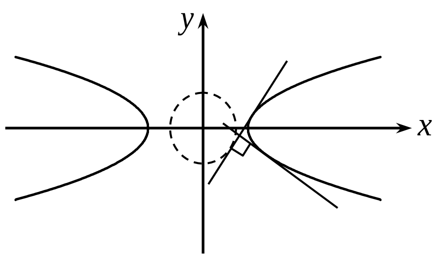
$$\mathrm{R}=\mathrm{AO}=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$$



איור 10

מקרה (ג)

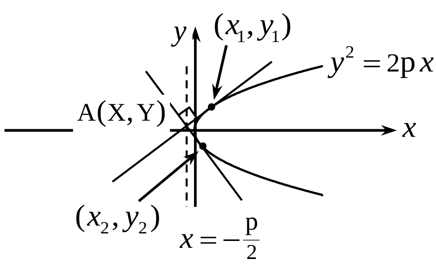
גם במקרה של היפרבולה, המקום הגאומטרי הוא מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2$, כאשר a ו- b הם פרמטרים של ההיפרבולה. ההוכחה שאכן זה מעגל דומה לזה שבמקרה (ב) (ראה איור 11).



איור 11

מקרה (ד)

המקום הגאומטרי, אשר ממנו רואים פרבולה קנונית בזווית ישרה, הוא קו ישר המאונך לציר ה-x. התוצאה מפתיעה, כי במקרים (א) – (ג) המקום הגאומטרי היה מעגל, ולכן היה צפוי שגם עבור פרבולה – המקום הגאומטרי יהיה מעגל. עובדה זו מהווה תמרור-אזהרה כשבאים לקבוע הכללה (ראה איור 12).



איור 12

הוכחה למקרה (ד)

מסמנים ב-(x_1,y_1) וב-(x_2,y_2) את נקודות ההשקה וב-$\mathrm{A}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ את נקודת החיתוך של המשיקים המאונכים.

בהתאם לסימון תהיינה משוואות המשיקים:

$$y=\frac{\mathrm{p}}{y_1}(x+x_1)\ ,\ y=\frac{\mathrm{p}}{y_2}(x+x_2)$$

מהתנאי לניצבות המשיקים מקבלים: $\frac{p}{y_1}\cdot\frac{p}{y_2}=-1 \ \Rightarrow\ y_1\cdot y_2=-p^2$

למציאת נקודות החיתוך משווים בין משוואות המשיקים: $\frac{p}{y_1}(x+x_1)=\frac{p}{y_2}(x+x_2)$

במקום x_1 ו- x_2 מציבים: $x_1=\frac{y_1^2}{2p}\ ,\ x_2=\frac{y_2^2}{2p}$

ומקבלים שבנקודת החיתוך של המשיקים $x=-\frac{p}{2}$.

במילים אחרות, המקום הגאומטרי, שממנו רואים פרבולה בזווית ישרה, הוא הישר $x=-\frac{p}{2}$, או במילים אחרות, המדריך של הפרבולה. זו תשובה מפתיעה.

אפשרויות להרחבה של משימה 3 – ראיית מקומות גאומטריים ידועים בזווית כלשהי

אפשר להרחיב את משימה 3 באמצעות שימוש באסטרטגיה "מה אם לא?" של בראון וולטר (Brown & Walter ,1969), ובמקרה זה לשאול מה יקרה אם הזווית, אשר ממנה אנו רואים את המקומות הגאומטריים הידועים – אינה ישרה? מה אם הזווית חדה? מה אם הזווית קהה?

הרחבת המשימה תוך כדי שימוש בכלי הטכנולוגי לצורך קבלת השערה – מאפשרת שילוב פעילות חקר רחבה יותר ובדיקה של תכונת השימור לגבי מקרים נוספים.

הרחבת המשימה מאפשרת מבט רחב ועמוק יותר על האובייקטים המתמטיים המשולבים במשימה, והופכת את המשימה למשימה רבת-עצמה.

משימה 4 – המקום הגאומטרי של מרכז המעגל החסום במשולש

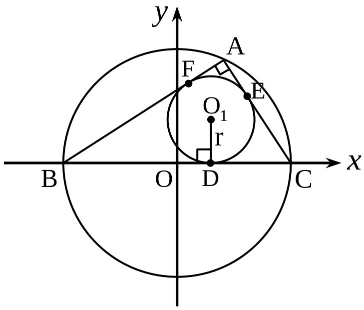
אבחנה בין שלושה מקרים

במהלך החיפוש אחר צורת המקום הגאומטרי, שעליו נע מרכז המעגל החסום במשולש – מתגלים דברים מפתיעים בשני כיוונים:

הראשון, צורתו של המקום הגאומטרי נמצאת מידית על-ידי שימוש בכלי הדינמי הממוחשב, שבעזרתו הוכן יישומון מתאים למשימה; השני, לפעמים ההוכחה המתמטית לצורתו של המקום הגאומטרי פשוטה וקצרה, אך לפעמים היא מורכבת וארוכה, אף-על-פי שנעשו ניסיונות למצוא אותה בכלים מתמטיים שונים.

מקרה (א) – המקרה שהנקודה A נעה על מעגל

נתון מעגל קנוני $x^2+y^2=R^2$. הנקודות B ו-C הן על ציר ה-x, ולכן הן קצות הקוטר BC והנקודה A נעה על היקף המעגל. מהו המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים החסומים במשולש ΔABC (ראה איור 13)?



איור 13

שלב מקדים: על-ידי שימוש בתכנה הדינמית – מתקבל, שמרכז המעגל החסום O_1 נע על קשת שמגיעה לנקודות B ו- C. ממבט על הצג נראה שהקשת היא חלק ממעגל. האם אכן זה מעגל, ואם כן, היכן מרכזו ומהו רדיוסו?

פתרון מתמטי:

דרך א' – מבוססת על שיקולים גאומטריים בשילוב הנדסה אנליטית

ברור, שהמשולש ΔABC הוא ישר-זווית ($\measuredangle A = 90°$).

מסמנים: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a = 2R$, ובאותיות D, E ו-F את נקודות ההשקה של המעגל החסום עם צלעות המשולש ΔABC.

קיים:

$$r = AF = AE = \frac{b+c-a}{2}$$

$$DC = CE = \frac{a+b-c}{2}$$

$$BD = BF = \frac{a+c-b}{2}$$

$$OD = \frac{a}{2} - DC = \frac{c-b}{2}$$

לכן, אם מניחים ללא הגבלת הכלליות ש-$c > b$, אז מסמנים: $Y = y_{O_1}$, $X = x_{O_1}$, כאשר O_1 מרכז המעגל החסום.

$$X = OD = \frac{c-b}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = c - b$$

$$Y = r = \frac{b+c-a}{2} \quad \Rightarrow \quad 2Y = b + c - a$$

משני הקשרים האחרונים מקבלים את התוצאה:

$$c = X + Y + R \;,\; b = Y - X + R$$

לפי משפט פיתגורס.

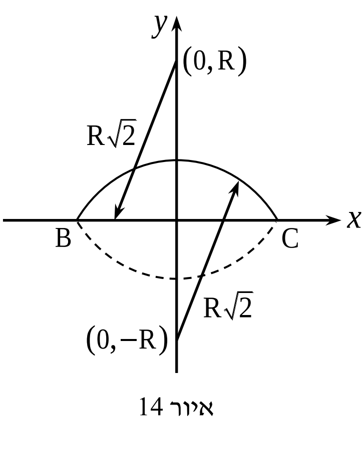
$$b^2 + c^2 = 4R^2$$

ולכן,

$$(Y - X + R)^2 + (X + Y + R)^2 = 4R^2$$

ועל-ידי פיתוח אלגברי מקבלים את התוצאה:

$$X^2 + (Y + R)^2 = 2R^2$$



איור 14

לכן המקום הגאומטרי הדרוש הוא קשת מעגל שמרכזו $(O, -R)$ ורדיוסו $R\sqrt{2}$ (ראה איור 14). הקו המרוסק מתאר את המקום הגאומטרי של מרכז המעגל החסום, כאשר הנקודה A נעה על החצי התחתון של המעגל.

דרך ב' – מבוססת על שיקולים גאומטריים בשילוב טריגונומטריה

מכיוון ש- $\measuredangle BAC = 90°$, הרי על-ידי חישוב זוויות מוצאים ש- $\measuredangle BO_1C = 135°$. מאחר שזווית BAC נותרת קבועה בזמן התנועה של הנקודה A על הקשת $\widehat{BC}$, הרי גם הזווית BO_1C נותרת קבועה, ולכן הנקודה O_1 נעה על קשת של מעגל, שמרכזו נמצא על ציר ה- y בשל הסימטריה.

על-פי משפט הסינוסים, $\frac{BC}{\sin \measuredangle BO_1C} = 2R'$, כאשר R' הוא הרדיוס של המקום הגאומטרי של O_1.

על-ידי הצבת $BC = 2R$, $BO_1C = 135°$ מקבלים: $R' = R\sqrt{2}$.

להדגמה דינמית של היווצרות המקום הגאומטרי הוכן יישומון.

יישומון 5: https://tube.geogebra.org/student/m1090083

מה עוד?

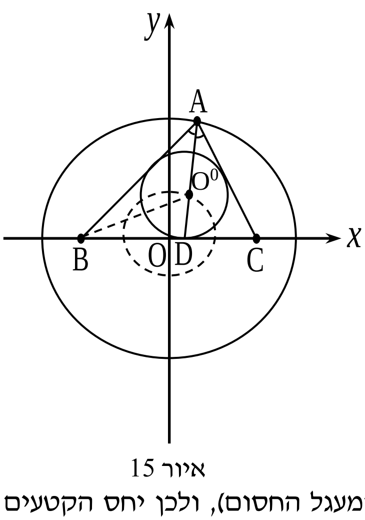
מה תהיה צורת המקום הגאומטרי, כאשר BC יהיה מיתר כלשהו במעגל, ולא קוטר?

בעיה זו כבר הוצגה במשימה 4א. מאחר שהזווית BO_1C נותרת קבועה בעת תנועת הנקודה A על המעגל, לכן המקום הגאומטרי יהיה חלק מקשת מעגל, אלא שבמקרה זה רדיוס הקשת העליונה יהיה שונה מרדיוס הקשת התחתונה.

אם מסמנים $BAC = \alpha$, כאשר הנקודה A נמצאת על הקשת העליונה $\widehat{BC}$, אז רדיוס המקום הגאומטרי הוא $R = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)}$, וכאשר הנקודה A נמצאת על הקשת התחתונה BC, אז רדיוס המקום הגאומטרי הוא $R' = \frac{BC}{2\sin\left(180° - \frac{A}{2}\right)}$

מקרה (ב): המקרה שהנקודה A נעה על אליפסה קנונית

נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$), ומוקדיה בנקודות B ו-C. הנקודה A נעה על היקף האליפסה. מהו המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים החסומים במשולש ΔABC (ראה איור 15).



איור 15

פתרון

(I) שיקולים גאומטריים

טענה: חוצה-הזווית AD של המשולש ΔABC נחתך על-ידי חוצי-הזווית האחרים של המשולש בנקודה O' (מרכז המעגל החסום), ולכן יחס הקטעים

הנחתכים ממנו: $\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AO'}{O'D}$.

הוכחת הטענה

לפי משפט חוצה-הזווית במשולש ΔABC קיים: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

לפי התכונה של שברים: $\frac{AB}{AB+AC}=\frac{BD}{BD+DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

מכאן: $BD=\frac{AB\cdot AC}{AB+AC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+AC}=\frac{BD}{DC}$

לפי ש-'BO הוא חוצה-זווית במשולש ΔABD קיים: $\frac{AB}{BD}=\frac{AO'}{OD'}$

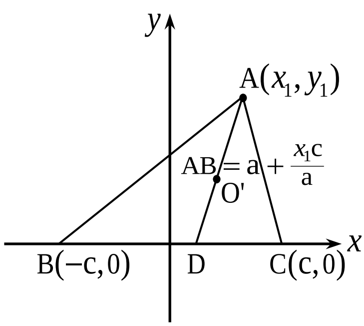
על-ידי הצבת קשר זה בקשר הקודם – מקבלים: $\frac{AO'}{O'D}=\frac{AB+AC}{BC}$

וכך הוכחה הטענה.

המסקנה מהטענה

באליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אורך הציר הגדול הוא $AB+AC=2a$, והמרחק בין המוקדים הוא $BC=2c$ (כאשר $c^2=a^2+b^2$). לכן באליפסה הנתונה, היחס $\frac{AO}{OD}$ קבוע ושווה ל-$\frac{a}{c}$ ללא תלות במיקום הנקודה A.

(II) שיקולים אנליטיים



איור 16

מסמנים את שיעורי הנקודה A שעל האליפסה $A(x_1,y_1)$ (ראה איור 16).

אם $AB>AC$, אז אורכי המחוגים מהמוקדים לנקודה זו הם

$$AC=a-\frac{x_1c}{a}$$

ולכן $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{a^2+x_1c}{a^2-x_1c}$

על-פי יחס החלוקה $\frac{BD}{DC}$ ועל-פי הנוסחה למציאת שיעורי נקודה המחלקת קטע ביחס נתון – מוצאים $D\left(\frac{c^2x_1}{a^2},0\right)$.

כפי שהוכח, הנקודה 'O מחלקת את הקטע AD ביחס $\frac{AO'}{O'D}=\frac{a}{c}$ על-פי יחס זה ושיעורי הנקודות A

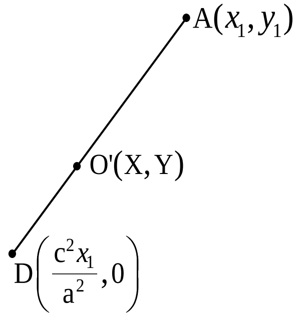
ו-D – מוצאים את שיעורי הנקודה 'O (ראה איור 17).

$$X = \frac{cx_1}{a}$$

$$Y = \frac{cy_1}{a+c}$$

מכאן, $x_1 = \frac{aX}{c}\ ,\ y_1 = \frac{(a+c)Y}{c}$

מאחר שהנקודה $A(x_1, y_1)$ מקיימת את משוואת האליפסה, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, אז על-ידי הצבת שיעורי הנקודה A במשוואה – מקבלים: $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\frac{c^2 b^2}{(a+c)^2}} = 1$.



איור 17

כלומר, הנקודה 'O נעה על מסלול של אליפסה, שאורכו של הציר הגדול שלה הוא 2c, ואורכו של הציר הקטן הוא $\frac{2bc}{a+c}$. הפתרון שהוצג מצביע על החשיבות של שילוב בין שיקולים גאומטריים לבין שיקולים אנליטיים.

מצורף יישומון (geogebra), המאפשר הצגת (היווצרות) המקום הגאומטרי – תוך כדי הנעת הנקודה A על-גבי האליפסה. קיימת אפשרות לשנות בעזרת סרגלים את הפרמטרים a ו-b של האליפסה.

יישומון 6: https://tube.geogebra.org/student/m1090107

מקרה (ג): הנקודה A נעה על היפרבולה קנונית

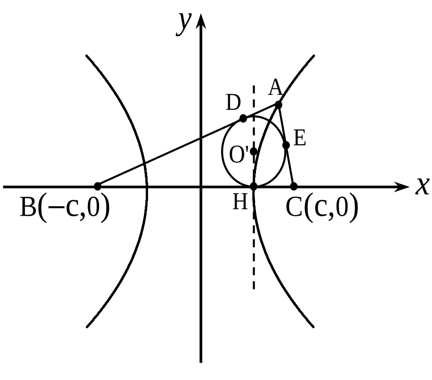
נתונה היפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

מהו המקום הגאומטרי של מרכז המעגל, החסום במשולש ששניים מקדקודיו הם מוקדי ההיפרבולה, והקדקוד השלישי נע על-גבי ההיפרבולה (ראה איור 18)?

מוקדי ההיפרבולה: $F_1 = B(-c,0)\ ,\ F_2 = C(c,0)$

D, E, H נקודות ההשקה של המעגל החסום עם צלעות המשולש.

$$BD = BH = t\ ,\ AD = AE = p\ ,\ CE = CH = q$$



איור 18

לפי הגדרת ההיפרבולה:

$$BA - AE = 2a \quad \Rightarrow \quad (t+p) - (p+q) = 2a \quad \Rightarrow \quad t - q = 2a$$

$$BC = 2c \quad \Rightarrow \quad t + q = 2c$$

משני הקשרים האחרונים מקבלים: $q = c - a$.

מכאן, שיעורי נקודת ההשקה של המעגל החסום עם ציר ה-x הם $H(a,0)$.

כלומר, נקודת ההשקה של המעגל החסום עם ציר ה-x היא נקודה קבועה, ועבור המקרה $AB > AC$, משוואת המקום הגאומטרי של 'O הוא הישר $x = a$, קו ישר מאונך לציר ה-x והעובר דרך קדקוד ההיפרבולה. עבור המקרה $AB < AC$, משוואת המקום הגאומטרי $x = -a$, כנראה באיור לעיל.

להמחשה הוכן יישומון, המאפשר את הצגת המקום הגאומטרי – תוך כדי תנועת הנקודה A על-גבי הענף הימני של ההיפרבולה. ביישומון קיימת אפשרות לשנות את הפרמטרים a ו-q של ההיפרבולה.

נוסחאות כלליות למשוואת המקום הגאומטרי של מרכז המעגל החסום ושל נקודת מפגש הגבהים, כאשר שני קדקודים של המשולש קבועים, והקדקוד השלישי נע על עקום נתון.

המקום הגאומטרי של מפגש הגבהים במשולש

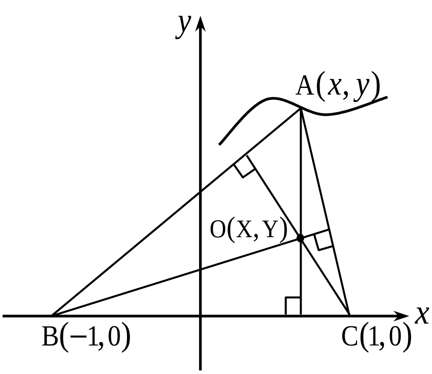
ללא הגבלת הכלליות, יהיו הקדקודים B ו-C $(-1,0)$ ו-$(1,0)$ בהתאמה. הנקודה A נעה על עקומה כלשהי $y = f(x)$, ונקודת מפגש הגבהים תהא $O(X,Y)$ (ראה איור 19).

המשולשים ΔBOD ו-ΔACD דומים ולכן: $\frac{DO}{BD} = \frac{DC}{AD}$.

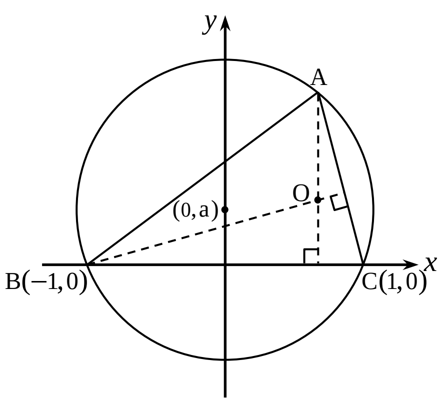
על-ידי הצבת שיעורי הקדקודים ביחס הדמיון מקבלים

$$\frac{Y}{x+1} = \frac{1-x}{y} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1-x^2}{y} = \frac{1-x^2}{f(x)}$$

והיות ועבור הנקודות A, O, D מתקיים: $x = X$, הרי הנקודה A נעה על העקומה: $Y = \frac{1-x^2}{f(X)}$.



איור 19



איור 20

דוגמאות

(1) נניח שהנקודה A נעה על הישר $y = a$ $(a > 0)$, קו המקביל לציר ה-x, במקרה זה הנקודה A, נקודת מפגש הגבהים, נעה על העקומה $Y = -\frac{x^2}{a} + \frac{1}{a}$, שצורתו פרבולה.

(2) נניח, שהנקודה A נעה על מעגל שמרכזו על ציר ה-y בנקודה $(0,\mathrm{a})$ ורדיוסו $\sqrt{\mathrm{a}^2+1}$ (כלומר עובר דרך הנקודות B ו-C (ראה איור 20).

משוואת המעגל שעליו הנקודה A היא:

$$x^2+(y-\mathrm{a})^2=\mathrm{a}^2+1$$

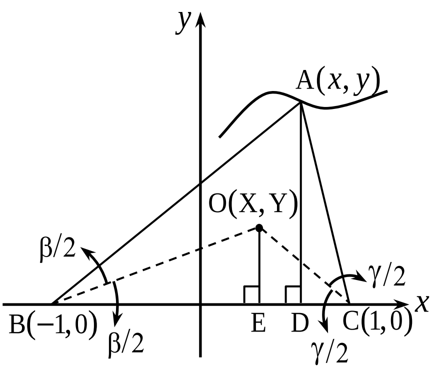
או:

$$f(x)=y=\pm\sqrt{\mathrm{a}^2+1-x^2}+\mathrm{a}$$

כשמציבים את משוואת העקומה בקשר $\mathrm{Y}=\frac{1-x^2}{f(\mathrm{X})}$ וכן $x=\mathrm{X}$, מקבלים שהמקום הגאומטרי, שהנקודה O נעה עליו, נקודת מפגש הגבהים, הוא

$$\mathrm{X}^2+(\mathrm{Y}+\mathrm{a})^2=\mathrm{a}^2+1$$

זהו מעגל שמרכזו $(0,-\mathrm{a})$ ורדיוסו $\sqrt{\mathrm{a}^2+1}$.



איור 21

אפשר להגיע לתוצאה זו גם על-ידי שיקולים גאומטריים בלבד. באותו אופן אפשר למצוא את משוואת המקום הגאומטרי, אשר נעה עליו נקודת מפגש הגבהים עבור כל פונקצייה $f(x)$ שהנקודה A נעה עליה.

נוסחה למקום הגאומטרי של מרכז המעגל החסום

על-פי משולש $\Delta\mathrm{BOE}$, $\quad \mathrm{tg}\beta=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+1}$

(על-פי סימון הזוויות באיור 21), ולכן לפי הנוסחה לזווית כפולה:

$$\text{(1)}\quad \mathrm{tg}\beta=\frac{2\mathrm{Y}(\mathrm{X}+1)}{(\mathrm{X}+1)^2-\mathrm{Y}^2}=\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

על-פי משולש $\Delta\mathrm{EOC}$, $\quad \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\mathrm{Y}}{1-\mathrm{X}}$

לכן

$$\text{(2)}\quad \mathrm{tg}\gamma=\frac{2\mathrm{Y}(1-\mathrm{X})}{(1-\mathrm{X})^2-\mathrm{Y}^2}=\mathrm{N}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

על-פי משולש $\Delta\mathrm{ABD}$:

$$\text{(3)}\quad \mathrm{tg}\beta=\frac{y}{x+1}$$

על-פי משולש $\Delta\mathrm{ADC}$:

$$\text{(4)}\quad \mathrm{tg}\gamma=\frac{y}{1-x}$$

כשמשווים את הקשרים (1) ו-(3) מקבלים:

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$$

כשמשווים את הקשרים (2) ו-(4) מקבלים:

$$-\frac{x}{y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\mathrm{N(X,Y)}}$$

ולכן:

$$\frac{2}{y}=\frac{\mathrm{N(X,Y)+M(X,Y)}}{\mathrm{N(X,Y)\cdot M(X,Y)}} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{2\cdot\left(\mathrm{N(X,Y)\cdot M(X,Y)}\right)}{\mathrm{N(X,Y)+M(X,Y)}}$$

באותו אופן מקבלים:

$$x=\frac{\mathrm{N(X,Y)-M(X,Y)}}{2\left(\mathrm{N(X,Y)+M(X,Y)}\right)}$$

ולכן כאשר הנתון הוא עקומה $f(x)$ אשר עליה נעה נקודה A, על-ידי הצבת ערכי x ו-y שהתקבלו – אפשר לקבל את הקשר בין השיעורים X ו-Y של המקום הגאומטרי של המעגל החסום במשולש.

סיכום

הוראת הנושא מקומות גאומטריים המבוססת על הבנה משמעותית מהווה אתגר לעוסקים בהוראת מתמטיקה. המאמר מציג מגוון היבטים ומשימות, העוסקים במציאת מקומות גאומטריים בעלי תכונה משמרת, בניגוד לסביבת הכיתה, אשר בה מתמודדים התלמידים עם משימות, העוסקות במציאת מקומות גאומטריים באופן טכני וללא התייחסות להכללות אפשריות. המשימות שהוצגו במהלך המאמר נחקרו בשלב ראשון באמצעות תכנת גאומטרייה דינמית. באמצעותה יכולנו לזהות ולראות הלכה למעשה את היווצרותו של המקום הגאומטרי באופן דינמי – תוך כדי גרירה של נקודה על המקום הגאומטרי המקורי והפעלת "עקבה" על נקודה, הנמצאת על המקום הגאומטרי המבוקש (הפעלת "עקבה" היא אחת מהאפשרויות, שהתכנה הדינמית (Geogebra) מאפשרת – כדי לעקוב אחר תנועה של נקודה תוך כדי גרירה של נקודה אחרת). העבודה עם תכנה גאומטרית דינמית גם בסביבת הוראת פרחי-הוראה ו/או תלמידים – מאפשרת ללומד הבנה טובה ומעמיקה יותר של המושג "מקום גאומטרי", תהליך בנייתו (הסטודנטים וגם התלמידים בסביבת הכיתה – מתקשים לראות את הדינמיות של המקום הגאומטרי, כאשר המשימה מוצגת בספר הלימוד בצורה סטטית), ובעיקר – לזהות הכללות שחלקן אף מפתיעות. לשילובן של הפתעות מתמטיות בתהליך ההוראה – קיים תפקיד חיוני לצורך הצגת התכנים המתמטיים באופן מסקרן, דינמי ומעורר חשיבה (Movshovits-Hadar, 1988).

Martinovic & Manizade (2013), מתארות את תרומת התכנה הדינמית כחלק מתהליך פדגוגי חוזר ונשנה: reflexive pedagogy in action. מבין התפקידים השונים של התכנה הדינמית הן בוחרות להדגיש את תפקיד התכנה הדינמית כשותף (partner) בתהליך הלמידה. השימוש בתכנה הדינמית מאיץ את תהליכי ההבנה וההנמקה המתמטית. במקרה זה מתבסס המשתמש על הידע המתמטי שלו כדי להצדיק את מה שהטכנולוגיה ממחישה. נוסף על התפקיד המשמעותי של התכנה הדינמית כשותף בתהליך הלמידה – אפשר להרחיב ולציין, כי השותפות מתרחשת גם בתהליכי בנייה וחקר של משימות על ידנו כמורי-מורים. במהלך תהליך בניית המשימות וניתוחן בנושא מקומות גאומטריים עם תכונה משמרת – מצאנו את הכלי הטכנולוגי כשותף משמעותי לצורך ניסוי, תהייה ובדיקת השערות לקראת תהליך ההוכחה המתמטית.

סטופל ובן-חיים (Stupel & Ben-Chaim, 2013) המשיגו את המושג "הוכחה למחצה" בעבודה עם

הכלי הטכנולוגי – תוך כדי גרירה של נקודות ואובייקטים שונים, זיהוי תכונה משמרת, הכללה ועוד. פעולת הגרירה מאפשרת מבט דינמי על אובייקטים מתמטיים, זיהוי תכונות ויחסים ביניהם, הנשארים קבועים – תוך כדי יצירת אוסף רב של דוגמות פרטיות וקבלת השערות (de Villiers, 1998). ההוראה בסביבה טכנולוגית מציבה בפני המורים ומורי-המורים אתגר פדגוגי בהצגת חשיבותה ונחיצותה של ההוכחה המתמטית לצורך הכללה, כלומר הם צריכים להבהיר לסטודנטים, כי אי אפשר להסתפק ב"הוכחה למחצה", המבוססת על זיהוי תופעות והכללות תוך כדי עבודה עם הכלי הטכנולוגי, אלא יש להדגיש את מקומה של ההוכחה מתמטית התקֵפה לכל אינסוף המקרים הפרטיים.

משימה מתמטית המציגה תהליך-חקר היא משימה מעצימה (powerful task), החושפת את הלומד לתהליך למידה מורכב ולחשיבה מתמטית ופדגוגית מקשרת (Krain, 1993). תהליכי הבנָיה של האובייקטים באמצעות התכנה הדינמית ותהליכי ההכללה המתמטית – הדגישו את הקישור בין נושאי מתמטיקה שונים: גאומטרייה אוקלידית (יחסי קטעים, תכונות של אובייקטים גאומטריים) וגאומטרייה אנליטית (מקום גאומטרי, חלוקת קטע ביחס נתון). חשיפת הסטודנטים לקשרים מעין אלה חושפת את ראיית המתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף בדיד של נושאים המנותקים זה מזה (House & Coxford, 1995; NCTM, 2000). השימוש בתכנה הגאומטרית הדינמית מאפשר מעקב מידי אחרי היווצרות המקום הגאומטרי. מעקב זה מציג ויזואלית את מסלול התנועה של הנקודה הנגזרת ואת המסלול של הנקודה השנייה, שתנועתה היא תוצאה של גרירת הנקודה הראשונה. מעקב זה מקל מאוד על הדרך המתמטית למציאת הפונקצייה המתארת את המקום הגאומטרי, שהנקודה השנייה נעה עליו. המשימות שהוצגו לאורך המאמר עשויות להוות קרקע פורייה לפיתוח והעמקה של הידע המתמטי של פרחי-הוראה בנושא מקומות גאומטריים. המשימות רלוונטיות לשילוב הן בסביבת הוראת סטודנטים/מורים והן בסביבת הכיתה. המשימה הרלוונטית לשילוב בסביבת הכיתה – מעוררת את פרחי-ההוראה והמורים לשיתוף פעולה, להפתעה, לרפלקציה על הידע המתמטי שלהם תוך כדי אינטראקציה עם המשימות (Zaslavsky, 2007; Zaslavsky, 2008).

ביבליוגרפיה

Alakoç, Z. (2003). Matematik Öğretiminde Teknolojik Modern Öğretim Yaklaşımları. **The Turkish Online Journal of Educational Technology, 2**(1), 43-49.

Brown , S. I., & Walter, M. I. (1969). What if not? **Mathematics Teaching, 46**, 38-45.

Chazan, D. (1993). Students' microcomputer-aided explanation in geometry. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), **Problem posing: Reflection and application** (pp. 289-299). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), **Designing learning environment for developing understanding of geometry and space** (pp. 369-393). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T., & Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28**(1), 1-5.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics, 44**, 5-23.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2008). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of Geogebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28**(2), 135-146.

House, P. A., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). **Connecting mathematics across the curriculum**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics, 24**, 65-93.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environment as a source of rich learning contexts for the complex activity of providing. **Educational Studies in Mathematics, 44**, 151-161.

Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2013). Technology as a partner in geometry classrooms. **The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 8**(2). Retrieved from https://php.radford.edu/~ejmt/ContentIndex.php

Movshovits-Hadar, N. (1988). School mathematics theorems – an endless source of surprise. **For the Learning of Mathematics, 8**(3), 34-40.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. **Far East Journal of Mathematical Education, 11**(2), 129-161.

Wiest, L. R., (2001). The role of computers in mathematics teaching and learning. **Computers in the Schools, 17**(1-2), 41-55.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators: The dynamics associated with tasks in mathematics teacher education. **Journal for Mathematics Teacher Education, 10**(6), 433-440.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), **The mathematics teacher educator as a developing professional** (pp. 93-114). Rotterdam: Sense Publishers.